Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (10+5+5 Punkte)**.** Wir betrachten die Multiplikationstabelle der natürlichen Zahlen. Aus dieser wählen wir einen rechteckigen Teilbereich mit ungerader Breite $b = 2k + 1$ und ungerader Höhe $h = 2\ell + 1$. Links oben in dem Rechteck steht das Produkt $x \cdot y$ und rechts unten $(x + 2k) \cdot (y + 2\ell)$. Wir betrachten nun den Rand des Rechtecks und färben diesen abwechselnd blau und rot ein, wobei das Feld $x \cdot y$ blau gefärbt wird. In diesem Beispiel ist $x = 3$, $y = 2$, $k = 2$ und $\ell = 1$:

·	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	...
4	4	8	12	16	20	24	28	32	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	...
...	...								

Wir bezeichnen mit B die Summe der Zahlen in den blauen Kästchen und mit R der Summe der Zahlen in den roten Kästchen.

(a) Zeigt, dass $B = R$ für $k = \ell = 1$ (also $b = h = 3$).
Welchen Wert nimmt B (bzw. R) für $k = \ell = 1$ an?

(b) Zeigt, dass allgemein $B = R$ für $k, \ell \geq 1$ beliebig.

(c) Welchen Wert nimmt B (bzw. R) für $k, \ell \geq 1$ an?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Sei nun das ganze Rechteck schachbrettartig blau und rot gefärbt. Was kann nun über die Differenz der Summen der Zahlen in den blauen und in den roten Kästchen ausgesagt werden?

Aufgabe 2 (5+5+5+5 Punkte)**.** Für $n \geq 3$ ganzzahlige Gewichte soll gelten: Nimmt man ein beliebiges Gewicht weg, so kann man die restlichen so auf zwei Waagschalen verteilen, dass diese im Gleichgewicht sind.

(a) Gebt je eine Menge von Gewichten an, die diese Eigenschaft hat bzw. nicht hat.

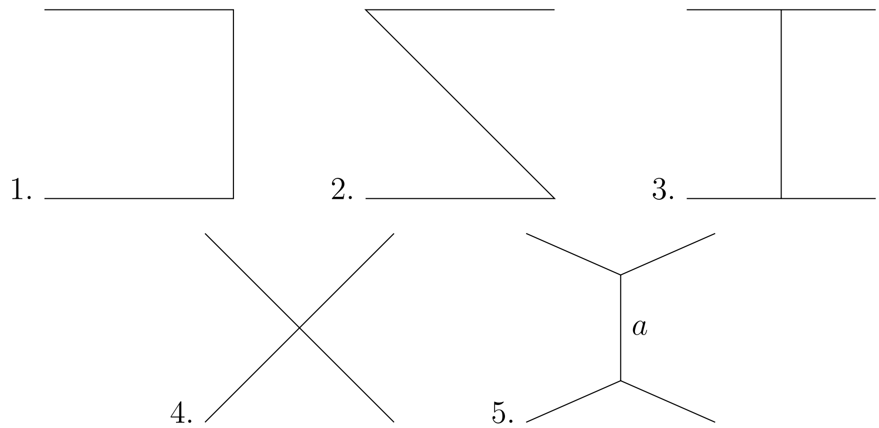
(b) Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gibt es eine solche Menge von Gewichten? (Beweist, dass es für diese Zahlen eine solche Menge gibt und für alle anderen nicht.)

(c) Gebt ein Beispiel solcher Gewichte an, bei dem mindestens zwei verschiedene Gewichte vorkommen. Für welche Zahlen $n \geq 3$ gibt es so ein Beispiel?

(d) Gebt ein Beispiel solcher Gewichte an, bei dem mindestens drei verschiedene Gewichte vorkommen. Für welche Zahlen $n \geq 3$ gibt es so ein Beispiel?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Gibt es für jede natürliche Zahl n eine solche Menge mit mindestens n verschiedenen Gewichten?

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Vier Orte auf den Ecken eines Quadrats der Kantenlänge 1 sollen so durch Straßen verbunden werden, dass man jeden Ort von jedem anderem aus erreichen kann. Zunächst betrachten wir die folgenden Konfigurationen:



Die Figuren 3, 4 und 5 sind jeweils horizontal und vertikal symmetrisch.

