Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (3+7+10 Punkte)**.** Gegeben seien die Zahlenfolgen:

n	n-te Zahlenfolge
1	1
2	1, 2, 2, 3
3	1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5
4	1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7

(a) Gib die Zahlenfolge für $n = 5$ an.

(b)
- Wie viele Zahlen hat die Folge für $n = 6$?
- Finde einen Term für die Anzahl $A(n)$ der Zahlen der n-ten Zahlenfolge.

(c)
- Berechne den Mittelwert und die Summe der Zahlen der Folge für $n = 6$.
- Finde je einen Term für den Mittelwert $M(n)$ und die Summe $S(n)$ der Zahlen der n-ten Zahlenfolge.

(Alles natürlich mit Begründung.)

Aufgabe 2 (4+5+5+6 Punkte)**.** Hinz und Kunz gehen über den Hamburger Dom. Beide spielen gerne an Würfelbuden. In den beiden Buden Primz und Unz wird jeweils mit zwei Würfeln (jeweils mit den Zahlen 1 bis 6) gespielt.

Bei Primz gewinnt man, wenn die Augensumme der beiden geworfenen Würfel eine Primzahl ist. Bei Unz gewinnt man, wenn die Augensumme eine ungerade Zahl ist.

(a) Begründe, dass es sowohl bei Primz wie bei Unz fünf günstige Ausgänge (Augensummen) gibt. Gib diese jeweils an.

(b) Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Unz.

(c) Hinz behauptet, dass die Gewinnchance bei Primz genauso groß ist wie bei Unz. Hat er Recht? (Begründe.)

(d) Kunz würfelt bei Primz. Nachdem er den ersten Würfel gesehen hat, sagt er: „Juhu, wie gut, dass ich mich für Primz entschieden habe.“ Offensichtlich hat er eine Zahl gesehen, mit der seine Gewinnchance bei Unz kleiner wäre. Welche Zahl hat er gesehen?

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Bei der Post kann man Paket-Sets in vier Größen kaufen:

Größe 1: 250 mm × 175 mm × 100 mm

Größe 2: 350 mm × 250 mm × 120 mm

Größe 3: 400 mm × 250 mm × 150 mm

Größe 4: 500 mm × 300 mm × 200 mm

Es sollen Gegenstände in diese Pakete eingepackt werden, wobei jede Seite des einzupackenden Gegenstands parallel zu einer Seite des Pakets sein soll.

(a) Gib an, wie viele Pakete der Größe 1 in die Pakete der Größe 2, 3 bzw. 4 hineinpassen. Begründe.

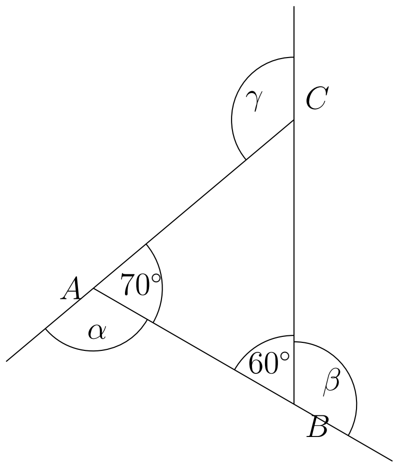
(b) Karla will Maya Karl-May-Bände einer bestimmten Auflage schicken und zwar mindestens drei Stück. Jedes Buch hat die Maße 12 cm × 20 cm × 4 cm.

- Welche Paketgröße muss sie mindestens nehmen?
- Gib an, wie viele Bücher dann höchstens in diese Paketgröße passen und beschreibe wie du die Bücher anordnest.

Aufgabe 4 (5+5+5+5 Punkte)**.** (a) Zwei Innenwinkel eines Dreiecks sind in der Zeichnung rechts angegeben.

