



## Klassenstufen 9, 10

**Aufgabe 1** (6+7+7 Punkte). Zwei Spieler  $A$  und  $B$  spielen auf einem  $2 \times 9$ -Kästchen-Spielfeld. Sie ziehen abwechselnd, Spieler  $A$  beginnt.

Ein Zug besteht darin, zwei noch leere, benachbarte Kästchen mit Kreuzen zu versehen. (Die beiden Kästchen sollen also eine gemeinsame Seite aufweisen.)

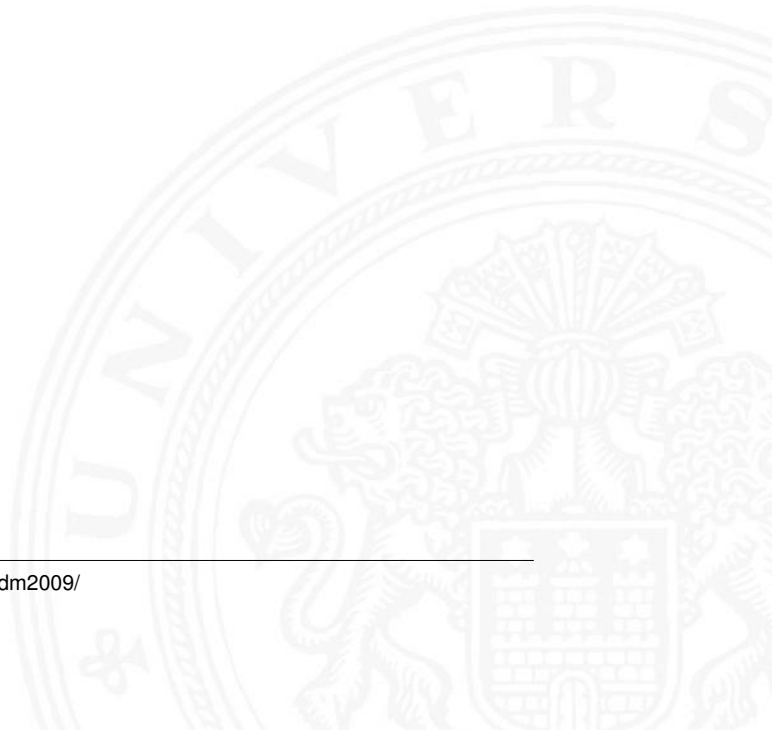
Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, hat gewonnen. Spielt zunächst einige Male!

- (a) Entscheide, ob aus der angegebenen Stellung Spieler  $A$  gewinnen kann. (Der Index gibt jeweils die Zugnummer an.)

	$A_1$		$B_1$	$B_1$		$B_2$	$B_2$	
	$A_1$			$A_2$	$A_2$			

- (b) Zeige, dass Spieler  $A$  bei sinnvoller Spielweise immer gewinnen kann, dass er also eine Gewinnstrategie hat.
- (c) Wir verallgemeinern das Problem auf  $2 \times n$ -Spielfelder, die Definitionen von Zug und Gewinn bleiben.

Untersuche, für welche Zahlen  $n$  Spieler  $A$  eine Gewinnstrategie hat und für welche Zahlen  $n$  der Spieler  $B$ .



**Aufgabe 2** (5+7+8 Punkte). Für jede natürliche Zahl  $n$  sei

$$E(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)\dots(10n+1).$$

- (a) Berechne  $E(1)$  und  $E(2)$ .
- (b) Zeige, dass  $E(3)$  durch 1000 teilbar ist.
- (c) Bestimme den größten gemeinsamen Primteiler der Zahlen  $E(1)$ ,  $E(2)$ ,  $E(3)$ ,  $E(4)$  und  $E(5)$ .

Zusatzteil – wenn noch Zeit bleibt: Ermittle den größten gemeinsamen Teiler (den ggT) der Zahlen  $E(1)$ ,  $E(2)$ ,  $E(3)$ ,  $\dots$ ,  $E(2009)$ .



**Aufgabe 3** (10+10 Punkte). Das Dreieck  $\triangle ABC$  sei rechtwinklig, der Punkt  $C$  liege der Hypotenuse gegenüber. Die Längen der  $A$ ,  $B$  und  $C$  gegenüberliegenden Seiten seien mit  $a$ ,  $b$  bzw.  $c$  bezeichnet. Weiterhin sei  $r$  der Inkreisradius und  $F$  der Flächeninhalt des Dreiecks.

- (a) Begründe die vielleicht schon bekannte Formel

$$r = \frac{2F}{a + b + c}.$$

- (b) Zeige, dass  $F = r(a + b - r)$  gilt.



