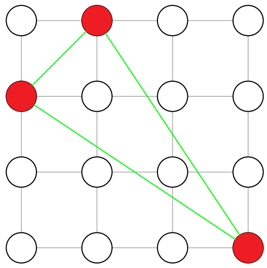
Klassenstufen 9, 10



(Beispiel eines gleichschenkligen Dreiecks aus Gitterpunkten.)

Aufgabe 1 (5+5+10 Punkte)**.** Wir betrachten sechzehn Punkte eines quadratischen Gitters wie oben angeordnet. Drei dieser Punkte bilden hier ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. (Entartete Dreiecke werden hier also nicht betrachtet.)

(a) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten vier Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(b) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten fünf Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(c) Zeige: Wenn man von diesen 16 Punkten neun beliebig auswählt, kann man stets drei unter ihnen finden, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). (a) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten sechs Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(b) Zeige: Wenn immer man sieben dieser 16 Punkte auswählt, bilden drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 2 (4+4+5+7 Punkte)**.** Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ sei $a(n)$ die natürliche Zahl, deren Ziffernfolge aus n Einsen besteht, und $b(n)$ die Zahl, deren Ziffernfolge nacheinander aus einer Eins, $n-1$ Nullen und einer Fünf besteht. (Zum Beispiel ist $a(7) = 1111111$, $b(7) = 10000005$). Weiterhin sei

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1.$$

(a) Beweise, dass für kein n die Zahl $c(n)$ durch 10 teilbar ist.

(b) Zeige, dass $c(1)$, $c(2)$ und $c(3)$ Quadratzahlen sind.

(c) Beschreibe die Ziffernfolge von $c(n)$.

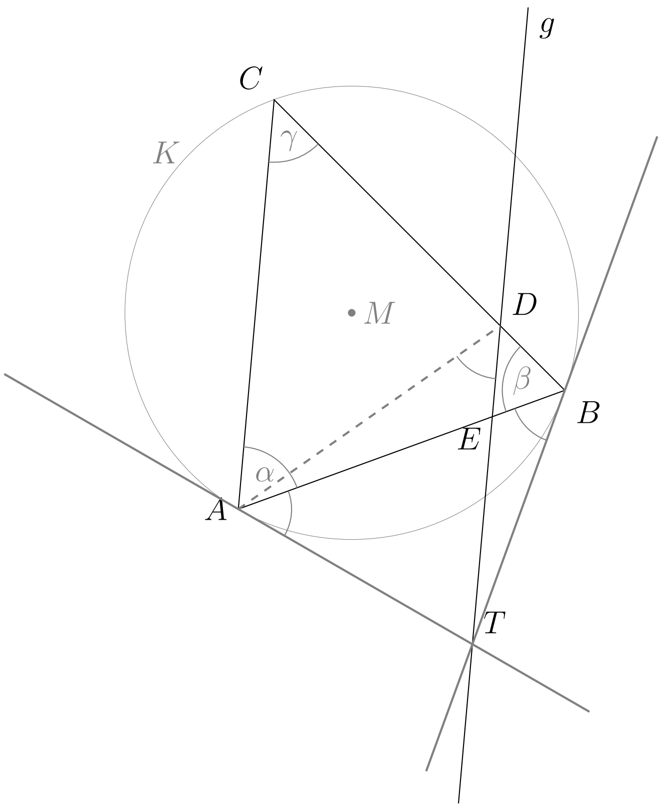
(d) Beweise, dass für alle n die Zahlen $c(n)$ Quadratzahlen sind. (Hinweis: Man kann die 3. Binomische Formel ausnutzen.)

Aufgabe 3 (6+6+8 Punkte)**.** Es seien p und q zwei Primzahlen mit $p > q$. Ersichtlich sind dann die Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ ausgekürzt (das heißt, Zähler und Nenner enthalten keinen gemeinsamen Faktor mehr), und keiner der beiden Zähler und keiner der beiden Nenner lässt sich in zwei Faktoren größer als 1 zerlegen.

(a) Zeige, dass der mit dem Nenner $p \cdot q$ geschriebene Bruch $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ immer noch ausgekürzt ist.

