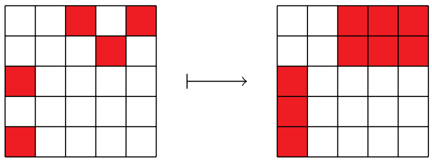
Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (4+6+4+6 Punkte)**.** In einem $n \times n$-Feld sind einige Zellen infiziert. Diese Infektion breitet sich schrittweise aus: Eine gesunde Zelle wird im nächsten Schritt infiziert, falls mindestens zwei ihrer direkten Nachbarn infiziert sind. (Die direkten Nachbarn einer Zelle sind die Zellen, die mit ihr eine Kante gemeinsam haben.) Bereits infizierte Zellen bleiben infiziert. Zum Beispiel:



In diesem Beispiel wird im nächsten Schritt keine weitere Zelle infiziert.

(a) Zeige, dass es im Fall $n = 4$ möglich ist, genau vier infizierte Zellen auszuwählen, welche (nach einigen Schritten) das gesamte Feld infizieren.

(b) Zeige, dass dies mit drei Zellen nicht möglich ist.

(c) Zeige, dass man allgemein stets n Zellen auswählen kann, welche das gesamte Feld infizieren.

(d) Zeige, dass man hierfür stets mindestens $\frac{n}{2}$ infizierte Zellen benötigt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zeige, dass weniger als n infizierte Zellen ein $n \times n$-Feld nicht komplett infizieren können.

Aufgabe 2 (4+8+8 Punkte)**.** Es seien gerade Stöckchen (mathematisch: Strecken) gegeben und man soll die Stöckchen so zurechtschneiden, dass man damit bestimmte Vielecke legen oder nicht legen kann.

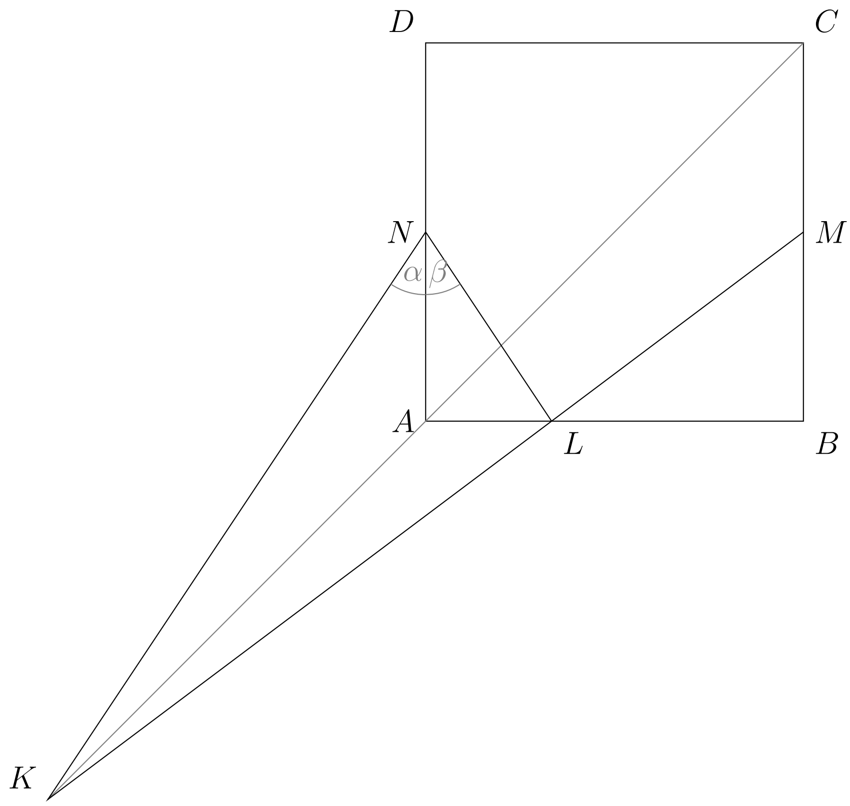
(a) Wähle die Längen von vier Stöckchen so, dass es unmöglich ist, ein Viereck damit zu legen.

