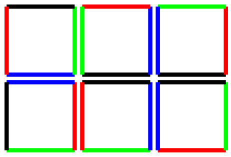
Oberstufe (11, 12, 13)



Aufgabe 1 (4+4+4+8 Punkte)**.** Ein Rechteck der Breite m und der Höhe n bestehe aus $m \cdot n$ quadratischen Kästchen der Seitenlänge 1. Die Seiten der Kästchen sollen mit den Farben Rot, Grün, Blau und Schwarz so eingefärbt sein, dass

- jedes Kästchen vier verschiedenfarbige Seiten hat und
- aneinanderliegende Seiten jeweils dieselbe Farbe haben.

Es wird nun untersucht, wann es möglich ist, dass die vier äußeren Kanten des $m \times n$-Rechtecks jeweils eine durchgängige Farbe haben und keine zwei der äußeren Kanten gleichfarbig sind.

(a) Zeige, dass es für $m = 2$ und $n = 2$ möglich ist.

(b) Zeige, dass es für $m = 3$ und $n = 3$ möglich ist.

(c) Zeige, dass es für $m = 3$ und $n = 2$ nicht möglich ist.

(d) Zeige, dass es für ein Paar (m, n) genau dann möglich ist, wenn $m + n$ gerade ist.

Aufgabe 2 (20 Punkte)**.** Bestimme alle Lösungen von

$$(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x.$$

(Hinweis: Es muss natürlich auch gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungen gibt.)

Aufgabe 3 (7+7+6 Punkte)**.** Rechtecke sollen so ohne Überlappung in ein Quadrat gelegt werden, dass die Rechteckseiten parallel zu den Quadratseiten sind.

(a) Gib jeweils die kleinste Seitenlänge für ein Quadrat an,

- in das man vier 2×9-Rechtecke bzw.
- in das man vier 3×5-Rechtecke

hineinlegen kann. (Begründe.)

(b) Ermittle in Abhängigkeit von a und b die kleinste Seitenlänge für ein Quadrat, in dass man vier $a \times b$-Rechtecke hineinlegen kann.

(c) Beweise mit den bisherigen Ergebnissen die folgende Ungleichung, welche die einfachste Variante der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Aufgabe 4 (5+5+5+5 Punkte)**.** In Sigmars Hotel gibt es fünf Zimmer, die alle belegt sind: Herr Eins wohnt in Zimmer 1, Herr Zwei in Zimmer 2, ..., Herr Fünf in Zimmer 5. Sigmar kann leider nicht richtig mit dem Computer umgehen und erzeugt eine fehlerhafte Gästeliste: Darin sind zwar alle fünf Herren für verschiedene Zimmer eingetragen, aber nicht unbedingt richtig zugeordnet. Anstatt die Liste erneut zu bearbeiten, zieht Sigmar es vor, lieber die Gäste so umziehen zu lassen, dass die Liste stimmt. Während des Abendessens am Anreisetag heftet Sigmar an die entsprechenden Zimmertüren ein Schild, auf dem er den jeweiligen Bewohner bittet, nach dem Abendessen in das angegebene Zimmer umzuziehen. Hierbei kann es auch vorkommen, dass an einigen Zimmertüren gar kein Zettel heftet und der entsprechende Gast in dem Zimmer bleibt.

Leider vergisst er, die Schilder abzunehmen. Die Gäste befolgen daher nach jedem Abendessen die Anweisung an der Tür des Zimmers, das sie an dem Tag bewohnt haben.

(a) Angenommen, in der zweiten Nacht ist die Verteilung der Gäste wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	2	1	4	3	5

Gib die Gästeliste von Sigmar an, falls an der Tür von Zimmer 1 steht: „Bitte ziehen Sie nach dem Abendessen in Zimmer 4 um.“

(b) Schlafen unter derselben Annahme wie im vorherigen Aufgabenteil alle Gäste irgendwann gleichzeitig in ihren ursprünglichen Zimmern (also Herr Eins in Zimmer 1 usw.)? Wenn ja, in welcher Nacht passiert das zum ersten Mal?

(c) Angenommen, in der zweiten Nacht ist die Verteilung der Gäste wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	2	3	4	5	1

Gib an, wie Sigmars Gästeliste in diesem Fall aussehen könnte.

(d) Kann man für jede mögliche Liste von Sigmar und ohne Kenntnis der Belegungen in vorherigen Nächten eine Aussage über die Belegung in der 121ten Nacht machen?