(b) Nun wird ein ausgekürzter Bruch $\frac{r}{s}$ betrachtet, bei dem r und s aber keine Primzahlen seien müssen. Ist es möglich, dass der mit dem Nenner $r \cdot s$ geschriebene Bruch $\frac{r}{s} + \frac{s}{r}$ nun nicht ausgekürzt ist?

(c)
- Zeige, dass der mit dem Nenner $p \cdot q$ geschriebene Bruch $\frac{p}{q} - \frac{q}{p}$ immer ausgekürzt ist.
- Bestimme, für welche Primzahlen $p > q$ der Zähler eine Primzahl ist und für welche nicht.



Aufgabe 4 (6+4+6+4 Punkte)**.** Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC und sein Umkreis K mit dem Mittelpunkt M. Sei T der Schnittpunkt der Tangenten an K in A und in B. Die Gerade g verlaufe parallel zu AC durch T. Seien D und E die Schnittpunkte der Geraden g mit BC bzw. AB.

(a) Zeige, dass $\angle TAB = \angle ABT = \angle ACB$ gilt.

(b) Zeige, dass die Dreiecke ΔEBD und ΔETA ähnlich zu ΔABC sind.

(c) Berechne $\angle ADE$ (in Abhängigkeit von α, β oder γ).

(d) Beweise, dass das Dreieck ΔADC gleichschenklig ist.

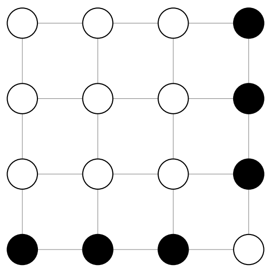
Hinweis: Die Aussagen vorheriger Aufgabenteile dürfen in den jeweiligen Aufgabenteilen benutzt werden.

Es darf angenommen werden, dass M innerhalb des Dreiecks ΔABC liegt.

Lösungen 9, 10

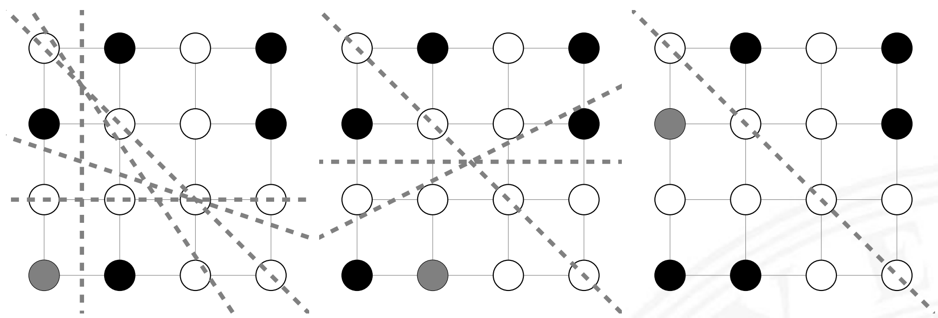
Lösung 1. (a) Beliebige vier der Punkte im nächsten Aufgabenteil haben diese Eigenschaft.

(b) In den folgenden Zeichnungen sind sogar sechs Punkte mit der Eigenschaft markiert:



Dreiecke aus markierten Punkten bestehen hier stets aus zwei Punkten unten und einem rechts oder zwei Punkten rechts und einem unten. In jedem Fall ist die Seitenlänge der Seite entlang der Gitterlinie ganzzahlig (wir können einfach voraussetzen, dass der Gitterabstand die Länge eins hat), während die anderen beiden nicht ganzzahlig und verschieden sind, wie man leicht nachrechnen kann.

Bemerkung: Es ist auch möglich sechs Punkte auszuwählen, ohne dass drei Punkte auf einer Geraden gewählt werden, allerdings ist es dann etwas mühsamer zu überprüfen, dass keine gleichschenkligen Dreiecke vorkommen:



Überprüft man für jedes Paar markierter Punkte, dass auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke kein weiterer markierter Punkt liegt, so stellt man fest, dass es keine gleichschenkligen Dreiecke aus markierten Punkten gibt. Auf Grund der Symmetrie gibt es nur drei *Klassen* von Punkten, die man überprüfen muss. Eine Klasse besteht dabei jeweils aus den Punkten besteht, die durch Spiegelung an der Diagonalen von links-oben nach rechts-unten ineinander übergehen. In den drei Zeichnungen sind jeweils für einen Vertreter einer Klasse (grauer Punkt) die Mittelsenkrechten eingezeichnet, wobei Kombinationen mit schon vorher behandelten Klassen nicht noch einmal überprüft werden müssen.