(b) Wähle die Längen von vier Stöckchen so, dass man damit ein Viereck legen kann, es aber unmöglich ist, ein Dreieck zu legen, egal mit welchen drei der vier Stöckchen man es probiert.

(c) Wähle die Längen von 101 Stöckchen so, dass man damit ein 101-Eck legen kann, es aber für jedes $k = 3, \ldots, 100$ unmöglich ist, k Stöckchen, unter den 101 Stöckchen auszuwählen, mit denen sich ein k-Eck legen lässt.

Hinweis: Die tatsächliche Konstruktion muss nicht angegeben oder bewiesen werden.

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Es sei $ABCD$ ein Quadrat, M der Mittelpunkt von BC und N der Mittelpunkt von AD. Der Punkt K liege auf der Verlängerung von AC über A hinaus und L sei der Schnittpunkt von KM und AB.



(a) Zeige für den Spezialfall $|KA| = |AC|$, dass $\angle KNA = \angle ANL$ gilt ($\alpha = \beta$ in der Zeichnung).

(b) Zeige, dass stets $\angle KNA = \angle ANL$ gilt (also nicht nur für $|KA| = |AC|$).

Aufgabe 4 (4+8+8 Punkte)**.** Gesucht sind n-stellige Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die letzten n Ziffern des Quadrates dieser Zahl bilden diese Zahl selbst. (Die erste Ziffer der n-stelligen Zahl darf hier auch eine 0 sein.) Beispiele für dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft sind 000 und 001.

(a) Finde alle ein- und zweistelligen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

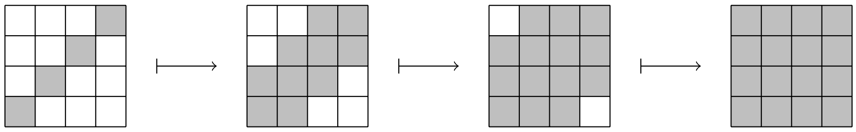
(b) Zeige, dass es jeweils genau vier drei- bzw. vierstellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

(c) Zeige, dass es für jedes beliebige n genau vier n-stellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

Hinweis: Es gibt Teilpunkte, wenn statt „genau“ nur „höchstens“ oder „mindestens“ gezeigt wird.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Eine Möglichkeit ist die folgende. (Es gibt noch etliche weitere.)



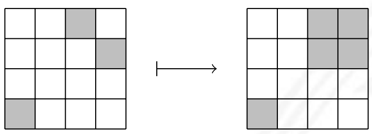
(b) Diese Aufgabe wird durch den Zusatzteil gelöst. Alternativ kann man wie folgt argumentieren.

Betrachtet man eine der beiden äußeren Zeilen, dann hat jede Zelle darin nur einen Nachbarn außerhalb dieser Zeile. Sind also alle Zellen in dieser Zeile gesund, bleiben sie es auch im nächsten Schritt. Daher könnte nie das ganze Feld infiziert werden. Somit muss in jeder der beiden äußeren Zeilen (und analog in beiden äußeren Spalten) mindestens eine Zelle zu Anfang infiziert sein, damit schlussendlich das gesamte Feld infiziert wird.

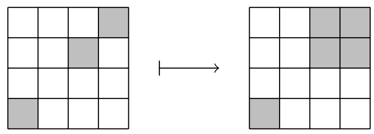
Auch wenn wir zwei benachbarte Zeilen (oder zwei Spalten) betrachten, gilt das gleiche: Jede Zelle hat nur einen Nachbarn außerhalb der beiden Zeilen und daher muss bereits am Anfang eine Zelle in ihnen infiziert sein.

Nehmen wir an, wir hätten nur drei infizierte Zellen, welche das gesamte Feld infizieren. Da es insgesamt vier Randzeilen und -spalten gibt, muss mindestens eine der drei Zellen eine Randzeile und gleichzeitig eine Randspalte abdecken, also in einer Ecke liegen. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass die linke untere Ecke infiziert ist. Wir betrachten nun zwei Fälle: Die rechte obere Ecke ist entweder gesund oder infiziert.