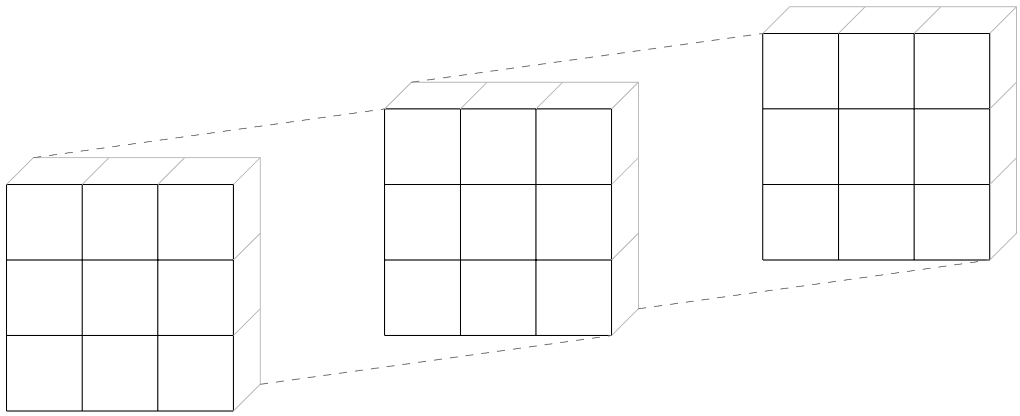
(a) Berechnet die Gesamtlänge der Straßennetze für jede Konfiguration (bei der fünften abhängig vom Parameter a).

(b) Welches Straßennetz hat die kürzeste Gesamtlänge?

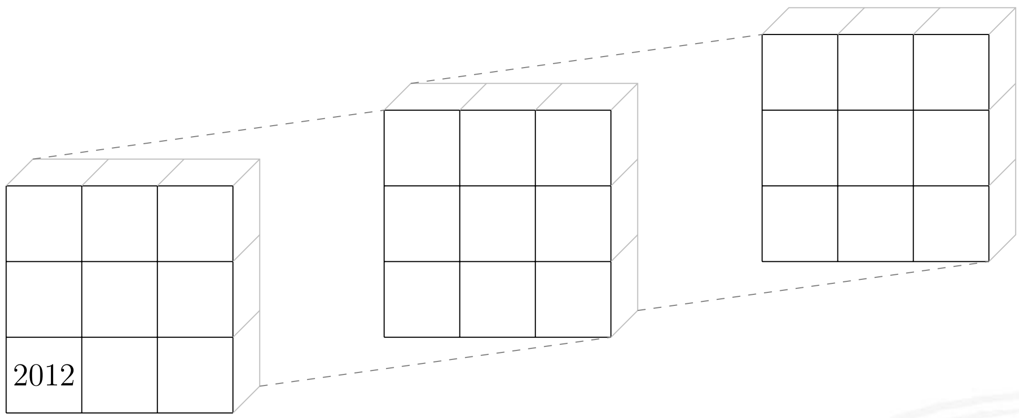
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Kann es bei anderen Konfigurationen noch kürzere Straßennetze geben?

Aufgabe 4 (5+5+10 Punkte)**.** Ein Würfel der Kantenlänge n ist aus $n \times n \times n$ Einheitswürfeln aufgebaut. In jedem Einheitswürfel steht eine Zahl, so dass die Summe der Zahlen in jeder kantenparallelen Reihe 1 ergibt.

(a) Gebt ein Beispiel für $n = 3$ an, in dem nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen.



(b) Gebt ein Beispiel für $n = 3$ an, bei dem in einer Ecke die Zahl 2012 steht.



(c) Wir betrachten nun einen Würfel mit Kantenlänge $n = 10$, bei dem in einer Ecke die Zahl 2012 steht. Berechne die Summe aller Zahlen der drei Würfelebenen, die diese Ecke enthalten.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zeichnet für das Beispiel aus dem ersten Teil die 3×3 Kästchen der Würfelunterseite auf und tragt in jedes Kästchen die Höhe der Zahl 1 über der Unterseite ein. Welche Eigenschaften hat dieses Quadrat? Warum trifft das immer zu (für jeden $n \times n \times n$-Würfel mit Reihensumme 1, in dem nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen)?