(c) Teilt man die 4×4 Punkte in viermal 2×2 Punkte auf, so müssen von den neun ausgewählten Punkten in mindestens einem 2×2-Block drei Punkte ausgewählt sein (Argumente dieser Art sind als *Schubfachprinzip* bekannt). Diese bilden immer ein gleichseitiges Dreieck, wobei die doppelte Seitenlänge genau der Gitterabstand ist.

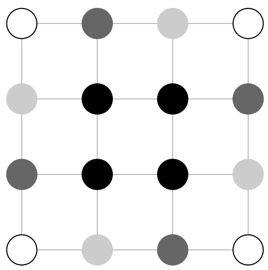
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). (a) Eine Auswahl mit sechs Punkten wurde bereits oben angegeben.

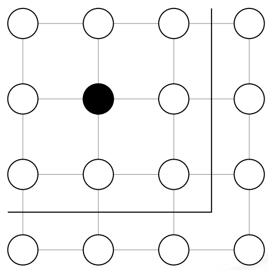
(b) Zuerst verallgemeinern wir die Beobachtung aus dem vorigen Aufgabenteil.

Von vier Punkten im Gitter, die die Eckpunkte eine Quadrates bilden, können maximal zwei Punkte ausgewählt werden, da jeweils drei Eckpunkte eines Quadrats die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Angenommen man kann sieben Punkte aus den 16 Punkten des Gitters so auswählen, dass diese nicht die Ecken eines gleichseitigen Dreieck enthalten. Im Folgenden werden wir diese Annahme zum Widerspruch führen.

Zuerst zerlegen wir die 16 Punkte des Gitters in die Eckpunkte von vier Quadraten (siehe Punkte mit dem selben Grauton in der linken Abbildung).



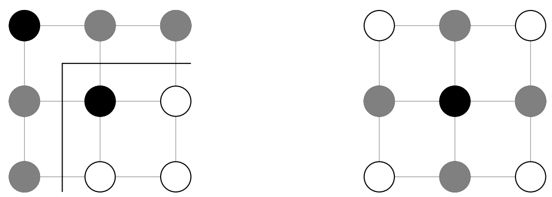


Da wegen der Beobachtung die sieben Punkte nicht auf die Ecken von drei Quadraten aufgeteilt werden können (dann würde eines dieser drei Quadrate nämlich drei Punkte erhalten), muss jedes Quadrat mindestens einen der sieben gewählten Punkte enthalten. Insbesondere muss einer der vier mittleren Punkte (schwarz im linken Bild oben) gewählt worden sein. Jeder dieser vier mittleren Punkte ist der Mittelpunkt eines der 3×3 Eckpunkte eines quadratischen Gitters, welches in dem Originalgitter enthalten ist. Wir zerlegen 16 Eckpunkte des Originalgitters in diese 9 Eckpunkte und den Rest (ein

Winkelstück bestehend aus sieben Punkten). Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Gitters können wir einfach annehmen, dass wir das rechte Bild in der Abbildung oben erhalten.

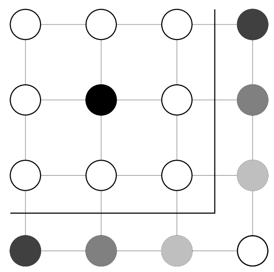
Im Folgenden werden wir zeigen, dass aus den 9 quadratisch angeordneten Eckpunkten noch maximal zwei weitere ausgewählt werden können und dass aus dem Winkelstück nur drei Punkte ausgewählt werden können, ohne dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Somit können insgesamt nur sechs Punkte ausgewählt werden, was aber der oben gemachten Annahme widerspricht.