**Aufgabe 4** (12+7+6 Punkte). Gegeben sind zwei Gleichungen

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1} = 1. \quad (2)$$

Die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  sollen grundsätzlich Primzahlen sein.

- (a) Zunächst sollen die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  aus der Menge  $\{2, 3, 5, 7\}$  gewählt werden. Überprüfe für die Gleichungen (1) und (2), ob es mit diesen Zahlen Lösungen gibt.
- (b) Hat die Gleichung (1) noch weitere Lösungen?
- (c) Hat die Gleichung (2) überhaupt eine Lösung?



## Lösungen 9, 10

**Lösung 1.** (a) Spieler  $A$  kann in dieser Situation gewinnen. Dazu besetzt er in seinem nächsten Zug das Feld in der Ecke unten rechts und das Feld links daneben. Dann gibt es für  $B$  nur noch zwei Möglichkeiten: Er besetzt die beiden Felder ganz links oder er besetzt das dritte Feld von links in der unteren Reihe (sowie das Feld darüber oder rechts davon). Auch nachdem  $B$  einen dieser beiden Züge ausgeführt hat, ist der andere Zug noch möglich.  $A$  macht also den letzten Zug und gewinnt.

(b) Spieler  $A$  beginnt zum Beispiel, indem er zwei Kästchen am Ende „entwertet“ und so Spieler  $B$  ein  $2 \times 8$ -Kästchen-Spielfeld hinterlässt. Nun kann er immer punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des verbleibenden  $2 \times 8$ -Kästchen-Spielfeldes antworten und hat damit den letzten gültigen Zug: Er wird gewinnen.

(c) Evident funktioniert diese Strategie immer dann, wenn  $n$  ungerade ist, denn dann übergibt Spieler  $A$  seinem Gegner ein  $2 \times (2k)$ -Feld, auf dem wieder punktsymmetrisch gezogen werden kann.

Bei geradem  $n$  muss Spieler  $A$  auf einem  $2 \times (2k)$ -Feld beginnen und Spieler  $B$  kann gewinnen, indem er punktsymmetrisch zum Mittelpunkt spielt.

Bemerkung: Es gibt noch etliche andere Gewinnstrategien. Man kann andere Symmetrien verwenden oder auch mit seinen Zügen kleine „Blöcke“ bilden, mit denen man garantiert, dass am Ende das gesamte Feld ausgefüllt ist.

**Lösung 2.** (a) Es ist

$$\begin{aligned} E(1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 = 39916800 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(2) &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 21 = 27498621150 \\ &= 2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1. \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$E(3) = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 31.$$

Somit enthält  $E(3)$  zehnmal den Faktor 2 und dreimal den Faktor 5. Also ist  $E(3)$  durch  $2^3 \cdot 5^3 = 1000$  teilbar.

(c) Da  $E(1)$  nur die Primteiler bis 11 enthält, kann der größte Primteiler nicht größer als 11 sein.

Zu zeigen bleibt, dass 11 als Primteiler in allen fünf Zahlen vorkommt. Für  $E(2)$  und  $E(3)$  haben wir die einzelnen Faktoren bereits ausgerechnet. Nun enthält  $E(4)$  den Faktor  $8 \cdot 4 + 1 = 33$  und  $E(5)$  den Faktor  $2 \cdot 5 + 1 = 11$ . Also kommt 11 in allen fünf Zahlen vor und ist somit der größte Primteiler.

Zusatzaufgabe: Der gesuchte ggT ist  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ . Beweis:

- Für jede Primzahl  $n$  ist von den Faktoren in der Definition von  $E(n)$  nur  $n$  selbst durch  $n$  teilbar. Also enthält der gesuchte ggT jeden der Primfaktoren 2, 3, 5, 7 und 11 höchstens einmal.
- Für  $p = 2, 3, 5, 7, 11$  ist einer der ersten  $p$  Faktoren durch  $p$  teilbar.

Der zweite Punkt lässt sich folgendermaßen einsehen: Falls es unter den Faktoren  $n+1, \dots, (p-1)n+1$  zwei Zahlen gibt, die den gleichen Rest bei der Division durch  $p$  lassen, muss ihre Differenz ein Vielfaches von  $p$  sein. Die Differenz ist von der Form  $kn$ , wobei  $k$  eine positive ganze Zahl kleiner als  $p$  ist. Weil  $p$  eine Primzahl ist, folgt hieraus, dass dann  $n$  ein Vielfaches von  $p$  ist.

