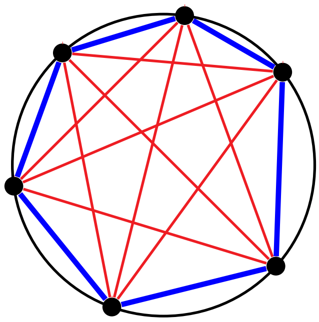
Klassenstufen 9, 10



Aufgabe 1 (6+8+6 Punkte). (a) Auf einem Kreis werden sieben Punkte gesetzt und zu einem (nicht überschlagenen) Siebeneck verbunden.

Zeige, dass dieses Siebeneck 14 Diagonalen aufweist.

(b) Auf einem Kreis werden n Punkte gesetzt und zu einem (nicht überschlagenen) n-Eck verbunden.

Finde eine Formel, die die Anzahl der Diagonalen in diesem n-Eck angibt, und beweise die Gültigkeit der Formel.

(c) Bei dem Siebeneck aus Aufgabenteil (a) können Dreiecke aus je drei Eckpunkten gebildet werden.

Bestimme, wie viele derartige Dreiecke es gibt.

Aufgabe 2 (4+6+4+6 Punkte)**.** Gegeben sind die drei natürlichen Zahlen

$$k = 3^7 + 7^3, \quad m = 7^{13} + 13^7 \quad \text{und} \quad n = 29^{31} + 31^{29}\,.$$

(a) Zeige, dass k durch 10 teilbar ist.

(b) Die drei Zahlen k, m und n haben alle die Form $p^q + q^p$, wobei p und q verschiedene Primzahlen sind. Zeige, dass solche Summen weder durch p noch durch q teilbar sind (mit beliebigen Primzahlen p und q).

(c) Beweise, dass m nicht durch 10 teilbar ist, wohl aber durch 4.

Hinweis: Schreibe die Summanden geschickt um, sinnvoll ist zum Beispiel $m = (8-1)^{13} + (12+1)^7$.

(d) Zeige, dass n durch 60 teilbar ist.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Entscheide, welcher der beiden Summanden von n größer ist.

Aufgabe 3 (4+6+4+6 Punkte). (a) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 169, \tag{1}$$
$$x + y = 17. \tag{2}$$

Finde alle reellen Lösungspaare dieses Gleichungssystems.

Hinweis: Die Gleichung (1) beschreibt einen Kreis um den Ursprung.

(b) Verändere die Kreisgleichung (1) so, dass das Gleichungssystem aus der neuen Gleichung (1') und der Gleichung (2) genau ein Lösungspaar aufweist und die neue Gleichung (1') keine Gerade beschreibt.

(c) Gegeben ist jetzt das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 169, \tag{3}$$
$$|x + y| = 17. \tag{4}$$

Finde alle reellen Lösungspaare dieses Gleichungssystems.

(d) Verändere die Gleichung (4) so zu einer Gleichung (4'), dass das Gleichungssystem aus den Gleichungen (3) und (4') genau acht Lösungspaare aufweist, und zeige, dass die so gewonnene Gleichung im Gleichungssystem diese Bedingung erfüllt.

Aufgabe 4 (4+6+10 Punkte)**.** Zwei Spieler A und B spielen ein Nim-Spiel mit drei Haufen Bohnen. In einem Zug kann ein Spieler von einem Haufen zwischen 1 und 3 Bohnen entfernen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Spieler A beginnt. Wer keinen Zug mehr machen kann, hat verloren.

(a) Am Anfang bestehen die Haufen aus 1, 7 und 13 Bohnen (wir bezeichnen die Situation durch $[1, 7, 13]$). Spielt die Situation einige Male für euch durch.

Entscheide, ob Spieler A oder Spieler B den Sieg erzwingen kann (ob es sich also um eine Gewinn- oder Verluststellung handelt, siehe Hinweis unten).

(b) Entscheide entsprechend für die Anfangssituation $[5, 10, 15]$.

(c) Beschreibe und begründe eine vollständige Gewinnstrategie.

Hinweis zu den Begriffen: Ist man an der Reihe und findet eine *Gewinnstellung* vor, so kann man unabhängig von den Zügen des Gegners gewinnen. Findet man eine *Verluststellung* vor, so ist dies nicht unabhängig von den Zügen des Gegners möglich (man kann den Sieg also nicht erzwingen).