Ist sie gesund, dann ist eine Zelle in der oberen Zeile und eine andere Zelle in der rechten Spalte infiziert. Sind diese beiden Zellen nicht diagonal benachbart, dann hat keine Zelle zwei infizierte Nachbarn und alle gesunden Zellen bleiben gesund. Daher müssen die infizierten Zellen diagonal benachbart sein. In diesem Fall werden aber nur zwei weitere Zellen infiziert:



Wir können also annehmen, dass die rechte obere Ecke infiziert ist. Liegt die letzte infizierte Zelle am Rand des Feldes, sind zwei mittlere Zeilen oder Spalten komplett gesund. Da wir dies bereits ausgeschlossen haben, muss die letzte infizierte Zelle eine der mittleren vier Zellen des Feldes sein. Außerdem muss sie diagonal zu einer der beiden infizierten Ecken benachbart sein, da ansonsten keine weiteren Zellen infiziert werden. Aber auch in diesem Fall werden nur zwei weitere Zellen infiziert:



Daher reichen drei Zellen nicht aus, um das gesamte Feld zu infizieren.

(c) Wie in Teil (a) kann man die Zellen einer Hauptdiagonalen nehmen. Diese infizieren im nächsten Schritt alle Zellen auf den benachbarten Nebendiagonalen, welche danach die Zellen auf den hierzu benachbarten Nebendiagonalen infizieren und so weiter. Nach $n - 1$ Schritten ist das gesamte Feld infiziert.

(d) Wie in der Lösung zu Teil (b) gezeigt, muss in zwei benachbarten Zeilen stets eine infizierte Zelle liegen. Daher liegen in mindestens der Hälfte der Zeilen infizierte Zellen und es sind insgesamt mindestens $\frac{n}{2}$ Zellen infiziert.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Ist eine beliebige Menge von Zellen infiziert, dann zählen wir alle Kanten, die am Rand der infizierten Fläche liegen, also an genau eine infizierte Zelle grenzen. Die Anzahl dieser Kanten nennen wir *Umfang* der Infektion. Schreitet die Infektion wie in der Aufgabe beschrieben fort, dann wird ihr Umfang nicht größer: Jede neu infizierte Zelle hatte im vorherigen Schritt mindestens zwei infizierte Nachbarn und somit jetzt noch höchstens zwei gesunde Nachbarn. Für jede neu infizierte Zelle kommen also höchstens zwei Kanten im Rand hinzu (die Kanten zu den jetzt noch gesunden Nachbarn), es fallen aber auch mindestens zwei Kanten im Rand weg (die zu den bereits zuvor infizierten Nachbarn). Der Umfang wächst also nicht.

Da der Umfang am Ende – also bei komplett infiziertem Feld – genau $4n$ ist, muss er auch am Anfang mindestens $4n$ gewesen sein. Da jedes infizierte Feld zum Umfang bestenfalls 4 beisteuern kann, sind mindestens n infizierte Felder nötig.

Lösung 2. Für diese Aufgabe muss man sich überlegen, mit welchen n Stöckchenlängen es unmöglich ist, ein n-Eck zu legen. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein Stöckchen mindestens so lang ist wie alle anderen Stöckchen zusammen, da es dann unmöglich ist die Enden des längsten Stöckchens mit den anderen Stöckchen zu verbinden und ein „echtes“ n-Eck zu erhalten.

(a) Zum Beispiel vier Stöckchen mit den Längen 10 cm, 10 cm, 10 cm und 40 cm haben diese Eigenschaft. Es ist unmöglich mit den drei 10 cm Stöckchen die 40 cm des längsten Stöckchens zu überbrücken.