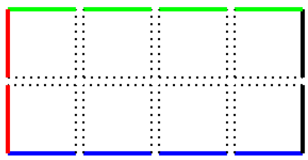
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Das Hotel habe jetzt n Zimmer.

- Gibt es eine Nacht, von der wir unabhängig von Sigmars Liste wissen, dass danach jeder Gast schon mindestens einmal in seinem ursprünglichen Zimmer geschlafen hat? Welches ist die kleinste Zahl k, so dass dies nach der k-ten Nacht der Fall ist?

- Gibt es eine Nacht, von der wir unabhängig von Sigmars Liste wissen, dass alle Gäste gleichzeitig in ihren ursprünglichen Zimmern schlafen? Welches ist die kleinste Zahl k, so dass dies in der k-ten Nacht eintritt?

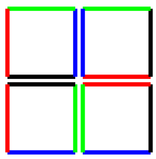
Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. Bei allen Lösungen gehen wir davon aus, dass die Randfärbung des Rechtecks jeweils wie folgt vorgegeben ist:

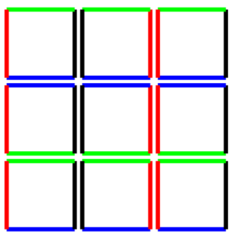


der obere Rand soll also grün, der untere blau, der rechte schwarz und der linke rot sein.

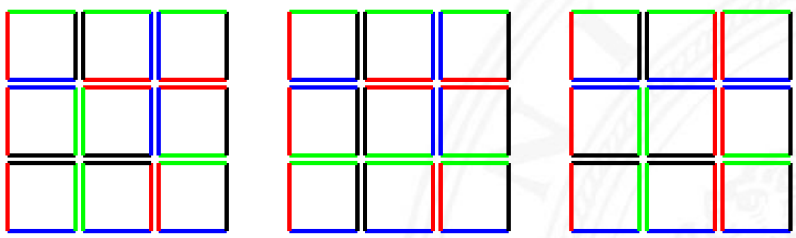
(a) Für ein 2×2-Rechteck gibt es dann genau eine Lösung. Da die beiden Quadrate in der ersten Zeile bereits eine grüne Seite vorgegeben haben und die beiden Quadrate in der zweiten Zeile noch einen grünen Rand benötigen, muss die gemeinsame Seite zwischen den beiden unteren Quadraten grün sein. Genauso argumentiert man ausgehend von der blauen, schwarzen und roten Seite und erhält die folgende eindeutige Lösung.

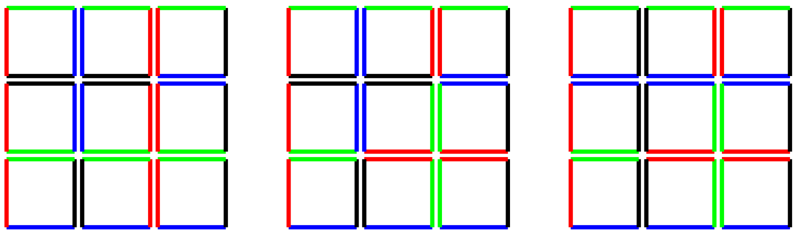


(b) Für das 3×3-Rechteck gibt es mehrere Möglichkeiten. In der einfachsten Variante „übernehmen" wir die Randfärbung indem die vertikalen Ränder abwechselnd durchgängig schwarz und rot gefärbt werden und die horizontalen abwechselnd blau und grün einfärben:

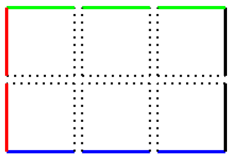


Bemerkung: Allerdings gibt es ist hier noch sechs weitere Lösungen:





(c) Nach der oben genannten Vereinbarung ist die folgende Randfärbung vorgegeben:



Alle drei Quadrate in der unteren Reihe benötigen noch einen grünen Rand. Da aber die drei oberen Quadrate bereits einen grünen Rand haben, können nur noch die vertikalen Seiten der unteren Quadrate grün gefärbt werden. Wenn einer dieser Ränder grün ist, dann erhalten nur zwei der drei unteren Quadrate einen grünen Rand und wenn beide grün gefärbt werden, dann hat das mittlere Quadrat zwei grüne Ränder, was auch verboten ist. Es ist also unmöglich die freien Ränder der unteren Quadrate so einzufärben, dass jedes Quadrat genau eine grüne Seite bekommt.