Berechne die Außenwinkel α, β und γ und die Summe

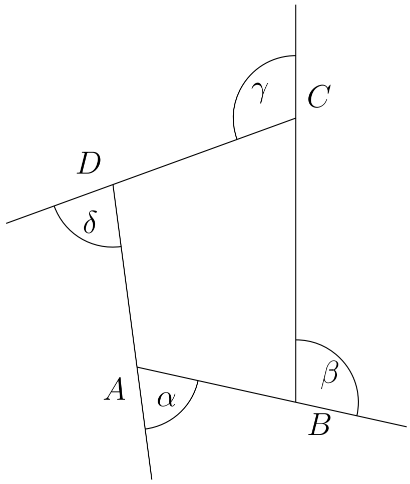
$$\alpha + \beta + \gamma.$$



(b) Berechne die Summe der Außenwinkel eines (beliebigen) konvexen Vierecks (ein Beispiel ist in der Abbildung rechts).

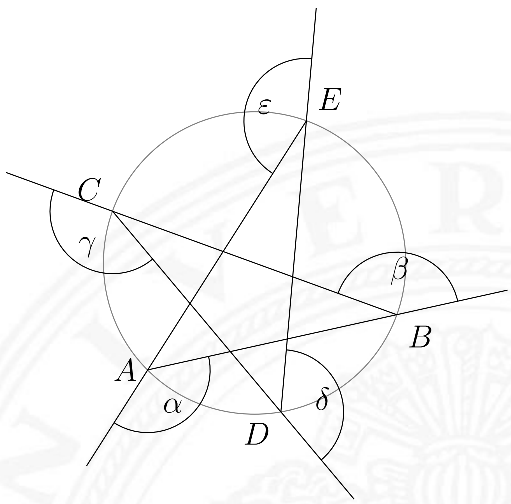
(c) Berechne die Summe der Außenwinkel eines konvexen Fünfecks.

Hinweis: Statt des Vier- und Fünfecks kannst du natürlich auch gleich das n-Eck betrachten.



(d) Nun werden Überschneidungen der Seiten der Polygone zugelassen, aber dafür sollen alle Ecken auf einem Kreis liegen, wie in dem rechts abgebildeten Fünfeck.

Berechne die Summe der Außenwinkel in dem rechts skizzierten Fünfeck. (Hinweis: Messen ist kein Beweis.)



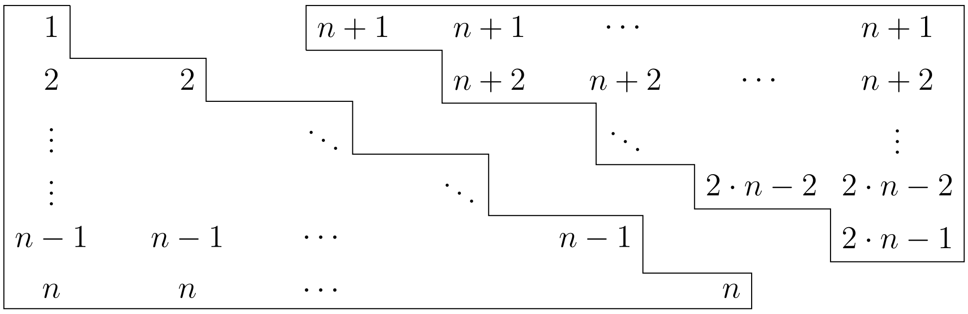
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Überlege, wie man im allgemeinen Fall eines in einem Kreis einbeschriebenen n-Ecks mit Überschneidungen die Außenwinkel definieren könnte. Stelle Vermutungen über die Außenwinkelsumme auf.