Wir beginnen mit den 9 Punkten. Falls neben dem Mittelpunkt noch einer der äußeren vier Eckpunkte ausgewählt wurde, dann kann kein weiterer Punkt aus den Schenkeln des Winkels mit diesem Eckpunkt ausgewählt werden (siehe graue Punkte im linken Bild unten). Die restlichen vier Punkte sind wieder die Ecken eines Quadrats und da sie den ausgewählten Mittelpunkt enthalten, kann darin höchstens noch ein weiterer Punkt ausgewählt werden, was insgesamt höchstens 3 ausgewählte Punkte ergibt.



Wir können also annehmen, dass keiner der äußeren vier Eckpunkte ausgewählt wurde. Die restlichen vier Punkte (siehe graue Punkte im rechten Bild) bilden wieder ein Quadrat und deswegen können von diesen höchstens zwei ausgewählt werden, was zusammen mit dem Mittelpunkt maximal drei ausgewählte Punkte ergibt.

Als nächstes betrachten wir die sieben Punkte des Winkelstücks. Das Winkelstück ist spiegelsymmetrich zu der Diagonalen, welche den bereis gewählten zentralen Punkt enthält. Deswegen kann von je zwei spiegelsymmetrisch liegenden Punkten des Winkels höchstens ein Punkt ausgewählt sein (siehe Punkte mit dem selben Grauton im nächsten Bild). Falls also der Eckpunkt ganz rechts-unten (weisser Punkt auf dem Winkelstück) nicht ausgewählt wurde, dann können von dem Winkel höchstens drei Punkte ausgewählt worden sein (höchstens einer von jedem Grauton) und wir sind unter der Annahme fertig, dass der weiße Eckpunkt nicht ausgewählt wurde.



Falls aber der Eckpunkt ausgewählt wurde, dann kann keiner der beiden mittelgrauen Punkte mehr gewählt werden. Es kann also nur noch je ein dunkelgrauer und ein hellgrauer Punkt ausgewählt werden. Somit können auch in diesem Fall höchstens drei Punkte des Winkelstücks ausgewählt werden, was die Argumentation in dem Fall abschließt, dass der weiße Eckpunkt ausgewählt wurde.

Lösung 2. (a) Da die letzte Ziffer von $c(n)$ nur jeweils von der letzten Ziffer von $a(n)$ und $b(n)$ abhängt und diese jeweils konstant ist, ist auch die letzte Ziffer von $c(n)$ stets 6, die Zahl also nicht durch 10 teilbar.

(b) $c(1) = a(1) \cdot b(1) + 1 = 1 \cdot 15 + 1 = 16 = 4^2$, $c(2) = 11 \cdot 105 + 1 = 1156 = 34^2$ und $c(3) = 111 \cdot 1005 + 1 = 111556 = 334^2$ sind alle Quadratzahlen.

(c) $c(n)$ besteht immer aus n Einsen, $n-1$ Fünfen und einer Sechs (in der Reihenfolge). Dass $a(n) \cdot b(n)$ immer aus n Einsen und n Fünfen besteht, kann man direkt an der schriftlichen Multiplikation ablesen (wobei die Punkte jeweils für $n-4$ gleiche Ziffern stehen):

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5
\end{array}$$

(d) Die Zahl $b(n)$ hat $n+1$ Stellen und die Ziffernfolge von $b(n)-6$ besteht aus n Neunen. Aus dieser Beobachtung erhalten wir die Identität

$$b(n) = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ Stellen}} + 6 = 9a(n) + 6\,.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
a(n) \cdot b(n) &= a(n) \cdot \big(9a(n) + 6\big) \\
&= 3a(n) \cdot (3a(n) + 2) \\
&= \big((3a(n) + 1) - 1\big) \cdot \big((3a(n) + 1) + 1\big) \\
&= (3a(n) + 1)^2 - 1\,,
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Identität die dritte binomische Formel genutzt wurde. Folglich ist

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1 = (3a(n) + 1)^2$$

eine Quadratzahl.

Alternativ kann man auch mit der 1. Binomischen Formel nach der ersten Zeile der Rechnung sofort sehen, dass

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1 = 9a(n)^2 + 6a(n) + 1 = (3a(n) + 1)^2.$$

Bemerkung: Alternativ kann man auch direkt ausrechnen: Es bestehe $q(n)$ aus n Dreien und einer Vier. Man berechnet $q(n)^2 =$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 4 & \cdot & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 6 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & 5 & 6
\end{array}$$

und stellt fest, dass dies gerade $c(n)$ ist.