(d) Wir zeigen zuerst, dass es immer eine Lösung gibt, falls $m + n$ gerade ist. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist sowohl m als auch n ungerade oder beide Zahlen sind gerade.

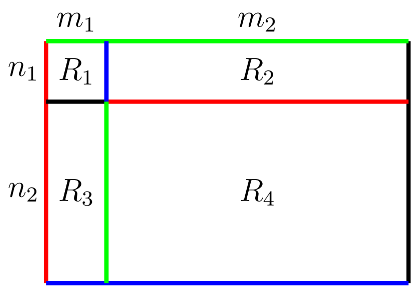
Falls m und n ungerade sind, dann können wir die erste Lösung des 3×3-Falles aus Aufgabenteil b verallgemeinern. D. h. wir färben abwechselnd die vertikalen Ränder schwarz und rot und die horizontalen Ränder blau und grün. Da sowohl m als auch n ungerade sind, geht diese Einfärbung genau auf, und da jedes Quadrat zwei hintereinander liegende vertikale und horizontale Seiten hat, erhält es so alle vier Farben.

Den Fall, wenn m und n gerade sind, führen wir auf den ungeraden Fall zurück. Da m und $n \geq 2$, gibt es ungerade natürliche Zahlen m_1, m_2 und n_1, n_2 mit

$$n_1 + n_2 = n \quad \text{und} \quad m_1 + m_2 = m\,.$$

Die genaue Wahl von m_1, m_2, n_1 und n_2 ist hier irrelevant, z. B. könnten wir $m_1 = n_1 = 1$ und $m_2 = m - 1$ und $n_2 = n - 1$ wählen.

Als nächstes zerlegen wir das vorgegebene $n \times m$-Rechteck in vier Rechtecke R_1, R_2, R_3 und R_4 mit den Seitenlängen $n_1 \times m_1$, $n_1 \times m_2$, $n_2 \times m_1$ und $n_2 \times m_2$ auf und färben die Ränder wie folgt ein.



Jedes der vier entstandenen Rechtecke $R_1, \ldots, R_4$ hat ungerade Seitenlängen und jede Seite ist mit einer anderen Farbe markiert. Wir können nun den bereits gelösten Fall (m und n ungerade) für jedes dieser vier Rechtecke anwenden und erhalten somit eine Lösung für m und n gerade.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass es keine Lösung gibt, wenn $m+n$ ungerade ist. In diesem Fall ist eine Seitenlänge gerade und die andere ungerade. Wir argumentieren hier für den Fall, dass die Höhe n ungerade ist. Für den anderen Fall vertauscht man einfach m und n im folgenden Beweis.

Wir benutzen ein einfaches *Paritätsargument*: Insgesamt soll das Rechteck mit $M = m \cdot n$ Quadraten ausgefüllt werden. Da m gerade ist, ist auch M gerade. Durch die vorgegebene Färbung des Randes haben bereits n Quadrate einen roten Rand. Die restlichen $M - n$ Quadrate brauchen noch eine rote Seite und da M gerade ist und n ungerade ist, ist $M - n$ ebenfalls ungerade. D. h. eine ungerade Anzahl von Quadraten benötigen noch einen roten Rand. Da sich aber immer zwei dieser $M - n$ Quadrate einen roten Rand teilen, kann es keine solche Zuordnung geben.

Lösung 2. Es sind die Nullstellen von $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$ zu bestimmen.

Jede Nullstelle x definiert ein y, so dass

$$x^2 - 3x + 3 = y \quad \text{und} \quad y^2 - 3y + 3 = x.$$

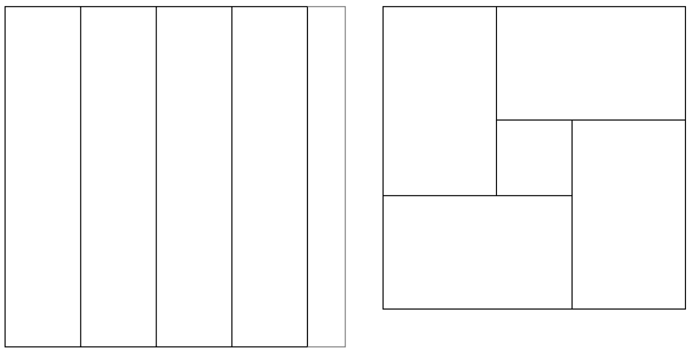
Auch die Umkehrung gilt: Zu jedem Lösungspaar (x, y) obiger beider Gleichungen ist x eine Nullstelle von $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$. Im Folgenden zeigen wir, dass $x = y$, dann sind lediglich die Lösungen von $x^2 - 4x + 3 = 0$ zu bestimmen; diese sind $x = 1$ und $x = 3$. Um $x = y$ zu zeigen, multiplizieren wir die obigen beiden Gleichungen:

$$x(x^2 - 3x + 3) = y(y^2 - 3y + 3)$$

Um $x = y$ einzusehen, genügt es zu zeigen, dass $g(x) := x(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x$ streng monoton wachsend ist. Da $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$, ist g auf den offenen Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ streng monoton wachsend und es gilt für $x \in (-\infty, 1)$ und $y \in (1, \infty)$, dass $x < g(1) < y$, womit g streng monoton wachsend ist.

Alternativer Beweis (Skizze): Multipliziert man $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$ aus, so erhält man folgendes Polynom vierten Grades: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$. Also kann die Gleichung maximal vier Lösungen haben. Durch Raten erhält man die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$. Man führt eine Polynomdivision mit $x - 1$ und $x - 3$ durch und erhält $f(x) = (x-1)(x-3)(x^2 - 2x - 1)$. Mit Hilfe der 2. Binomischen Formel folgt $f(x) = (x-1)^3(x-3)$. Also hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$. Bemerkung: f hat an der Stelle 3 eine einfache und an der Stelle 1 eine dreifache Nullstelle, die somit auch eine Wendestelle (ein Sattelpunkt) ist.

Lösung 3. (a) Vier 2×9-Rechtecke kann man wie in der folgenden Abbildung gezeigt in ein 9×9-Quadrat legen, vier 3×5-Rechtecke in ein 8×8-Quadrat:



Begründung, dass keine kleineren Quadrate möglich sind: Eine kleinere Quadrat-Seitenlänge als die größere Rechteck-Seitenlänge ist nie möglich, weshalb auch die erste Quadrat-Seitenlänge 9 optimal ist.

Wenn eine kleinere Quadrat-Seitenlänge als die Summe der Rechteck-Seitenlängen benutzt werden soll, darf keiner kürzeren Rechteckseite ein weiteres Rechteck anliegen. Die Rechtecke müssen also alle entlang ihrer längeren Seiten aneinander liegen. Da aber $4 \cdot 3 > 5 + 3$, würde man mit der Anordnung mit zweiten Fall ein größeres Quadrat benötigen, die Quadrat-Seitenlänge $3 + 5 = 8$ ist also optimal.

(b) In der Begründung im vorherigen Teil lassen sich die Zahlen sofort durch allgemeine Rechteck-Seitenlängen $a \geq b$ ersetzen: Ist $a + b \geq 4 \cdot b$, so ist das Maximum von a und $4 \cdot b$ die optimale Quadrat-Seitenlänge. Ist $a + b \leq 4 \cdot b$, so führt die zweite Anordnung auf die optimale Quadrat-Seitenlänge $a + b$.

(c) Betrachtet man die Fächeninhalte in der zweiten Anordnung, so kann man ablesen, dass grundsätzlich $(a+b)^2 \geq 4 \cdot ab$ gilt. Durch Wurzelziehen und Division durch 2 erhält man wie gewünscht

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Lösung 4. (a) Sigmars Liste ist wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	4	3	1	2	5

Das ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Da Herr Eins zunächst in Zimmer 4 umgezogen ist und nun in Zimmer 2 wohnt, steht an der Tür von Zimmer 4 die Aufforderung, in Zimmer 2 umzuziehen. Da Herr Vier inzwischen in Zimmer 3 wohnt, wird an Zimmer 2 dazu aufgefordert, in das Zimmer 3 zu ziehen. Herr Zwei wohnt inzwischen in Zimmer 1, dorthin sollte also Herr Drei ziehen. Damit sind die ersten vier Einträge von Sigmars Gästeliste ermittelt, daraus ergibt sich der fünfte Eintrag: Herr Fünf ist korrekt bei Zimmer 5 eingetragen.