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Für $n = 5$ lautet die Folge

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.$$

(b) Schreibt man von 1 bis n jeweils die wiederholten Zahlen in eine Reihe, aber jede neue Zahl in eine neue Zeile, erhält man ein Dreieck der Höhe n (n Zahlen von 1 bis n) und der Breite n (n-mal die Zahl n). Auch die Zahlen von $n+1$ bis $2 \cdot n - 1$ ergeben auf diese Weise ein Dreieck mit Höhe $n-1$ ($n-1$ Zahlen von $n+1$ bis $2 \cdot n - 1$) und Breite $n-1$ ($n-1$-mal die Zahl $n+1$):



Diese beiden Dreiecke kann man zu einem vollständigen $n \times n$-Quadrat zusammenfügen. Beispielhaft für $n = 2$ bis $n = 5$:

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 9 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline\end{array}$$

Somit besteht die n-te Zahlenfolge aus n^2 Zahlen.

Für $n = 6$ sind es also 36 Zahlen und allgemein ist die Anzahl der Zahlen der n-ten Zahlenfolge

$$A(n) = n^2.$$

Alternativ kann man die Zahlen auch entlang von Diagonalen eines $n \times n$-Quadrats anordnen:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\
2 & \ddots & n-1 & n & n+1 \\
\vdots & n-1 & n & n+1 & \vdots \\
n-1 & n & n+1 & \ddots & 2\cdot n-2 \\
n & n+1 & \cdots & 2\cdot n-2 & 2\cdot n-1
\end{array}$$

$\boxed{n-1 \text{ Zahlen}}$ $\boxed{n \text{ Zahlen}}$ $\boxed{n-1 \text{ Zahlen}}$

Zum Beispiel für $n = 5$ erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9
\end{array}$$

(c) Der Mittelwert der einmal vorkommenden Zahlen 1 und 11 beträgt 6, der der zweimal vorkommenden Zahlen 2 und 10 ebenfalls usw. Somit ist auch insgesamt der Mittelwert $M(6) = 6$. Da $A(6) = 36$ ist, beträgt die Summe

$$S(6) = A(6) \cdot M(6) = 36 \cdot 6 = 216\,.$$

Allgemein ist der Mittelwert einer Zahl der Folge und der entsprechenden Zahl vom Ende der Folge immer n, da von den Zahlen n aus gesehen nach links immer so viele um 1 kleinere Zahlen stehen wie nach rechts um 1 größere. Der Mittelwert der n-ten Zahlenfolge beträgt also

$$M(n) = n.$$

Damit errechnet man auch gleich die Summen der n-ten Zahlenfolge

$$S(n) = A(n) \cdot M(n) = n^2 \cdot n = n^3.$$

Lösung 2. (a) Bei Primz sind die günstigen Augensummen 2, 3, 5, 7 und 11, während sie bei Unz 3, 5, 7, 9 und 11 sind.

(b) Steht das Ergebnis des ersten Würfels fest, führt entweder jede ungerade oder jede gerade Zahl auf dem zweiten Würfel zu einer ungeraden Augensumme. In beiden Fällen ist die Chance also $\frac{1}{2}$, weshalb sie auch insgesamt $\frac{1}{2}$ ist.

(c) Neben den gemeinsamen günstigen Ausgängen, gibt es bei Primz die Augensumme 2, während es bei Unz die Augensumme 9 gibt. Da es jedoch nur eine

Möglichkeit für die 2 gibt, nämlich $1 + 1$, aber vier Möglichkeiten für die 9, nämlich $3+6$, $4+5$, $5+4$ und $6+3$, ist die Gewinnchance bei Primz kleiner als bei Unz.

(d) Da alle weiteren günstigen Augensummen bei Primz und Unz dieselben sind, kann die Gewinnchance bei Primz nur größer als die bei Unz sein, wenn 2 noch als Augensumme möglich ist, 9 aber nicht mehr. Dies ist nur genau dann möglich, wenn der erste Würfel eine 1 anzeigt.

Bei Primz sind dann noch die günstigen Augensummen $1 + 1$, $1 + 2$, $1 + 4$ und $1 + 6$ möglich, während bei Unz nur $1 + 2$, $1 + 4$ und $1 + 6$ als günstige Augensummen möglich sind.