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Im Fall $b = h = 3$ stehen in der ersten Zeile des Rechtecks die Zahlen xy, $(x+1)y$ und $(x+2)y$, dabei ist das Feld mit $(x+1)y$ rot und die anderen beiden Felder sind blau. Die zweite Zeile hat zwei Randfelder, die beide rot gefärbt sind und die Zahlen $x(y+1)$ und $(x+2)(y+1)$ enthalten. Die dritte Zeile besteht aus zwei blauen Feldern mit den Zahlen $x(y+2)$ und $(x+2)(y+2)$ und einem roten Feld $(x+1)(y+2)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} B &= xy + (x+2)y + x(y+2) + (x+2)(y+2) \\ &= 4xy + 4x + 4y + 4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R &= (x+1)y + x(y+1) + (x+2)(y+1) + (x+1)(y+2) \\ &= 4xy + 4x + 4y + 4. \end{aligned}$$

Also ist $B = R = 4(x+1)(y+1)$.

(b) Da die Kästchen am Rand des Rechtecks abwechselnd rot und blau gefärbt sind, gibt es gleich viele rote und blaue Kästchen. Es reicht also zu zeigen, dass der Mittelwert der Zahlen in den roten Kästchen mit dem Mittelwert der Zahlen in den blauen Kästchen übereinstimmt.

Der Mittelwert aller Zahlen in blauen bzw. roten Kästchen in der oberen Zeile des Rechtecks ist gleich der Zahl im mittleren Feld der oberen Zeile: Für jedes Kästchen der oberen Zeile links von dem mittleren Kästchen, gibt es rechts vom mittleren Kästchen ein anderes Kästchen gleicher Farbe, das genauso weit vom mittleren Kästchen entfernt liegt. Die Summe der Zahlen in den beiden Kästchen ist dann doppelt so groß wie die Zahl im mittleren Kästchen der oberen Zeile. Die Summe aller Zahlen in den Kästchen einer Farbe der oberen Reihe, würde sich also nicht verändern, wenn man jede Zahl durch die Zahl im mittleren Feld ersetzt.

Ebenso folgt, dass der Mittelwert aller Zahlen in den Kästchen von einer Farbe in der unteren Zeile gleich der Zahl im mittleren Kästchen der unteren Zeile ist. Da es jeweils gleich viele rote Felder in der oberen und unteren Zeile gibt, sind die Zahlen in roten Kästchen der oberen und unteren Zeile im Durchschnitt so groß, wie der Mittelwert zwischen der Zahl im mittleren Feld der unteren Zeile und der Zahl im mittleren Feld der oberen Zeile, also so groß wie Zahl in der Mitte des Rechtecks. Das gleiche gilt für die Zahlen in den blauen Kästchen der oberen und der unteren Zeile.

Noch nicht berücksichtigt sind die Zahlen in der rechten und linken Spalte außerhalb der Eckfelder. Für diese folgt analog wie zuvor, dass der Mittelwert aller Zahlen in roten bzw. blauen Kästchen der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks entspricht. Somit entspricht der Durchschnitt der Zahlen in allen Kästchen einer Farbe jeweils der mittleren Zahl des Rechtecks.

(c) Nach den Überlegungen zur Lösung des letzten Aufgabenteils entspricht der Mittelwert aller Zahlen in blauen Kästchen der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks, das ist $(x+k)(y+\ell)$. Um B zu bestimmen, muss $(x+k)(y+\ell)$ also nur mit der Anzahl der blauen Kästchen multipliziert werden. Der Rand besteht aus $4(k+\ell)$ Kästchen, von denen die Hälfte blau ist. Also gilt

$$B = 2(k+\ell)(x+k)(y+\ell).$$

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor kann man zeigen, dass für ein schachbrettartig gefärbtes Rechteck mit ungeraden Seitenlängen der Mittelwert aller Zahlen in den Feldern einer Farbe der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks entspricht. Allerdings gibt es nicht gleich viele Felder von jeder Farbe: Wenn das Feld links oben wieder blau gefärbt ist, gibt es ein blaues Feld mehr als rote Felder. Somit ist B genau um die Zahl im mittleren Feld $(x+k)(y+\ell)$ größer als R.