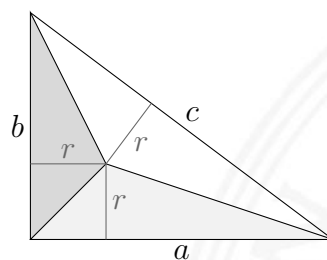
Andernfalls haben die Faktoren  $n+1, \dots, (p-1)n+1$  alle verschiedene Reste bei der Division durch  $p$ . Angenommen, der Rest von einem Faktor  $kn+1$  stimmt mit dem Rest von  $n$  bei der Division durch  $p$  überein. Dann ist sicherlich  $k > 1$  und es folgt, dass  $(kn+1) - n = (k-1)n+1$  durch  $p$  teilbar ist.

Falls keiner der Reste von  $n+1, \dots, (p-1)n+1$  mit dem Rest von  $n$  übereinstimmt, haben die Faktoren  $n, n+1, \dots, (p-1)n+1$  genau  $p$  verschiedene Reste bei der Division durch  $p$ . Da es nur die möglichen Reste  $0, 1, \dots, p-1$  gibt, ist dann einer der Faktoren durch  $p$  teilbar.

Also sind die Faktoren 2, 3, 5, 7 und 11 genau einmal im gesuchten ggT enthalten. Da  $E(1)$  keine größeren Primfaktoren als 11 enthält, hat der ggT keine weiteren Faktoren. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

**Lösung 3.** (a) Addiert man die Flächen der Teildreiecke aus Inkreismitelpunkt und je zwei der Dreiecksecken, so erhält man die Fläche  $F$  des Dreiecks

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}, \quad (3)$$



da die Inkreisradien  $r$  jeweils Höhen sind. Somit gilt für alle Dreiecke

$$r = \frac{2F}{a+b+c}. \quad (4)$$

(b) Da das Dreieck rechtwinklig ist, gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ , daraus folgt

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

bzw. äquivalent

$$\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}. \quad (5)$$

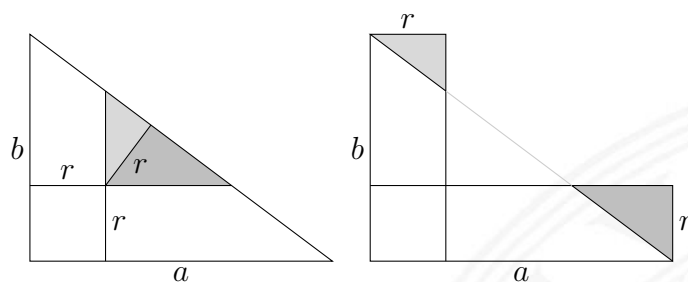
Da in rechtwinkligen Dreiecken  $2F = ab$  ist, sind die rechte Seite von (4) und die linke Seite von (5) gleich, also ist

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2} - r.$$

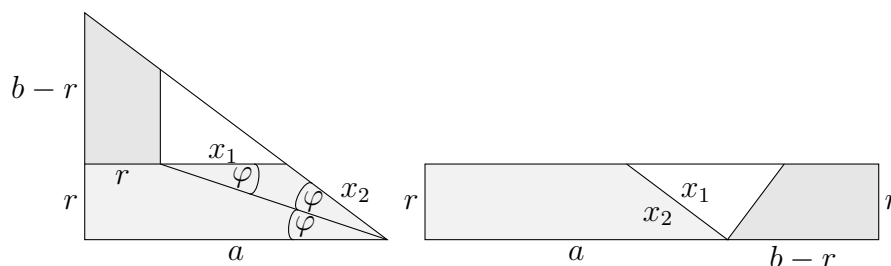
Setzt man dieses in (3) ein, erhält man

$$F = \left( \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} \right) r = (a+b-r)r.$$

Alternative Lösung: Die gleichfarbigen Dreiecke in den nächsten beiden Abbildungen sind jeweils kongruent, da jeweils zwei Winkel und eine Seite übereinstimmen: Der eine Winkel ist ein Scheitelwinkel, der andere  $90^\circ$ ; die Strecke ist der Inkreisradius  $r$ . Somit erhält man eine Figur, welche aus zwei Rechtecken mit Flächeninhalten  $ar$  und  $br$  bestehen, die sich im Quadrat mit Flächeninhalt  $r^2$  überschneiden. Die Fläche ist also  $ar+br-r^2 = (a+b-r)r$ .



2. Alternative Lösung: Wie in den nachfolgenden Abbildungen gezeigt, teilt man das Dreieck auf, setzt es neu zusammen und erhält ein Rechteck mit Kantenlängen  $a+b-r$  und  $r$ .