Lösung 3. (a) Da $2 \cdot 175 = 350$ ist, kann man die 175 mm-Seite von Größe 1 zweimal an die 350 mm-Seite von Größe 2 anlegen und die 250 mm-Seiten aneinander legen. Schon vom Volumen passt kein drittes Paket der Größe 1 in die verbleibenden 350 mm × 250 mm × 20 mm.

Die 175 mm-Seite von Größe 1 passt nur an die 250 mm- oder an die 400 mm-Seite von Größe 3. Legte man es an die 250 mm-Seite, blieben 75 mm übrig, die man für keine Seite mehr nutzen könnte; die 250 mm-Seite von Größe 1 müsste dann an die 400 mm-Seite von Größe 3, weder die verbleibenden 150 mm × 250 mm × 150 mm, noch die an der anderen Seite verbleibenden 400 mm × 250 mm × 50 mm reichen für ein weiteres Paket der Größe 1 aus. Da man so also nur ein Paket unterbringen kann, kann man annehmen, dass die 175 mm-Seite von Größe 1 an der 400 mm-Seite von Größe 3 liegt, die 250 mm-Seiten aneinander und die 100 mm-Seite an der 150 mm-Seite. Die 50 mm an der 150 mm-Seite kann man nicht mehr für eine Seite der Größe 1 nutzen. In die verbleibenden 225 mm × 250 mm × 150 mm passt mit der gleichen Überlegung nur noch ein weiteres Paket der Größe 1. Obwohl vom Volumen her drei Pakete der Größe 1 in eins der Größe 3 passen würden, kann man also mit parallelen Seiten nur zwei hineinpacken.

Die 250 mm-Seite von Größe 1 passt zweimal an die 500 mm-Seite von Größe 4, die 100 mm-Seite dreimal an die 300 mm-Seite. In die verbleibenden 500 mm×300 mm×25 mm passt schon vom Volumen her kein weiteres Paket der Größe 1 mehr, da

$$\frac{250\text{ mm}}{500\text{ mm}} \cdot \frac{100\text{ mm}}{300\text{ mm}} \cdot \frac{175\text{ mm}}{25\text{ mm}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{7}{6} > 1.$$

Also passen höchstens 6 Pakete der Größe 1 in ein Paket der Größe 4.

(b)
- Legt man die Bücher parallel zu den Seiten in ein Paket der Größe 1, so passt die 200 mm-Seite nur an die 250 mm-Seite, die 120 mm-Seite von

den verbliebenen nur an die 175 mm-Seite, weshalb die 40 mm-Seite an der 100 mm-Seite liegen muss. So kann man aber nur zwei Bücher unterbringen (obwohl vom Volumen her vier passen würden). Es muss also mindestens Größe 2 für drei Bücher verwendet werden, was auch passt, wie im nächsten Teil gezeigt wird.

- Da jede Seite eines Buches ein ganzzahliges Vielfaches von 40 mm lang ist, kann unabhängig von der Anordnung der Bücher an jeder Stelle entlang der 350 mm-Seite des Pakets höchstens 320 mm und an jeder Stelle entlang der 250 mm-Seite des Pakets höchtens 240 mm genutzt sein. Insgesamt kann also höchstens 320 mm × 240 mm × 120 mm des Pakets benutzt sein. Man erhält als Verhältnis des höchstens genutzten Volumens des Pakets zum Volumen eines Buchs

  $$\frac{320\text{ mm}}{40\text{ mm}} \cdot \frac{240\text{ mm}}{200\text{ mm}} \cdot \frac{120\text{ mm}}{120\text{ mm}} = 8 \cdot \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{48}{5} < 10,$$

  weshalb höchstens neun Bücher in ein Paket der Größe 2 passen können. Dass neun Bücher wirklich passen, wird nun gezeigt.