(b) Hier müssen die beiden kürzesten Stöckchen zusammen kürzer sein als das zweitlängste Stöckchen (oder gleichlang, was im Folgenden weggelassen wird), so dass man aus den drei kürzesten Stöckchen kein Dreieck legen kann. Die Längen 10 cm, 20 cm und 40 cm erfüllen zum Beispiel diese Bedingung. Nun muss das längste Stöckchen kürzer sein als die gemeinsame Länge der drei kürzesten Stöckchen, das heißt, das vierte Stöckchen muss kürzer als 70 cm sein. Auf der anderen Seite darf sich aber auch aus dem längsten und zwei der drei kürzesten Stöckchen kein Dreieck legen lassen. Also muss das längste Stöckchen länger sein als die gemeinsame Länge des zweit- und drittlängsten Stöckchen, welche zusammen 60 cm lang sind. Als längste Länge kann man also für dieses Beispiel eine beliebige Länge zwischen 60 cm und 70 cm (zum Beispiel 65 cm) wählen.

(c) Die Lösung für Teil (b) lässt sich wie folgt verallgemeinern. Die ersten 100 Stöckchenlängen wählen wir so, dass für jedes $\ell = 1, \dots, 100$ das ℓ-te Stöckchen länger ist als die $\ell - 1$ vorherigen Stöckchen zusammen. Wir können zum Beispiel die zwei kürzesten Längen beliebig wählen und dann wählen wir die dritte Länge als die Summe der ersten beiden plus eins, die vierte Länge als die Summe der ersten drei plus eins usw. Eine explizite Längenfolge die zum Beispiel dieselbe Eigenschaft erreicht, erhält man, indem man dem ℓ-ten Stöckchen eine Länge von 2^ℓ cm zuordnet. Dann erhält man die Längen

$$2\,\text{cm},\ 4\,\text{cm},\ 8\,\text{cm},\ 16\,\text{cm},\ \dots,\ 2^{100}\,\text{cm}.$$

Die Länge des längsten Stöckchens wählt man nun kürzer als die Gesamtlänge der ersten 100 Stöckchen (so dass sich ein 101-Eck legen lässt), aber länger als diese Gesamtlänge minus der Länge des kürzesten Stöckchens. Für die angegebenen Längen können wir zum Beispiel

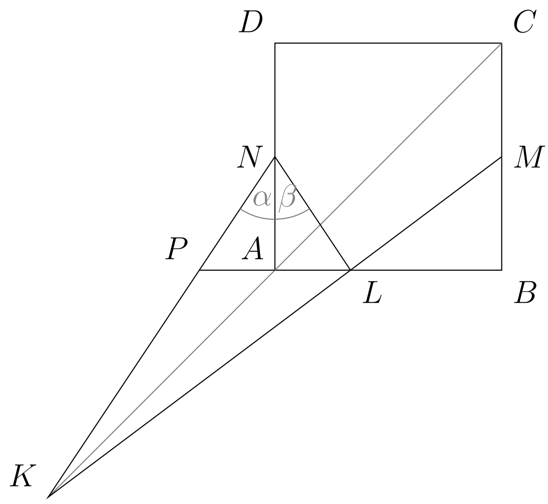
$$(2-1)\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 8\,\text{cm} + 16\,\text{cm} + \cdots + 2^{100}\,\text{cm} = (2^{101}-3)\,\text{cm}$$

auswählen.

Ein 101-Eck lässt sich nun offensichtlich legen. Sei k mit $3 \le k \le 100$ beliebig und seien k Stöckchen beliebig gewählt. Wir müssen zeigen, dass sich aus den Stöckchen kein k-Eck bilden lässt.

Sei x die Länge des längsten der k gewählten Stöckchen. Falls das längste Stöckchen in der Auswahl war (in unserem Beispiel also $x = (2^{101} - 3)\,\text{cm}$), dann lässt sich kein k-Eck legen, da $k < 101$ und nur die Summe aller anderen 100 Stöckchen länger als die Länge des längsten Stöckchens ist. Falls das längste Stöckchen aber nicht dabei ist, dann ist x wegen der angegeben Konstruktion länger als die Gesamtlänge aller kürzeren Stöckchen und insbesondere länger als die Gesamtlänge der anderen $k-1$ gewählten Stöckchen. Somit kann man auch in diesem Fall kein k-Eck legen.