Eine *vollständige Gewinnstrategie* beschreibt die Gewinnstellungen und gibt für jede einen Zug an, der in eine Verluststellung führt (mit dem man also gewinnen kann). Für alle Verluststellungen ist zu beweisen, dass jeder mögliche Zug in eine Gewinnstellung führt.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Beweis zum Beispiel durch Aufzeichnen und Abzählen, da die Anzahl nicht von der Lage der Punkte abhängt.

(b) Die Anzahl der Diagonalen beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$.

Beweis: Von jedem der n Eckpunkte gehen $n-3$ Diagonalen aus (nicht zum Punkt selbst und nicht zu den beiden Nachbarpunkten). Um nicht jede Diagonale doppelt zu zählen, muss man $n(n-3)$ noch halbieren.

(c) Jeder der sieben Punkte kann zunächst mit einem der sechs anderen Punkte verbunden werden. Dann ist einer der fünf restlichen Punkte zu wählen, um ein Dreieck zu bilden. Allerdings werden die drei Punkte des Dreiecks auf diese Art in einer festen Reihenfolge ausgewählt. Da die Punkte eines Dreiecks auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten geordnet werden können, wird in der angegeben Aufzählung jedes Dreieck 6 mal gezählt. Also ergibt sich die Anzahl

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35.$$

Bemerkung: Man wählt jeweils 3 aus 7 Punkten aus. Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 Objekte von 7 auszuwählen, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommt, kann über die allgemein gültige Formel berechnet werden. Man schreibt:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 35$$

Lösung 2. (a) $k = 2530$ (direkt zu errechnen), k hat also Endziffer 0 und ist demnach durch 10 teilbar.

(b) Da p und q verschiedene Primzahlen sind und q^p nur den Primteiler q aufweist, ist q^p nicht durch p teilbar. Da andererseits p^q durch p teilbar ist, ist damit die Summe nicht durch p teilbar. Der Beweis, dass die Summe nicht durch q teilbar ist, ist analog: Man vertauscht p und q.

(c) Beim Multiplizieren und dadurch auch beim Potenzieren wirkt sich nur die letzte Stelle der Zahl auf die letzte Stelle des Ergebnisses aus, weshalb man diese für sich berechnen kann.

Die letzte Stelle von 7^k wiederholt sich, wenn k um vier erhöht wird, ist also abwechselnd 7, 9, 3 und 1. Für 13^k wiederholen sich 3, 9, 7 und 1. Die letzte Stelle von 7^{13} und 13^7 ist also jeweils eine 7, weshalb m als letzte Stelle eine 4 hat und somit nicht durch 10 teilbar ist.

Unter Verwendung des Hinweises $m = (8-1)^{13} + (12+1)^7$ kann so argumentiert werden: Der erste Summand von m hat einen Achterrest von $(-1)^{13} = -1$ und der zweite Summand hat einen Zwölferrest von $(+1)^7 = 1$.

Da 4 ein gemeinsamer Teiler von 8 und 12 ist, bedeutet dies, dass sich die Viererreste gerade aufheben. Also ist m durch 4 teilbar.

(d) Wie im vorigen Aufgabenteil nutzen wir die Zerlegung

$$n = (30-1)^{31} + (30+1)^{29}.$$

Der erste Summand liefert einen 30-Rest von -1, der zweite einen von $+1$, so dass n durch 30 teilbar ist. Es fehlt noch ein Faktor 2.

Da $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ die 2 nur als einfachen Faktor enthält, ist es hinreichend zu zeigen, dass sich die 2 aus n mindestens zweimal ausfaktorisieren lässt, also Teilbarkeit durch 4 nachzuweisen. Wegen $n = (7\cdot 4+1)^{31} + (8\cdot 4-1)^{29}$, erhält man die Teilbarkeit von n durch 4.