  Legt man acht Bücher mit ihren größten Seiten aneinander, benötigt man 120 mm × 200 mm × 320 mm. Vom Paket bleibt dann noch ein Raum von 350 mm × 50 mm × 120 mm. Dort hinein passt ein weiteres Buch hochkant neben dem Stapel.

Lösung 4. (a) Als Nebenwinkel zu 70° ist $\alpha = 180° - 70° = 110°$, entsprechend ist $\beta = 180° - 60° = 120°$. Wenn γ' den Nebenwinkel zu γ bezeichnet, ergibt sich über die Innenwinkelsumme im Dreieck $\gamma' = 180° - 70° - 60° = 50°$. Damit ist dann $\gamma = 180° - \gamma' = 130°$. Als Summe der Außenwinkel erhält man

$$\alpha + \beta + \gamma = 110° + 120° + 130° = 360°.$$

(b) Es sei $\alpha' = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel zu α usw. Damit gilt dann für die Innenwinkelsumme im Viereck

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta &= (180° - \alpha') + (180° - \beta') + (180° - \gamma') + (180° - \delta')\\ &= 4 \cdot 180° - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')\\ &= 4 \cdot 180° - 360° = 360°.\end{aligned}$$

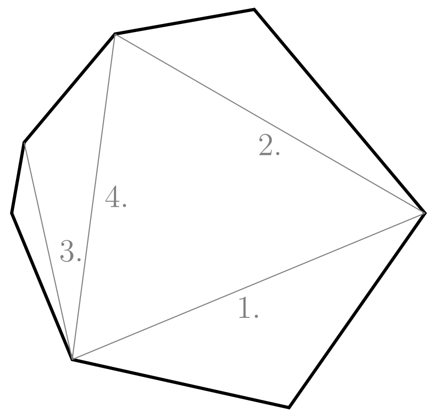
(c) Die Innenwinkelsumme im Fünfeck beträgt $(5-2)\cdot 180° = 540°$. Mit analoger Rechnung zum vorherigen Aufgabenteil erhält man für die Außenwinkelsumme

$$5 \cdot 180° - (5-2) \cdot 180° = 900° - 540° = 360°.$$

Analog erhält man für jedes n-Eck die Außenwinkelsumme

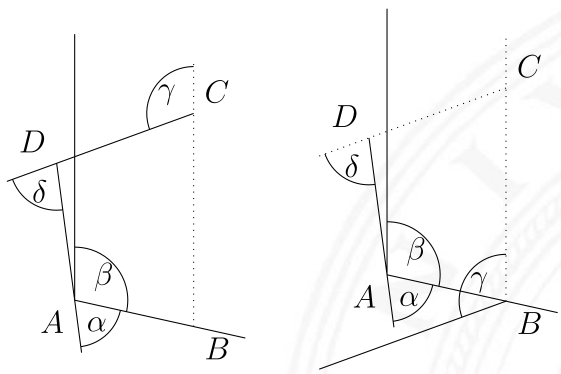
$$n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°.$$

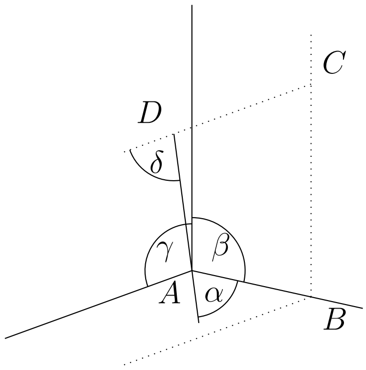
Bemerkung: Die Formel $(n-2) \cdot 180°$ für die Innenwinkelsumme im n-Eck erhält man (zumindest für konvexe n-Ecke), indem man das n-Eck durch das Einzeichnen von Diagonalen, die jeweils eine Ecke abtrennen, immer weiter in Dreiecke zerlegt. Führt man dies genau $n-3$-mal durch, ist vom n-Eck noch ein Dreieck übrig, so dass man insgesamt $n-2$ Dreiecke mit Innenwinkelsumme von jeweils 180° hat. Zusammen sind die Innenwinkel der Dreiecke die Innenwinkel des n-Ecks.