Lösung 3. Es sei P der Schnittpunkt von AB und KN, siehe auch folgende Zeichnung:



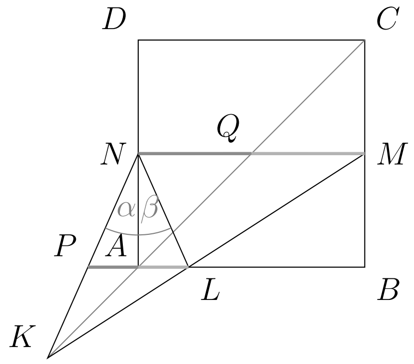
Um $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$ nachzuweisen, wird $|PA| = |AL|$ gezeigt, da die rechtwinkligen Dreiecke ΔPAN und ΔLAN dann ähnlich sind.

(a) Ohne Einschränkung sei $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (2,2)$ und folglich $D = (1,2)$, $K = (0,0)$, $M = (2,3/2)$ und $N = (1,3/2)$. Es werden nun L und P bestimmt:

Da L und M auf einer Geraden durch den Ursprung liegen, ist $L = sM$. Wegen $L = (L_x, 1) = s(2,3/2)$ ist $s = \frac{2}{3}$, also $L = (4/3,1)$. Analog ist $P = (P_x, 1) = tN = t(1,3/2)$, also $t = \frac{2}{3}$ und folglich $P = (2/3,1)$.

Da $|PA| = \frac{1}{3} = |AL|$ ist auch $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$.

(b) Es sei Q der Schnittpunkt von MN und AC. Da M und N Mittelpunkte gegenüberliegender Quadratseiten sind und AC Diagonale des Quadrats, ist Q der Mittelpunkt des Quadrats und somit auch von MN. Siehe auch folgende Zeichnung:



Da M und N Mittelpunkte der Quadratseiten BC bzw. AD sind ist NM parallel zu AB und damit auch zu PL, da P und L auf der Geraden AB definiert wurden. Es kann also der Dreistrahlsatz („dritte" Strahlensatz) auf die Strahlen KN, KQ und KM und die parallelen PL und NM angewendet werden:

$$\frac{|NQ|}{|QM|} = \frac{|PA|}{|AL|}$$

Der Punkt A ist also Mittelpunkt von PL, da Q Mittelpunkt von NM ist:

$$|NQ| = |QM| \Rightarrow |PA| = |AL|$$

Also ist auch $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$.

Bemerkung: Der Dreistrahlsatz ist eine direkte Konsequenz des Strahlensatzes zweimal angewandt, jeweils auf ein Paar der drei Strahlen:

$$\frac{|NQ|}{|KQ|} = \frac{|PA|}{|KA|} \text{ und } \frac{|MQ|}{|KQ|} = \frac{|LA|}{|KA|} \Rightarrow \frac{|NQ|}{|PA|} = \frac{|KQ|}{|KA|} = \frac{|MQ|}{|LA|}$$

Lösung 4. Allgemein bemerkt man, dass eine n-stellige Zahl nur dann mit den letzten n Ziffern ihres Quadrats übereinstimmen kann, wenn schon für jedes $k \leq n$ die letzten k Ziffern der Zahl mit den letzten k Ziffern des Quadrats übereinstimmen.

(a) Die einstelligen Zahlen mit der Eigenschaft sind 0, 1, 5 und 6. Man kann die 40 zweistelligen Zahlen mit diesen Endziffern überprüfen und erhält 00, 01, 25 und 76. (Der Beweis, dass es keine weiteren gibt, erfolgt durch die Angabe der Quadrate oder durch den allgemeinen, letzten Teil.)

(b) Aufgabenteil (a) legt die Vermutung nahe, dass man aus jeder $n-1$-stelligen Zahl mit der Eigenschaft genau eine n-stellige durch Voranstellen einer Ziffer bilden kann. Die 0 und die 1 hat man für jede Anzahl an Stellen. Zu 25 findet man die dreistellige Zahl 625 mit $625^2 = 390625$, weshalb 0625 auch schon eine vierstellige Zahl mit der Eigenschaft ist. Zu 76 findet man 376 mit $376^2 = 141376$. Zu 376 findet man 9376 mit $9376^2 = 87909376$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass es höchstens vier drei- bzw. vierstellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt. Wir geben einen Beweis für dreistellige Zahlen an, der aber für beliebige n-stellige Zahlen verallgemeinert werden kann (siehe alternativer Beweis im letzten Teil).