Lösung 2. (a) Die beschriebene Eigenschaft wird zum Beispiel von einer Menge aus drei Gewichten erfüllt, die jeweils das Gewicht 1 haben: Nimmt man eins der Gewichte weg, dann bringt man die Waage ins Gleichgewicht, indem man auf beide Waagschalen jeweils eins der übrigen Gewichte legt.

Besteht die Menge hingegen aus den drei Gewichten 1, 2 und 3 und man nimmt das Gewicht 1 weg, so können die beiden anderen Gewichte nur in zwei Mengen mit den Gesamtgewichten 5 und 0 oder 2 und 3 aufgeteilt werden. Die Menge erfüllt also nicht diese Eigenschaft.

(b) Eine solche Menge aus n Gewichten gibt es genau dann, wenn n ungerade ist:

Falls n ungerade ist, hat jede Menge aus n gleich schweren Gewichten diese Eigenschaft. Wenn ein Gewicht weggenommen wurde, ist eine gerade Anzahl von gleich schweren Gewichten übrig, so dass man jeweils die Hälfte der Gewichte auf jede Waagschale legen kann.

Angenommen, es gäbe für eine gerade Zahl n eine solche Menge von n Gewichten mit dem Gesamtgewicht G. Wenn ein Gewicht a von dieser Menge entfernt wird, wiegen alle übrigen Gewichte zusammen $G-a$. Da man die restlichen Gewichte auf zwei gleich schwere Mengen aufteilen kann, muss $G-a$ eine gerade Zahl sein. Falls G ungerade ist, muss also auch a ungerade sein. Ebenso muss dann jedes andere Gewicht der Menge ungerade sein.

Dann ist G aber die Summe von einer geraden Anzahl von ungeraden Zahlen, also eine gerade Zahl. Somit kann G nicht ungerade sein. Falls G eine gerade Zahl ist, folgt entsprechend, dass jedes Gewicht gerade sein muss. In diesem Fall erhält man eine neue Menge von n positiven ganzzahligen Gewichten mit der beschriebenen Eigenschaft und dem Gesamtgewicht $\frac{G}{2}$, indem man jedes Gewicht durch ein halb so schweres Gewicht ersetzt. Falls $\frac{G}{2}$ eine gerade Zahl ist, kann man dieses Vorgehen wiederholen und erhält eine Menge mit Gesamtgewicht $\frac{G}{4}$, ist $\frac{G}{4}$ gerade, erhält man nach erneutem Ersetzen das Gesamtgewicht $\frac{G}{8}$ und so weiter. Man kann also so oft auf diese Weise die Gewichte ersetzen, bis man eine Menge aus n Gewichten mit ungeradem Gesamtgewicht und der beschriebenen Eigenschaft erhält. Da wir bereits gezeigt haben, dass es keine solche Menge geben kann, gibt es auch keine Menge von n Gewichten mit dieser Eigenschaft, deren Gesamtgewicht gerade ist.

(c) Für $n = 3$ gibt es keine solchen Beispiele, denn sonst könnte man ein Gewicht wegnehmen, so dass zwei verschiedene Gewichte übrig bleiben, mit diesen kann man aber kein Gleichgewicht herstellen.

Für jede ungerade Zahl $n \geq 5$ erfüllt zum Beispiel eine Menge aus $(n-1)$-mal dem Gewicht 1 und einmal dem Gewicht $n-2$ die Eigenschaft: Wird eins der Gewichte 1 entfernt, dann legt man das Gewicht $n-2$ auf eine Seite und die übrigen $n-2$ Gewichte 1 auf die andere Seite. Wird das Gewicht $n-2$ weggenommen, stellt man auf jede Seite gleich viele der übrigen Gewichte.