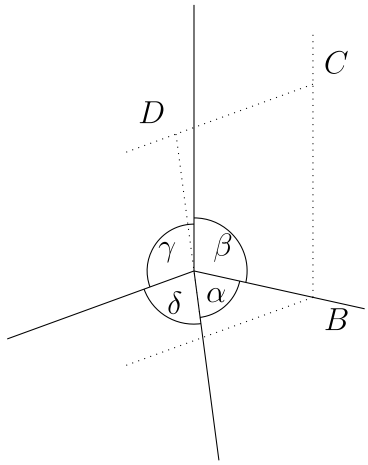


Bemerkung: Man kann auch ohne Verwendung der Innenwinkelsumme im n-Eck zeigen, dass die Außenwinkelsumme stets 360° beträgt. Dazu verschiebt man alle Außenwinkel parallel so, dass sie einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben. Zusammen bilden sie dann einen Vollwinkel. Wie wir im Folgenden zeigen werden, ergibt sich dadurch ein Winkel, der ein Vielfaches von 360° ist.

In den nachfolgenden Zeichnungen werden die Außenwinkel im Beispiel eines Vierecks nacheinander an den Punkt A geschoben. Zunächst wird β entlang AB an A verschoben. Danach wird γ entlang BC und danach entlang AB an A verschoben.





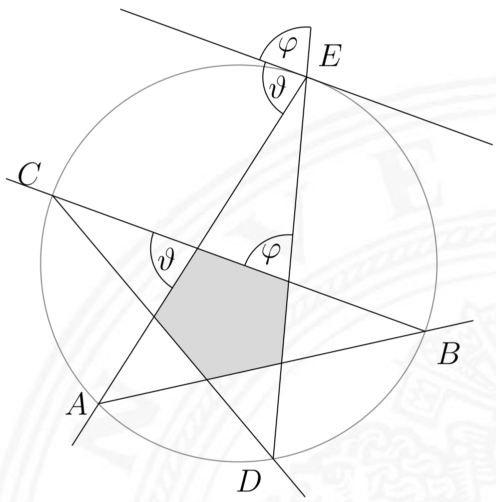


Zuletzt wird noch δ verschoben, wobei man sehen kann, dass es keinen Unterschied macht, ob man nacheinander entlang CD, BC und AB oder direkt entlang AD verschiebt. Also ergibt sich ein Vollwinkel, 360°. Bei einem allgemeinen n-Eck kann man genauso vorgehen, aber wir haben eigentlich nur gezeigt, dass sich ein Vielfaches von 360° ergibt, dass man genau einmal herum kommt, bedarf einer genaueren Überlegung.

(d) Wenn man die Winkel wie in der Bemerkung im vorangegangenen Lösungsteil aneinanderschiebt, müssen sie sich zu einem Vielfachen des Vollwinkels ergänzen. Es ist allerdings nicht ganz klar, um welches Vielfaches es sich handelt. Mit der folgenden Überlegung erhält man, dass die Außenwinkelsumme $2 \cdot 360° = 720°$ beträgt:

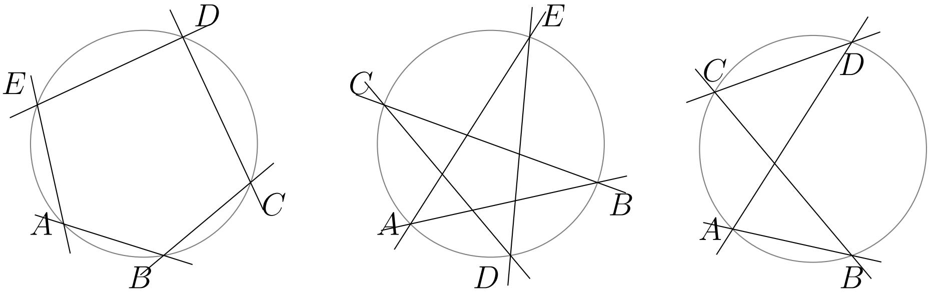
Die inneren Schnittpunkte der Seiten des überschlagenen Fünfecks bilden ein konvexes Fünfeck (grau in der Abbildung).

