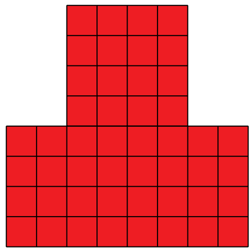
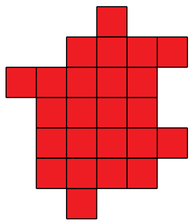
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (4+8+8 Punkte). (a) Zeige, dass sich die folgende Figur (entlang der Linien) in vier kongruente Teilflächen zerlegen lässt.



(b)
- Zeige, dass sich die folgende Figur in sechs kongruente Teilflächen zerlegen lässt.
- Überprüfe, ob es mehrere solcher Möglichkeiten gibt. Gib in dem Fall mindestens eine weitere an.



(c) Zeige, dass sich die Zerlegung der Figur aus Teilaufgabe (b) mit genau zwei Formen von Teilflächen durchführen lässt.

Aufgabe 2 (6+6+8 Punkte)**.** In einem Märchen aus 1001 Nacht bewarben sich mehrere Jünglinge um die Hand der Tochter des Kalifen. Der Kalif stellte alle Bewerber vor schwierige Aufgaben. Nur ein Jüngling hatte alle Hürden erfolgreich genommen. Nun erdachte sich der Kalif eine neue Aufgabe:

Der Jüngling durfte von drei Beuteln einen auswählen und danach aus dem gewählten Beutel eine Kugel ziehen. Eine weiße Kugel sollte das ersehnte Glück bringen, eine schwarze hingegen bedeuten, dass auch dieser Jüngling nicht der richtige Gemahl für die Tochter des Kalifen sei.

In jedem der drei Beutel befanden sich 6 Kugeln:

- im ersten 3 weiße und 3 schwarze,
- im zweiten 2 weiße und 4 schwarze und
- im dritten 1 weiße und 5 schwarze.

Hinweis: Man kann von außen nicht sehen, wie viele oder welche Kugeln in den Beuteln sind.

(a) Bestimme die Chance (Wahrscheinlichkeit) für den Jüngling, dass sein Herzenswunsch in Erfüllung geht.

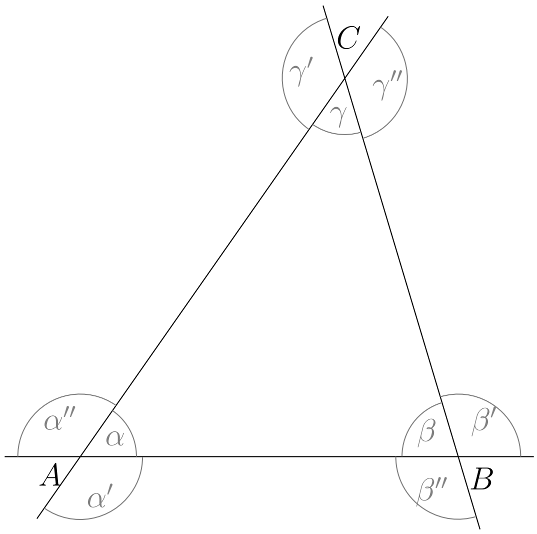
(b) Überprüfe, ob sich die Chance ändert, wenn sich in jedem der drei Beutel 2 weiße und 4 schwarze Kugeln befinden.

Wie in jedem Märchen mischt sich auch in unserem eine gute Fee ein. Um dem Jüngling zu helfen, verteilt sie die 6 weißen und 12 schwarzen Kugeln neu auf die drei Beutel, wobei nun nicht mehr unbedingt in jedem Beutel die gleiche Anzahl von Kugeln sein muss. Kein Beutel darf leer sein.

(c) Weise nach, dass die gute Fee die Kugeln so verteilen kann, dass die Chance für die Erfüllung seines Herzenswunsches $\frac{3}{4}$ beträgt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Ist es möglich, dass die Fee die Kugeln so verteilt, dass die Chance besser als $\frac{3}{4}$ ist?