(d) Auch in diesem Fall gibt es für jede ungerade Zahl $n \geq 5$ eine solche Menge. Zum Beispiel hat die Menge aus einmal dem Gewicht 5, zweimal dem Gewicht 3 und $(n-3)$-mal dem Gewicht 1 diese Eigenschaft: Wird das Gewicht 5 weggenommen, so legt man auf jede Seite ein Gewicht 3 und die Hälfte der Gewichte 1. Falls ein Gewicht 3 entfernt wurde, legt man zunächst das Gewicht 5 auf eine Seite und auf die andere Seite die Gewichte 3, 1 und 1 und legt anschließend jeweils die Hälfte der übrigen Gewichte 1 dazu. Wenn ein Gewicht 1 weggelassen wird, legt man zunächst auf eine Seite die beiden Gewichte 3 und auf die andere Seite das Gewicht 5 und ein Gewicht 1 und fügt jeweils wieder die Hälfte der übrigen Gewichte 1 hinzu.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Es gilt sogar, dass jede beliebige Menge aus positiven ungeraden Gewichten zu einer Menge mit der beschriebenen Eigenschaft ergänzt werden kann: Wenn das Gesamtgewicht dieser Gewichte G beträgt, reicht es $(G + 1)$-mal das Gewicht 1 hinzuzufügen. Wird ein Gewicht entfernt, so teilt man zunächst alle Gewichte, die schwerer als 1 sind, beliebig auf. Die Gesamtgewichte dieser beiden Mengen unterscheiden sich höchstens um G. Da noch mindestens G Gewichte 1 übrig sind, kann man zunächst zur leichteren Menge so viele der Gewichte 1 dazulegen, bis beide Mengen gleich schwer sind. Da alle Gewichte zusammen $2G + 1$ wiegen und ein ungerades Gewicht weggenommen wurde, muss noch eine gerade Anzahl von Gewichten 1 übrig sein. Also kann man zu beiden Mengen gleich viele dazulegen.

Lösung 3. (a) Da die Diagonale im Quadrat die Länge $\sqrt{2}$ hat, hat das erste Netz die Länge 3, das zweite die Länge $2+\sqrt{2}$, das dritte die Länge 3 und das vierte die Länge $2\sqrt{2}$. Bleibt das fünfte: Die vier nicht mit a beschrifteten Längen kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Sie sind die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit Kathetenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1-a}{2}$, haben also die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2-2a+a^2}}{2}.$$

Das fünfte Straßennetz besteht aus vier solchen Strecken und einer der Länge a, hat also die Gesamtlänge

$$4\frac{\sqrt{2-2a+a^2}}{2} + a = 2\sqrt{2-2a+a^2} + a.$$

(b) Um zu bestimmen, wann die Länge des fünften Netzes minimal ist, kann man sie als Funktion von a ableiten:

$$\left(2\sqrt{2-2a+a^2} + a\right)' = \frac{-2+2a}{\sqrt{2-2a+a^2}} + 1 = \frac{2a-2+\sqrt{2-2a+a^2}}{\sqrt{2-2a+a^2}}.$$

Die Ableitung hat eine Nullstelle, wenn $2a - 2 + \sqrt{2-2a+a^2} = 0$ gilt und außerdem $2 - 2a + a^2 > 0$. Dies ist der Fall, wenn unter der Bedingung $2a - 2 \leq 0$ gilt

$$(2a-2)^2 = 2 - 2a + a^2, \text{ also } 3a^2 - 6a + 2 = 0.$$

Dies ist äquivalent zu $a^2 - 2a + 1 = 1 - \frac{2}{3}$, also $(a-1)^2 = \frac{1}{3}$. Mögliche Lösungen sind also $a = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $a \leq 1$ gelten muss, bleibt nur

$$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

was auch die erste Bedingung erfüllt.

Um zu überprüfen, dass $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ wirklich ein Minimum ist, muss man den Wert des Ausdrucks mit dem der Randfälle $a = 0$ und $a = 1$ vergleichen, die zugleich die dritte und vierte Konfiguration mit Längen 3 bzw. $2\sqrt{2}$ sind, wobei der zweite Wert kleiner ist. Es ist also die Frage, ob für die Längen L_4 und L_5 der Konfigurationen 4 bzw. 5 gilt

$$L_5 = 2\sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < L_4 = 2\sqrt{2}.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} L_5 =& 2\sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ =& 2\sqrt{2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ =& 2\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

Man vergleicht durch zweimaliges Quadrieren:

$$L_5 < L_4 \Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{3} + 1 < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 < 16$$

Die kürzeste Konfiguration ist also wirklich die fünfte mit $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, welche die Länge $\sqrt{3} + 1$ hat.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wir werden zeigen, dass die Konfiguration mit dem kürzesten Straßennetz vom Typ 5 bzw. Typ 5 um 90 Grad gedreht ist.