Sei also a eine dreistellige Zahl mit der gesuchten Eigenschaft. Dann hat $a^2 - a$ am Ende drei Nullen, das heißt $1000 = 2^3 5^3$ teilt $a^2 - a = a(a-1)$, geschrieben $2^3 5^3 \big| a(a-1)$. Da a und $a-1$ teilerfremd sind muss einer der folgenden vier Fälle gelten

i. $2^3 5^3 \big| a$,
ii. $2^3 5^3 \big| a - 1$,
iii. $2^3 \big| a - 1$ und $5^3 \big| a$,
iv. $2^3 \big| a$ und $5^3 \big| a - 1$.

Da 000 die einzige dreistellige Zahl ist, die durch 1000 teilbar ist, gibt es in den Fällen i und ii genau eine Zahl a, die die entsprechenden Eigenschaften erfüllt (nämlich $a = 0$ und $a = 1$).

Es bleibt zu zeigen, dass es jeweils höchstens eine dreistellige Zahl a gibt, die die Fälle iii und iv erfüllt. Wir beschränken uns hier auf den Fall iv, da im Fall iii analog argumentiert werden kann. Angenommen die dreistelligen Zahlen a und b erfüllen

$$\begin{array}{ccc} 2^3 \big| a & \text{und} & 5^3 \big| a - 1 \\ 2^3 \big| b & \text{und} & 5^3 \big| b - 1 \,. \end{array}$$

Dann teilt 2^3 auch $a - b$ und 5^3 auch $(a-1) - (b-1) = a - b$. Also ist $2^3 5^3 = 1000$ ein Teiler von $|a - b|$. Da aber a und b dreistellige Zahlen sind, ist auch $|a - b|$ eine dreistellige Zahl. Wie bereits bemerkt ist 000 die einzige dreistellige Zahl, die durch 1000 teilbar ist. Also ist $a - b = 0$ und damit $a = b$. Das heißt, es gibt höchstens eine dreistellige Zahl die die Eigenschaften aus Fall iv erfüllt.

Alternativ kann man (wie im ersten Teil) jeweils 40 Quadrate angeben, um zu zeigen, dass es keine weiteren drei- bzw. vierstelligen Zahlen gibt.

(c) Es soll allgemein gezeigt werden, dass es für jedes n genau vier n-stellige Zahlen mit der Eigenschaft gibt. Im ersten Aufgabenteil wurde dies bereits für $n = 1$ (Verankerung) gezeigt, für jedes größere n wird (induktiv) gezeigt:

Hat man eine $n-1$-stellige Zahl mit der Eigenschaft und stellt eine Ziffer voran, so hat genau eine der zehn möglichen Zahlen wieder die Eigenschaft.

Sei also $n > 2$, sei a eine $n-1$-stellige Zahl mit der Eigenschaft und z eine Ziffer. Schreiben wir z vor a, so erhalten wir die Zahl $b := 10^{n-1} \cdot z + a$. Nun ist

$$b^2 = (10^{n-1} \cdot z + a)^2 = 10^{2n-2} \cdot z^2 + 2 \cdot 10^{n-1} \cdot z \cdot a + a^2.$$

Der erste Summand hat keinerlei Einfluss auf die letzten n Ziffern, da er auf $2n-2 > n$ Nullen endet. Der zweite Summand hat Einfluss auf die n-te Ziffer von hinten, aber nicht auf die letzten $n-1$ Ziffern, denn er endet auf $n-1$ Nullen. Da a die gewünschte Eigenschaft hat, stimmen die letzten $n-1$ Ziffern von b^2 mit denen von b überein, es bleibt nur die n-te Ziffer von hinten zu überprüfen.