Aufgabe 3 (8+6+6 Punkte)**.** In einem Dreieck ΔABC seien die Innenwinkel mit α, β und γ benannt. Die Außenwinkel (also die Nebenwinkel zu den Innenwinkeln) werden mit α', α'', β', β'', γ' und γ'' bezeichnet, wie in der folgenden Skizze ersichtlich:



(a)
- Berechne für ein Dreieck mit $\alpha = 35°$ und $\beta = 75°$ alle Außenwinkel. (Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht.)
- Berechne die Summe dieser sechs Außenwinkel.

(b) Weise nach, dass die Summe aller sechs Außenwinkel in allen Dreiecken gleich groß ist.

(c) Beweise, dass es kein Dreieck gibt, bei dem die Winkelhalbierenden durch α' und β parallel sind.

Aufgabe 4 (3+3+4+4+6 Punkte)**.** In ein Zahlendreieck seien die ungeraden Zahlen eingetragen, in die erste Zeile eine Zahl, in die nächste drei, dann fünf und so weiter:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 5 & 7 & & \\ & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\ 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

Die Position (m, n) bezeichne die n-te Zahl in der m-ten Zeile, beispielsweise ist die Zahl 23 an Position $(4, 3)$.

(a) Bestimme die Zahl, die an der Position $(7, 3)$ steht.

(b) Bestimme die Position der Zahl 99.

(c) Bestimme die Zahl, die an der Position $(30, 10)$ steht.

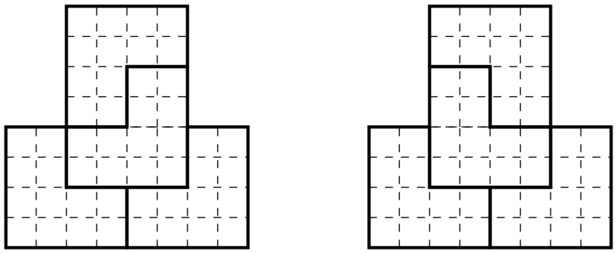
(d) Bestimme die Position der Zahl 3333.

(e) Bestimme einen allgemeinen Ausdruck für die Zahl, die in der m-ten Zeile an der letzten Stelle steht.

Hinweis: „Bestimme“ schließt jeweils „beweise“ mit ein.

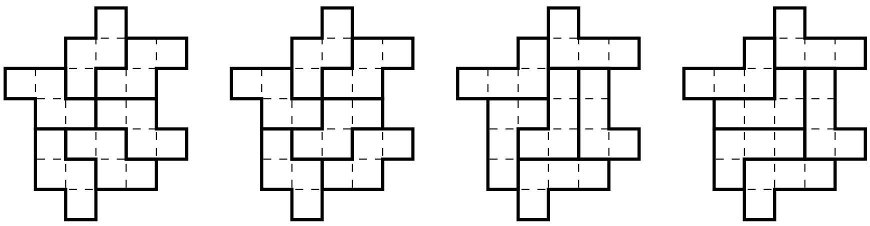
Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Mögliche Zerlegungen sind:

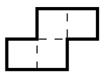
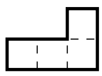
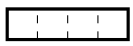


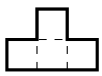
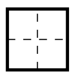
Dies sind sogar alle Möglichkeiten.

(b) Es gibt mehrere Zerlegungen:



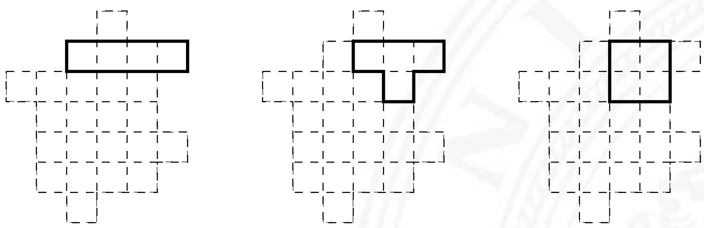
(c) Die Figur besteht aus 24 Quadraten, also muss jede der sechs Teilflächen aus vier Quadraten bestehen. Es gibt fünf verschiedene paarweise nicht kongruente Flächen, die aus vier Quadraten bestehen:

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

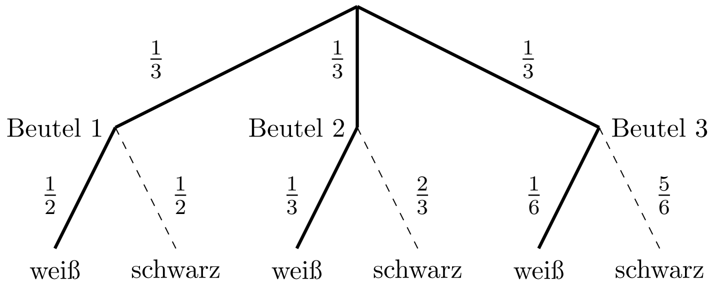
Zerlegungen in Flächen der Form (A) bzw. (B) sind schon in der Lösung zu Teilaufgabe (b) angegeben.

Zerlegungen in Flächen der Form (C), (D) oder (E) sind nicht möglich. Eine Form muss wie folgt in die Figur gelegt werden, um das „überstehende“ Kästchen rechts oben bzw. das daneben zu überdecken:



Dies trennt aber ein einzelnes Quadrat ab.

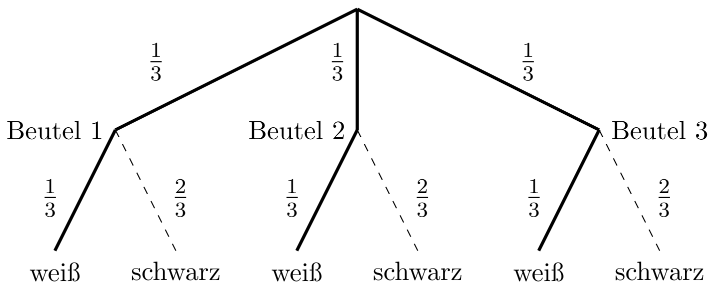
Lösung 2. (a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mithilfe eines Baumdiagramms ermitteln:



Der Herzenswunsch wird genau entlang der fett gedruckten Äste erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

(b) Wie in Teilaufgabe (a) ermitteln wir die Wahrscheinlichkeit mittels eines Baumdiagramms:



Der Herzenswunsch wird wieder genau entlang der fett gedruckten Äste erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

und ändert sich daher nicht.

Allgemein gilt, dass die Wahrscheinlichkeit immer $\frac{1}{3}$ beträgt, wenn die vorhandenen Kugeln auf drei Beutel mit je 6 Kugeln verteilt werden: Jeder Beutel wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewählt, danach wird jede seiner Kugeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit (also $\frac{1}{6}$) gezogen. Insgesamt hat somit jede Kugel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. Da es 6 weiße Kugeln gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

(c) Verteilt die Fee die Kugeln so, dass alle schwarzen Kugeln im gleichen Beutel sind, zieht der Jüngling in jedem Fall eine weiße Kugel, falls er einen der beiden anderen Beutel wählt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem dritten Beutel eine weiße Kugel zu ziehen, wird umso größer, je mehr weiße Kugeln er enthält. Deshalb verteilt die Fee die Kugeln wie folgt: In die ersten beiden Beutel kommt je eine weiße Kugel, in den dritten Beutel die restlichen 4 weißen Kugeln sowie die 12 schwarzen. Die Chance für den Jüngling beträgt nun

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Jede einzelne Kugel aus einem Beutel mit k Kugeln wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k}$ gezogen, diese Zahl ist umso kleiner, desto größer k ist. Weil kein Beutel leer sein darf, kann auch kein Beutel mehr als 16 Kugeln enthalten. Jede einzelne Kugel wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}$ gezogen. Da es 12 schwarze Kugeln gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, mindestens

$$12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Daher kann die Fee die Kugeln nicht so verteilen, dass die Chance besser als $\frac{3}{4}$ ist.

Lösung 3. (a) Die Nebenwinkel ergänzen den Innenwinkel jeweils zu einem gestreckten Winkel, also zu 180°.