In dem Beweis benutzen wir die folgende Beobachtung: Unter allen Dreiecken mit fester Grundseite und Höhe hat das gleichschenklige den kürzesten Umfang und somit die kleinste Summe der Schenkellängen.

Diese Beobachtung kann man wie folgt beweisen. Sei $z = x + y$ die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks, wobei die Höhensenkrechte die Grundseite in Strecken der Länge x und y teilt. Für die Summe S der Schenkellängen ergibt sich

$$S = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2}$$

und wir erhalten

$$S^2 = x^2 + h^2 + 2\sqrt{x^2y^2 + (x^2 + y^2)h^2 + h^4} + y^2 + h^2\,.$$

Da immer $(x - y)^2 \geq 0$ gilt und somit $x^2 + y^2 \geq 2xy$ folgt, können wir diese Ungleichung im mittleren Term in der Wurzel substituieren und es gilt

$$S^2 \geq x^2 + h^2 + 2\sqrt{x^2y^2 + 2xyh^2 + h^4} + y^2 + h^2 = x^2 + h^2 + 2(xy + h^2) + y^2 + h^2\,.$$

Dies können wir weiter umstellen, bis wir

$$S^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 + 4h^2 = (x+y)^2 + 4h^2 = z^2 + 4h^2$$

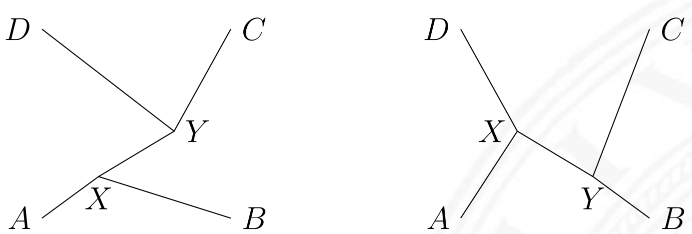
erhalten. D. h. die Summe der Schenkellängen ist immer mindestens $\sqrt{z^2+4h^2}$. Setzen wir auf der anderen Seite $x = y = z/2$, wie im gleichschenkligen Fall, dann gilt

$$S^2 = \left(2\sqrt{z^2/4 + h^2}\right)^2 = z^2 + 4h^2\,,$$

d. h. in diesem Fall wird die untere Schranke angenommen und somit minimiert das gleichschenklige Dreieck die Summe der Schenkellängen und die Beobachtung ist bewiesen.

Sei nun ein kürzestes Straßennetz gegeben. Streng genommen müsste man erst einmal zeigen, dass ein solches Netzwerk überhaupt existiert. Dafür müssten wir aber genauer spezifizieren, wie wir ein Straßennetzwerk mathematisch modellieren. Tatsächlich gibt es aber ein solches Netzwerk minimaler Länge, falls die Straßen hinreichend „stetig“ sind. Für so ein Straßennetzwerk minimaler Länge können wir annehmen, dass alle Straßen innerhalb bzw. auf dem Rand des Quadrats verlaufen, da wir sonst über den Rand Abkürzungen finden würden. Nun betrachten wir die beiden Wege in dem Straßennetz, welche diagonal gegenüberliegende Orte miteinander verbinden (A mit C und B mit D in der Graphik weiter unten). Es scheint offensichtlich, dass sich diese Wege irgendwann einmal kreuzen müssen und dies wollen wir hier einfach annehmen. (Tatsächlich ist ein mathematischer Beweis dieser Tatsache gar nicht so einfach und beruht auf dem Jordan'schen Kurvensatz.)