Natürlich kann nacheinander die Teilbarkeit durch 3, 4 und 5 gezeigt werden. Da diese drei Zahlen zueinander teilerfremd sind, ist dann ebenfalls die Teilbarkeit durch 60 gezeigt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zuerst schreiben wir 31^{29} wie folgt um

$$31^{29} = 29^{29}\left(\frac{31}{29}\right)^{29}.$$

Falls also $\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < 29^2$, dann folgt $31^{29} < 29^{31}$. Die Abschätzung $\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < 29^2$ lässt sich auf verschiedenen Wegen herleiten. In mehreren Schritten wird dafür die folgende Ungleichungskette gezeigt:

$$\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < \left(\frac{31}{29}\right)^{32} < \left(\frac{11}{10}\right)^{32} = \left(\left(\frac{11}{10}\right)^{4}\right)^{8} < 2^8 = 256 < 400 = 20^2 < 29^2$$

Die erste Abschätzung ist offensichtlich und da $31 \cdot 10 = 310 < 319 = 11 \cdot 29$ und somit $\frac{31}{29} < \frac{11}{10}$, gilt auch die zweite Abschätzung. Die nächste Identität ist eine Anwendung der Potenzregeln. Die folgende Abschätzung kann man einfach nachrechnen, da $11^4 = 121^2 = 14641$ und $10^4 = 10000$. Schließlich gilt $2^8 = 4\cdot 4^3 = 4\cdot 64 = 256$ und die restlichen Abschätzungen sind offensichtlich.

Lösung 3. (a) Die Gleichung (2) beschreibt eine Gerade mit der Steigung -1, die den Kreis in maximal zwei Punkten schneiden kann. Die Punkte $(5|12)$

und (12|5) erfüllen mit ihren Koordinaten beide Gleichungen, also ist die Lösungsmenge

$$L_a = \{(5|12), (12|5)\}\,.$$

Ebenso ist es möglich, beide Gleichungen zum Beispiel nach y aufzulösen und dann gleichzusetzen:

$$\pm\sqrt{169 - x^2} = -x + 17$$

Quadrieren ergibt dann die (nicht äquivalente) Gleichung

$$169 - x^2 = x^2 - 34x + 289,$$

was die beiden Lösungen $x = 5$ oder $x = 12$ ergibt und damit auch die zugehörigen y-Koordinaten. Allerdings ist hier noch eine Probe nötig.

(b) Die Aufgabenstellung legt es nahe, den Kreismittelpunkt zu belassen und lediglich den Radius zu verkleinern, so dass der Kreis die Gerade nur noch berührt. Dafür ersetzt man in der Rechnung von Aufgabenteil (a) die 169 durch r^2 und erhält

$$0 = x^2 - 17x + \frac{289 - r^2}{2} = \left(x - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + \frac{289}{2} - \frac{r^2}{2}\,.$$

Diese Gleichung hat genau dann nur eine Lösung für x, falls $\frac{17}{2}$ eine doppelte Nullstelle ist, also falls

$$r^2 = 2 \cdot \left(\frac{289}{2} - \left(\frac{17}{2}\right)^2\right) = 289 - \frac{17^2}{2} = \frac{17^2}{2}\,.$$

Dies ist beim Radius $r = \frac{17}{\sqrt{2}}$ erreicht mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{17^2}{2} = \frac{289}{2} \tag{1'}$$

und der Lösungsmenge $L_b \left\{\left(\frac{17}{2}|\frac{17}{2}\right)\right\}$.

Die Idee, den Kreis zu verschieben, so dass er die Gerade nur noch berührt, ist nach der Aufgabenstellung auch möglich. Hier sind verschiedene Lösungen denkbar, zum Beispiel

$$\left(x + \frac{13}{\sqrt{2}} - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{\sqrt{2}} - \frac{17}{2}\right)^2 = 169 \tag{1'}$$

mit $L_b = \left\{\left(\frac{17}{2}|\frac{17}{2}\right)\right\}$.

(c) Die Gleichung (4) beschreibt zwei Geraden, nämlich

$$y = -x + 17 \quad \text{und} \quad y = -x - 17.$$

Die Lösungen können dann für jede der beiden Geraden wie im ersten Teil berechnet werden. So erhält man die folgenden vier Lösungen.

$$L_c = \{(5|12), (12|5), (-5|-12), (-12|-5)\}.$$

Einsetzen liefert, dass es sich tatsächlich um vier Lösungen handelt.

(d) Naheliegend ist jetzt, vier Geraden in der Gleichung (4') zusammenzufassen, zum Beispiel in

$$|x| + |y| = 17, \tag{4'}$$

was zusätzlich zu den beiden Geraden aus (4) die Geraden $y = x + 17$ und $y = x - 17$ beinhaltet. Die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} L_d = \big\{&(5|12), (12|5), (-5|-12), (-12|-5),\\ &(5|-12), (-12|5), (-5|12), (12|-5)\big\} \end{aligned}$$

hat genau acht Elemente. (Auch hier reicht Einsetzen.)