Also gilt:

$$\begin{aligned} \alpha' = \alpha'' &= 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ, \\ \beta' = \beta'' &= 180^\circ - \beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ. \end{aligned}$$

Da die Winkelsumme im Dreieck stets 180° ist, ergibt sich

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 35^\circ - 75^\circ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Daraus folgt:

$$\gamma' = \gamma'' = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Die Summe aller Außenwinkel ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' &= 2 \cdot 145^\circ + 2 \cdot 105^\circ + 2 \cdot 110^\circ \\ &= 290^\circ + 210^\circ + 220^\circ \\ &= 720^\circ. \end{aligned}$$

(b) Die Summe der Vollwinkel um die Punkte A, B und C beträgt $3 \cdot 360° = 1080°$. Um die Summe der Außenwinkel zu erhalten, muss die Summe der Innenwinkel und deren Scheitelwinkel von $1080°$ subtrahiert werden. Die Summe der Innenwinkel ist als Winkelsumme im Dreieck gerade $180°$. Da die Scheitelwinkel genauso groß wie die Innenwinkel sind, ist die Summe der Scheitelwinkel ebenfalls $180°$. Daher ist die Summe der Außenwinkel gerade

$$1080° - 2 \cdot 180° = 1080° - 360° = 720°.$$

(c) Wenn die Winkelhalbierenden von α' und β parallel wären, müsste $\alpha' = \beta$ gelten, weil die halben Winkel (von α' und β) dann Wechselwinkel wären. Da

$$\alpha' = 180° - \alpha \quad \text{und} \quad \beta = 180° - \alpha - \gamma$$

gilt, müsste

$$180° - \alpha = \alpha' = \beta = 180° - \alpha - \gamma,$$

also $\gamma = 0°$ gelten, ein Widerspruch. Also sind in jedem Dreieck die Winkelhalbierenden von α' und β nicht parallel.

Lösung 4. (a) Die Anzahl der ungeraden Zahlen in einer Zeile erhöht sich jeweils um 2. Es stehen also zunächst 1, dann 3, dann 5, dann 7, dann 9, dann 11, dann 13 usw. ungerade Zahlen in einer Zeile. Vor der Zahl an Position $(7, 3)$ stehen demnach

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 2 = 38$$

ungerade Zahlen. An der Position $(7, 3)$ steht also die 39ste ungerade Zahl. Dies ist die $2 \cdot 39 - 1 = 77$.

(b) Die Zahl 99 ist die 50ste ungerade Zahl. Da in den ersten 7 Zeilen insgesamt

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$

stehen, ist die Position der 99 demnach $(8, 1)$.

(c) In jeder Zeile steht eine ungerade Anzahl an ungeraden Zahlen und zwar ist diese Anzahl in der m-ten Zeile gerade die m-te ungerade Zahl. Die Anzahl der ungeraden Zahlen in allen Zeilen bis einschließlich der m-ten Zeile ist also gerade gleich der Summe aller ungeraden Zahlen bis einschließlich der m-ten. Diese Summe ist gleich m^2. Dies wird am Ende der Lösung dieser Aufgabe bewiesen. An Position $(30, 10)$ steht also die 851ste ungerade Zahl, denn

$$29^2 + 10 = 841 + 10 = 851.$$

Die 851ste ungerade Zahl ist die Zahl $2 \cdot 851 - 1 = 1701$. Also steht 1701 an Position $(30, 10)$.

(d) Die Zahl 3333 ist die 1667ste ungerade Zahl. Da

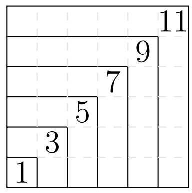
$$40^2 = 1600 < 1667 \qquad \text{und} \qquad 41^2 = 1681 > 1667$$

ist, steht die Zahl 3333 in der 41sten Zeile und zwar an Position $(41, 67)$, denn

$$40^2 + 67 = 1600 + 67 = 1667.$$

(e) An der letzten Stelle der m-ten Zeile steht nach der Beobachtung aus Teilaufgabe (b) die m^2-te ungerade Zahl. Diese lässt sich folglich durch den Ausdruck $2m^2 - 1$ berechnen.

Begründung, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gerade n^2 ist:



Mit jeweils der nächsten ungeraden Zahl kann man ein Quadrat um eine Zeile und eine Spalte, die ein gemeinsames Kästchen haben, ergänzen, da die nächste ungerade Zahl jeweils um 2 größer ist.