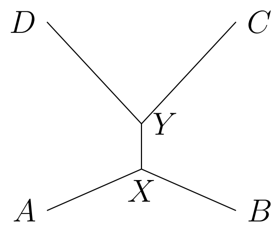
Man sieht leicht ein, dass diese beiden Diagonalwege sich nur einmal kreuzen. D. h. die Wege treffen sich, verlaufen dann eventuell ein Stück gemeinsam, und trennen sich dann wieder. Sollten sie sich nämlich mehr als einmal kreuzen, dann könnte man über die direkte Verbindung des ersten und letzten Kreuzungspunktes ein kürzeres Straßennetzwerk bekommen. Da die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die gerade Linie ist, können wir weiter annehmen, dass alle Zwischenstücke gerade Strecken sind. Auf diese Weise erhalten wir eine der folgenden Strukturen für das Straßennetzwerk:



Sollte das Straßennetzwerk die Form wie im linken Bild haben, dann werden wir weiter zeigen, dass es die Struktur von Typ 5 haben muss. Im anderen Fall würde mit der gleichen Argumentation ein Straßennetzwerk von Typ 5 um 90 Grad gedreht herauskommen.

Als nächstes benutzen wir die oben gemachte Beobachtung. Mit Hilfe dieser können wir zeigen, dass die beiden Punkte X und Y übereinander auf der Mittelachsen liegen müssen. Sollte dies nicht der Fall sein, dann verkürzen sich durch das Verschieben dorthin die Summe der Schenkellängen AX und BX und der von CY und DY. Da X und Y dabei nicht in de Höhe verschoben werden, ist die Distanz XY am kürzesten, wenn X und Y genau übereinander liegen.

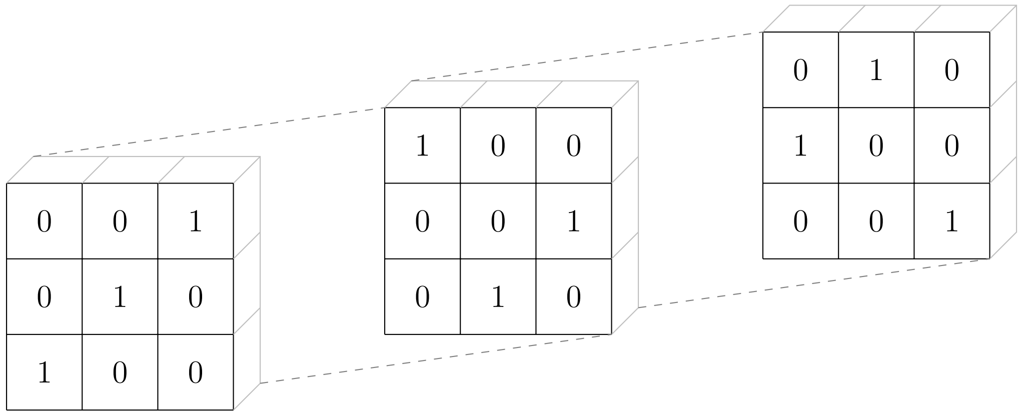
Damit haben wir ein Straßennetzwerk der Form