Hinweis: Es wird jeweils mit geometrischen Objekten und deren Eigenschaften argumentiert. Dass es nicht mehr Punkte als Lösung der Gleichungen gibt, folgt aber auch direkt aus den Gleichungen, was dann jeweils ein „echter“ Beweis für die anschauliche Feststellung ist.

Lösung 4. Zunächst einmal: Wie in der Aufgabenstellung angegeben, bezeichnet eine *Gewinnstellung* eine Stellung, in der der Spieler einen Sieg erzwingen kann, der an der Reihe ist. Die Gewinnstellungen sind also genau die Stellungen, bei denen das Spiel bei optimaler Spielweise des ziehenden Spielers nach einer ungeraden Anzahl von Zügen beendet ist. Jeder Zug aus einer Verluststellung führt in eine Gewinnstellung, und aus jeder Gewinnstellung gibt es einen Zug in eine Verluststellung.

Offensichtlich sind in diesem Sinn $[0, 0, 0]$ und $[0, 1, 1]$ Verluststellungen.

(a) Die Stellung $[1, 7, 13]$ ist eine Gewinnstellung:

Wenn „ich“ sie bekomme, kann ich sie zu $[1, 4, 13]$, einer Verluststellung, reduzieren; die beiden äußeren Haufen haben jetzt denselben Viererrest, der mittlere Haufen hat den Viererrest 0.

Mein Spielpartner kann jetzt den mittleren Haufen reduzieren – dann reduziere ich denselben Haufen in meinem nächsten Zug auf Null, und die beiden äußeren Haufen behalten denselben Viererrest.

Er kann auch einen der äußeren Haufen reduzieren. Falls dieser Haufen aus noch mindestens 4 Bohnen bestand, dann kann ich denselben Haufen weiter reduzieren, so dass anschließend wieder beide äußeren Haufen denselben Viererrest haben. Falls der reduzierte Haufen vorher weniger als 4 Bohnen enthielt, dann kann ich den anderen äußeren Haufen um die gleich Anzahl an Bohnen vermindern und danach haben wieder die beiden äußeren Haufen denselben Viererrest.

Dies kann so fortgesetzt werden, bis alle Haufen leer sind.

(b) Die Stellung $[5, 10, 15]$ ist hingegen eine Verluststellung: Sie weist die Viererreste $[1, 2, 3]$ auf. Wenn „ich" sie bekomme, habe ich zwei Möglichkeiten: Ich kann einen dieser Viererreste auf Null reduzieren, dann kann mein Spielpartner im nächsten Zug die beiden anderen Reste gleich machen und so eine der aus Teil (a) bekannten Verluststellungen erreichen. Alternativ kann ich nur zwei Reste gleich machen, dann kann mein Partner im nächsten Zug den dritten Rest auf Null bringen und somit ebenfalls eine der aus Teil (a) bekannten Verluststellungen erreichen.

(c) In Teil (a) und (b) haben wir gesehen, dass die Stellungen Verluststellungen sind, bei denen zwei Haufen denselben Viererrest aufweisen und der dritte den Viererrest Null hat oder bei denen alle von Null verschiedenen Viererreste auftreten. Wir zeigen nun darüber hinaus, dass alle anderen Stellungen Gewinnstellungen sind.

Sei also eine Stellung $[a, b, c]$ gegeben, von der wir zeigen wollen, dass sie eine Gewinnstellung ist. Ist keine der Zahlen durch 4 teilbar, müssen zwei von ihnen den gleichen Viererrest haben, da ansonsten eine Verluststellung vorläge. In diesem Fall kann man also den dritten Haufen auf eine durch 4 teilbare Größe reduzieren und so eine Verluststellung herstellen.

Ist umgekehrt eine der Zahlen durch 4 teilbar, dann haben die beiden anderen Zahlen unterschiedliche Viererreste. In diesem Fall kann man den größeren dieser beiden Haufen so reduzieren, dass er den gleichen Viererrest wie der andere Haufen aufweist. Es gibt also auch hier einen Zug in eine Verluststellung.