(b) In der vierten Nacht befinden sich zum erstem Mal alle Gäste wieder in ihren ursprünglichen Zimmern. Diese Aussage erhält man entweder durch Ausprobieren oder durch die folgende Beobachtung: Die Gäste aus den Zimmern 1 bis 4 tauschen ihre Zimmer „im Kreis“: Der Bewohner von Zimmer 1 zieht in Zimmer 4, der Bewohner von Zimmer 4 zieht in Zimmer 2, der Bewohner von Zimmer 2 zieht in Zimmer 3 und der Bewohner von Zimmer 3 zieht wiederum in Zimmer 1. Jeder dieser vier Gäste wohnt also nach vier Umzügen zum ersten mal wieder in seinem ursprünglichen Zimmer. Herr Fünf bleibt immer im selben Zimmer, daher wohnen in der vierten Nacht dann alle Gäste wieder im selben Zimmer wie direkt nach der Anreise.

(c) Die Liste könnte wie folgt aussehen:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	4	5	1	2	3

Stellt man sich die Zimmer 1, 2, 3, 4 und 5 in dieser Reihenfolge im Kreis angeordnet vor, so dass nach Zimmer 5 wieder Zimmer 1 folgt, so zieht jeder Gast nach jedem Abendessen dann immer drei Zimmer weiter. Nach dem zweiten Umzug ist jeder Gast dann sechs Zimmer weiter gezogen. Da es nur fünf Zimmer gibt, landet er dabei im selben Zimmer, als wenn er nur ein Zimmer weiter gezogen wäre.

Bemerkung: Dies ist sogar die einzige Möglichkeit für die Liste: Aus der Verteilung für den zweiten Tag ergibt sich, dass jeder Gast im Laufe der Zeit in alle Zimmer umzieht. Denn das gilt sogar, wenn man nur jede zweite Nacht betrachtet. Wenn ein Gast in ein Zimmer zieht, das er vorher bereits schon einmal bewohnt hat, erreicht er auch danach keine neuen Zimmer mehr. Daher wohnt jeder Gast erst nach dem fünften Umzug in einem Zimmer, das er bereits bewohnt hat. Dies muss sein ursprüngliches Zimmer sein, da man andernfalls zwei von zwei verschiedenen Zimmern aus in dasselbe Zimmer umziehen müsste. Also wohnen in der fünften Nacht alle Gäste in ihren ursprünglichen Zimmern und in der sechsten Nacht ist die Verteilung wieder wie in der ersten Nacht. Da man die Verteilung für jede zweite Nacht aus der Verteilung in der zweiten Nacht ermitteln kann, gibt es nur diese eine Möglichkeit.

(d) In der 121sten Nacht stimmt die Gästeverteilung wieder mit Sigmars Liste überein: Jeder Gast zieht spätestens beim fünften Umzug in ein Zimmer, dass er bereits bewohnt hat. Dieses Zimmer kann nur sein ursprüngliches Zimmer sein, weil man sonst aus zwei verschiedenen Zimmern in dasselbe Zimmer gelangen würde. Anschließend wiederholen sich alle seine Umzüge wieder. Da 120 durch jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 teilbar ist, schläft jeder Gast in der 121ten Nacht wieder im selben Zimmer wie in der ersten Nacht.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt).

- Jeder Bewohner muss spätestens in der n-ten Nacht wieder in ein Zimmer ziehen, dass er bereits bewohnt hat. Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt, dass das erste Zimmer, dass er zum zweiten Mal bezieht, sein ursprüngliches Zimmer sein muss.

- Da es für jeden Gast ein m zwischen 1 und n gibt, so dass sich seine Umzüge immer nach m Nächten wiederholen, wohnen für $k = \mathrm{kgV}(1, \dots, n)$ in der k-ten Nacht alle Bewohner wieder in ihren ursprünglichen Zimmern. Das ist auch das kleinste k, das diese Eigenschaft für jede mögliche Liste von Sigmar hat: Für jede Zahl l zwischen 1 und n gibt es eine Liste, so dass genau in jeder l-ten Nacht alle Gäste in ihren ursprünglichen Zimmern wohnen. Zum Beispiel könnte sein, dass der ursprüngliche Bewohner aus Zimmer l bei Zimmer 1 eingetragen ist, für i zwischen 1 und $l-1$ die ursprünglichen Bewohner von Zimmer i bei Zimmer $i+1$ eingetragen sind und alle anderen Einträge der Liste korrekt sind, so dass die entsprechenden Bewohner nicht umziehen müssen. Daher muss jedes solche k durch alle Zahlen von 1 bis n teilbar sein, das kleinste solche k ist $\mathrm{kgV}(1, \dots, n)$.