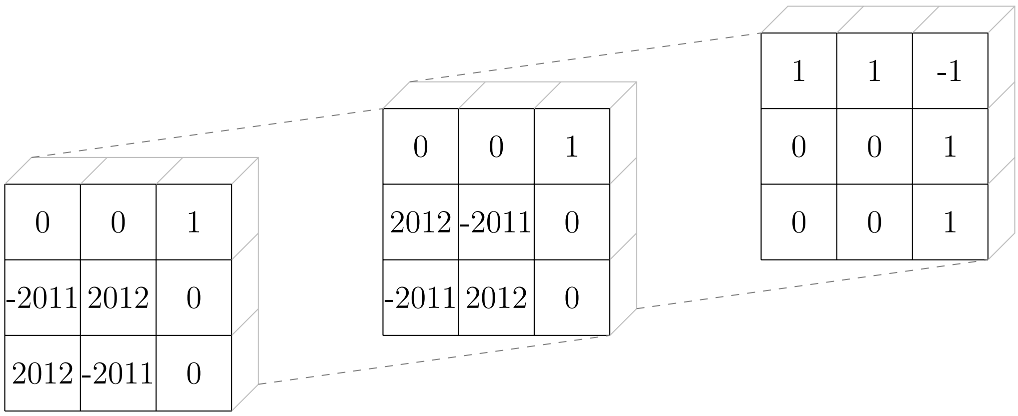
erzwungen und es bleibt nur noch zu zeigen, dass es auch horizontal symmetrisch sein muss. (Wenn Y unter X wäre, könnte das Netz durch Vertauschen von X und Y verkürzt werden.) Dafür verwenden wir ein weiteres Mal die Beobachtung von oben. Die Trapeze mit den Eckpunkten $BCYX$ und $AXYD$ sind gleich und die Gesamtlänge des Straßennetzwerkes entspricht zweimal dem Trapezumfang minus die Länge von XY minus zwei (die Strecke XY kommt nur einmal vor und die Seiten AD und BC gar nicht). D. h. wenn wir den Umfang des Trapezes bei fester Länge XY durch verschieben von X und Y verkürzen können, dann bekämen wir ein kürzeres Straßennetzwerk. Nun folgt aus der Beobachtung, dass die Summe der Längen XB und YC minimal ist, wenn die Winkel $\angle XBC$ und $\angle BCY$ gleich groß sind. Man stelle sich kurz das Dreieck mit Höhe $\frac{1}{2}$ vor, welches man erhält, wenn man einen horizontalen Streifen der Breite XY herausschneidet, so dass dann X und Y auf einen Punkt Z gegenüber der verkürzten Grundseite „BC“ zusammenfallen. Für diese Dreieck besagt die Beobachtung, dass die Summe der Längen BZ und CZ minimal ist, wenn das Dreieck ZBC gleichschenklig ist. Dies entspricht dann aber einem symmetrischen Trapez $BCYX$. Somit folgt, dass es ein horizontal symmetrisches Netzwerk vom Typ 5 gibt, welches die kürzeste Gesamtlänge hat.

Bemerkung: Die Winkel an den Punkten X und Y betragen im kürzesten Streckennetz alle $120°$. Das hängt mit einem bekannten Satz über minimale Netze in Dreiecken zusammen: Sind alle Innenwinkel des Dreiecks kleiner als $120°$, so gibt es genau ein minimales Netz zwischen den Eckpunkten, das aus den Verbindungsstrecken der Ecken mit dem sogenannten *Fermat-Torricelli-Punkt* besteht, und die Winkel dazwischen sind alle $120°$ groß. Mit diesem Satz kann man ohne Rechnung allein aus der ersten Überlegung zur Grundstruktur des Streckennetzes die beiden kürzesten bestimmen.

Lösung 4. (a) Eine Möglichkeit ist:



(b) Eine Möglichkeit ist:



(c) Jede der drei Würfelebenen besteht aus 10 kantenparallelen Reihen, daher beträgt die Summe aller Zahlen in einer Würfelebene jeweils 10. Die Summe dieser drei Summen ist 30, darin kommen die Zahlen einiger Würfel mehrfach vor: Der Eckwürfel mit der 2012 liegt in allen drei Würfelebenen. Die anderen Würfel der drei Reihen, die diesen Eckwürfel enthalten, liegen jeweils in zwei der drei Würfelebenen. Da die Summe in jeder Reihe 1 beträgt, ist die Summe dieser Würfel gleich $3 \cdot (-2011) = -6033$. Alle anderen Würfel liegen in höchstens einer Würfelebene. Da $30 - 2 \cdot 2012 - (-6033) = 2039$ gilt, ist die Summe aller Zahlen in den drei Würfelebenen 2039.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Für die hier angegebene Lösung ergibt sich das folgende Quadrat:

2	3	1
3	1	2
1	2	3

Jede der Zahlen 1 bis 3 tritt in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auf. Entsprechend muss für jedes Quadrat für einen solchen $n \times n \times n$-Würfel gelten, dass jede der Zahlen 1 bis n in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auftritt (solche Quadrate werden auch *lateinische Quadrate* genannt): Das bedeutet nichts Anderes, als dass in jeder der Höhen 1 bis n in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal eine 1 steht. Umgekehrt beschreibt jedes lateinische Quadrat einen $n \times n \times n$-Würfel mit Reihensumme 1 und nur den Einträgen 1 und 0: Trägt man für jedes Kästchen eine 1 in der angegebenen Höhe über dem Kästchen ein, so enthält jede vertikale Reihe genau eine 1 (nämlich nur in der angegebenen Höhe) und das gleiche gilt für alle horizontalen Zeilen und Spalten.