Zwei Außenwinkel zu benachbarten Ecken des konvexen Fünfecks (φ und ϑ im Beispiel) liegen in einem Dreieck mit einem Eckpunkt (E) des überschlagenen Fünfecks. Als Stufenwinkel an der Parallelen ihrer gemeinsamen Seite (Teil von BC) im konvexen Fünfeck durch den Eckpunkt des überschlagenen Fünfecks (E), ergänzen sie sich zum Außenwinkel ($\varepsilon = \varphi + \vartheta$) an der Ecke ($E$) des überschlagenen Fünfecks.



Durchläuft man einmal das überschlagene Fünfeck und zählt dabei alle Außenwinkel zusammen, erhält man dabei also die gleiche Summe, als wenn man das innere, konvexe Fünfeck zweimal durchläuft und dabei jeweils an einer Ecke den Außenwinkel addiert.

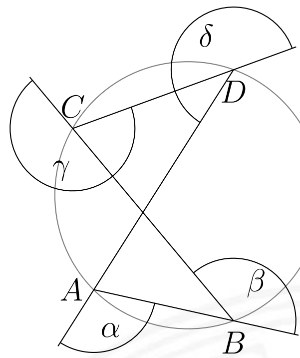
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Die Schwierigkeit einer sinnvollen Definition von Außenwinkeln wird deutlich, wenn man neben den Polygonen ohne Überschneidungen (links in der folgenden Abbildung), dem „Stern“ aus dem vorherigen Aufgabenteil (Mitte) noch ein Viereck mit Überschneidung betrachtet:



Beim überschlagenden Viereck ist nicht klar, was überhaupt das „Innere“ und das „Äußere“ des Vierecks ist. Zumindest lässt sich das nur so festlegen, dass sich beim Durchlaufen des Polygonzuges abwechselt, ob das „Innere“ rechts oder links liegt.

Trotz dieser Problematik wollen wir *Außenwinkel entlang des Polygonzuges* definieren. Wir müssen eine Wahl der Richtung des Polygonzuges treffen, von der dann auch abhängt, welches die Außenwinkel sind:

Entlang des Streckenzuges sei der Außenwinkel an einem Eckpunkt immer der Winkel von der Verlängerung der vorherigen Seite gegen den Uhrzeigersinn zur nachfolgenden Seite (wie in der Beispielabbildung rechts).



Für die Ermittlung der Außenwinkelsumme hat diese Definition den Vorteil, dass man die oben in den Bemerkungen geschilderte Strategie, aufeinanderfolgende Winkel aneinander zu schieben, hier ebenfalls anwenden kann. Dadurch, dass der Winkel immer gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird, addieren sich die Außenwinkel zu Vielfachen des Vollwinkels.

Um zu ermitteln, wie viele Vollwinkel die Summe der Außenwinkel einnimmt, beginnt man bei einem Punkt (im Beispiel A) und ermittelt gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises jeweils, welches der nächste Punkt entlang des Streckenzuges ist (im Beispiel zunächst B, dann C und zuletzt D). Jedes mal, wenn man dabei A überschreitet, wird ein Vollwinkel vervollständigt (im Beispiel überschreitet man A, wenn man im Uhrzeigersinn entlang des Kreises von C zu D geht).

Wie schon in der Bemerkung oben müssen noch weitere Überlegungen angestellt werden, weshalb das Zählen der Vollwinkel so funktioniert.

Hinweis zur Definition: Mit anderen, vielleicht sogar sinnvolleren, Definitionen von Außenwinkel erhält man andere Außenwinkelsummen.