Bezeichnet c die n-te Ziffer von hinten von a^2, dann ist die n-te Ziffer von hinten von b^2 gleich der letzten Ziffer von $2za + c$. Demnach hat b genau dann die gewünschte Eigenschaft, wenn diese letzte Ziffer z ist, also wenn $2za + c - z$ durch 10 teilbar ist. Im ersten Aufgabenteil haben wir gesehen, dass die letzte Ziffer von a eine 0, 1, 5 oder 6 ist. Ist sie eine 0 oder 5, dann ist $2za$ durch 10 teilbar und somit ist $2za + c - z$ genau dann durch 10 teilbar, wenn $c - z$ es ist. In diesem Fall erfüllt b also genau dann die Eigenschaft, wenn $z = c$ ist.

Ist die letzte Ziffer von a eine 1 oder 6, dann ist $2z(a-1)$ durch 10 teilbar. Somit ist $2za + c - z$ genau dann durch 10 teilbar, wenn $2z + c - z = z + c$ es ist. Hier hat b also genau dann die Eigenschaft, wenn $z = c = 0$ ist oder $c \neq 0$ und $z = 10 - c$.

Somit ist gezeigt, dass es stets genau eine Ziffer z gibt, welche durch Voranstellen aus a eine n-stellige Zahl b mit der gewünschten Eigenschaft macht.

Alternativer Beweis: Sei a eine n-stellige Zahl mit der gesuchten Eigenschaft. Dann hat $a^2 - a$ am Ende n Nullen, das heißt, 10^n teilt $a^2 - a$, geschrieben $10^n \big| (a^2 - a)$. Da $a^2 - a$ sich als $a(a-1)$ schreiben lässt und $10^n = 2^n 5^n$, gilt also

$$2^n 5^n \big| a(a-1).$$

Da a und $a-1$ teilerfremd sind, folgt, dass eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt sein muss:

i. $2^n 5^n \big| a$,

ii. $2^n 5^n \big| a - 1$,

iii. $2^n \big| a - 1$ und $5^n \big| a$,

iv. $2^n \big| a$ und $5^n \big| a-1$.

Wir zeigen, dass es für jeden dieser Fälle genau ein mögliches a gibt.

Da $a - 1 < a < 10^n$ ist und 0 die einzige durch 10^n teilbare natürliche Zahl kleiner 10^n ist, folgt in den Fällen i und ii, dass $a = 0$ bzw. $a = 1$ sein muss.

Im Folgenden wird gezeigt, dass es genau eine n-stellige Zahl a gibt mit $5^n \big| a$ und $2^n \big| a - 1$, Fall iv geht analog.

Es gibt 2^n n-stellige a mit $5^n \big| a$: $0 \cdot 5^n$, $1 \cdot 5^n$, $\ldots$, $(2^n - 1) \cdot 5^n$, da $2^n \cdot 5^n = 10^n$ schon $n+1$-stellig ist. Betrachtet man die Reste dieser 2^n Zahlen bei der Teilung durch 2^n, so kommt jeder mögliche Rest 0, 1, $\ldots$, $2^n - 1$ genau einmal vor (der Beweis wird im nächsten Absatz kurz angegeben). Genau dann, wenn der Rest 1 bei der Teilung von a durch 2^n herauskommt, gilt $2^n \big| a - 1$. Es gibt also genau eine Zahl mit der Eigenschaft.

Beweis, dass für teilerfremde k und b unter $0 \cdot b$, $1 \cdot b$, $\ldots$, $(k-1) \cdot b$ jeder Rest bei der Teilung durch k genau einmal vorkommt: Angenommen, ein Rest $r < k$ käme doppelt vor, also $l_1 \cdot b$ und $l_2 \cdot b$ ließen denselben Rest bei der Teilung durch k für $l_1 \neq l_2$ mit $l_1, l_2 \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Dann teilt k auch $l_1 \cdot b - l_2 \cdot b = (l_1 - l_2) \cdot b$. Da k und b teilerfremd sind, muss dann $k \big| l_1 - l_2$ gelten. Weil aber $l_1, l_2 < k$ gilt, kann dies nur für $l_1 - l_2 = 0$ der Fall sein, was für $l_1 \neq l_2$ ausgeschlossen ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass kein Rest doppelt vorkommen kann. Kommt unter den Resten der k Zahlen keiner doppelt vor, muss jeder der k möglichen Reste genau einmal auftreten.