Lösung 3. (a) Mit Nenner pq lautet der Bruch

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

Angenommen p^2+q^2 ließe sich durch p teilen. Da p^2 durch p teilbar ist, müsste dann auch q^2 durch p teilbar sein, was aber für verschiedene Primzahlen p und q unmöglich ist. (Mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müsste dann nämlich schon q durch p teilbar sein, was auf Grund der Unzerlegbarkeit von q nicht möglich ist.) Dass sich $p^2 + q^2$ nicht durch q teilen lässt, folgt analog.

(b) Ist $\mathrm{ggT}(rs, r^2 + s^2) > 1$, so gibt es eine Primzahl z, die sowohl Teiler von rs, als auch Teiler von $r^2 + s^2$ ist. Ohne Einschränkung sei z Teiler von r. Da $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ ist, ist z kein Teiler von s, also auch kein Teiler von s^2. z kann also auch kein Teiler von $r^2 + s^2$ sein, da z Teiler von r^2 ist. Da also für teilerfremde r und s stets $\mathrm{ggT}(rs, r^2 + s^2) = 1$ gilt, ist $\frac{r^2+s^2}{rs}$ also auch immer ausgekürzt.

(c)
- Ersetzt man in der obigen Argumentation $+$ durch $-$, erhält man auch, dass $p^2 - q^2$ keinen gemeinsamen Teiler mit pq hat.
- $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ kann als Produkt nur eine Primzahl sein, wenn ein Faktor 1 ist, was nur für $p - q$ zutreffen kann. Für Primzahlen $p > q$ ist $p - q = 1$ nur für $p = 3$ und $q = 2$ erfüllt, in allen anderen Fällen ist $p^2 - q^2$ also sicher keine Primzahl. Für $p = 3$ und $q = 2$ berechnet man, dass $p^2 - q^2 = 5$ eine Primzahl ist.

  Bemerkung: Man kann sich dieselbe Frage auch für $p^2 + q^2$ stellen: Für $q > 2$ sind p und q beide ungerade, $p^2 + q^2$ also gerade und größer 2 und somit keine Primzahl. Für $q = 2$ sind zum Beispiel $2^2 + 3^2 = 13$ und $2^2 + 5^2 = 29$ Primzahlen, $2^2 + 11^2 = 125$ und $2^2 + 19^2 = 365$ aber nicht.

Lösung 4. (a) Die Dreiecke ΔAMB, ΔBMC und ΔCMA sind gleichschenklich, da jeweils zwei Seiten Radien des Kreises K sind. Mit $\angle ACB = \gamma$ ist also

$$\angle CBM + \angle MAC = \angle MCB + \angle ACM = \gamma.$$

Wegen $\angle BAM = \angle MBA$ ist im Dreieck ΔABC die Innenwinkelsumme $180° = 2\gamma + 2\angle BAM$, also gilt

$$\angle BAM = 90° - \gamma.$$

Da der Winkel zwischen Radius und Tangente liegt, ist $\angle TAM = 90°$. Folglich ist

$$\angle TAB = \gamma.$$

Analog ist wegen $\angle MBA = 90° - \gamma$ auch

$$\angle ABT = \gamma.$$

(b) Da g parallel zu AC verläuft, ist ΔEBD ähnlich zu ΔABC. Wie im vorherigen Teil gezeigt, ist $\angle TAB = \angle ACB$, da außerdem $\angle AET = \angle BED$, sind auch ΔETA und ΔEBD ähnlich.

(c) Auf Grund der gerade festgestellten Ähnlichkeit ist

$$\frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|AE|}{|TE|},$$

was zusammen mit $\angle TEB = \angle DEA$ bedeutet, dass ΔTBE und ΔAED ebenfalls ähnlich sind. Mit nochmaliger Verwendung vom ersten Aufgabenteil erhält man also

$$\angle ADE = \angle EBT = \angle ABT = \gamma.$$

(d) Da g und AC parallel verlaufen, ist

$$\angle DAC = \angle ADE = \gamma.$$

Das Dreieck ΔADC hat also gleiche Winkel bei A und C und ist somit gleichschenklig.