Es ist zu zeigen, dass das kleine Dreieck wirklich zwischen die Vierecke passt. Abgesehen vom  $90^\circ$ -Winkel werden in beiden Figuren die Winkel des kleinen Dreiecks jeweils von denselben Winkeln zu  $180^\circ$  ergänzt, so dass die kleinen Dreiecke in beiden Figuren ähnlich sind. Bleibt zu zeigen, dass eine Kantenlänge übereinstimmt, damit die kleinen Dreiecke kongruent sind. Dazu muss im großen Dreieck gezeigt werden, dass die in der Abbildung mit  $x_1$  und  $x_2$  bezeichneten Strecken gleich lang sind, da diese im Rechteck aneinander liegen.

Die Strecken  $x_1$  und  $x_2$  sind gleich, da alle eingezeichneten Winkel  $\varphi$  gleich sind, zwei von ihnen sind Wechselwinkel, zwei liegen um die Winkelhalbierende zum Inkreismittelpunkt.

**Lösung 4.** (a) Natürlich können hier alle  $4^3 = 64$  Fälle untersucht werden; es ist aber leicht ersichtlich, dass zumindest  $\frac{p}{q} > 1$  und somit  $p > q$  gelten muss. Dies reduziert das Problem auf folgende 24 Fälle (von denen viele durch Überlegung ebenfalls auszuschließen wären):

$p$	$q$	$r$	$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1}$	$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1}$	$p$	$q$	$r$	$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1}$	$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1}$
3	2	2	1/6	7/6	7	2	2	13/6	19/6
3	2	3	1/2	5/4	7	2	3	5/2	13/4
3	2	5	5/6	4/3	7	2	5	17/6	10/3
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	11/8	7	2	7	3	27/8
5	2	2	7/6	13/6	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	2
5	2	3	3/2	9/4	7	3	3	4/3	25/12
5	2	5	11/6	7/3	7	3	5	5/3	13/6
5	2	7	2	19/8	7	3	7	11/6	53/24
5	3	2	1/3	4/3	7	5	2	1/15	16/15
5	3	3	2/3	17/12	7	5	3	2/5	23/20
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	3/2	7	5	5	11/15	37/30
5	3	7	7/6	37/24	7	5	7	9/10	51/40

Also hat unter den gegebenen Zahlen die Gleichung (1) die drei markierten Lösungen, die Gleichung (2) gar keine.



- (b) Multipliziert man die Gleichung mit  $q(r + 1)$ , ergibt sich  $p(r + 1) - 4q = q(r + 1)$ , also

$$(p - q)(r + 1) = 4q. \quad (6)$$

Folglich muss einer der Faktoren auf der linken Seite ein Vielfaches von  $q$  sein. Dies kann nur für  $r + 1$  gelten, denn wenn  $q$  ein Teiler von  $p - q$  wäre, wäre es auch ein Teiler von  $p$ . Da  $p$  und  $q$  Primzahlen sind, müsste dann  $p = q$  gelten, was aber nicht möglich ist (siehe erster Teil der Aufgabe). Es bleiben drei Fälle zu untersuchen:

1.  $4 \mid p - q$ . Dann müssen  $p$  und  $q$  beide ungerade sein. Da dann die rechte Seite von (6) den Primfaktor 2 nur zweimal enthält, muss  $r + 1$  ungerade sein, also  $r = 2$ . Daher ist  $4q$  wegen (6) durch 3 teilbar, also  $q = 3$ , da  $q$  eine Primzahl ist. Hieraus folgt  $p = 7$ .
2. 2 teilt  $p - q$  genau einmal. Nun kann  $p - q$  keinen ungeraden Primfaktor haben, da dieser sonst auch Teiler von  $q$  wäre. Da  $q$  eine Primzahl ist, müsste es sich bei dem Primfaktor von  $p - q$  also um  $q$  handeln, was wir oben bereits ausgeschlossen haben. Also ist  $p - q = 2$ . Aus (6) folgt damit  $r = 2q - 1$ . Wir haben also  $pqr = (q + 2) \cdot q \cdot (2q - 1)$ , und dieses Produkt ist durch 3 teilbar: Sind die ersten beiden Faktoren nicht durch 3 teilbar, dann muss  $q + 1$  durch 3 teilbar sein. Damit ist dann auch  $2q - 1 = 2(q + 1) - 3$  durch 3 teilbar. Da alle drei Faktoren prim sein sollen, muss einer von ihnen gleich 3 sein. Das geht nur für  $q = 3$ ,  $p = 5$  und  $r = 5$ .
3.  $p - q$  ist ungerade. Da  $p - q$  erneut keinen ungeraden Primfaktor haben kann, haben wir  $p - q = 1$  und daher  $p = 3$  und  $q = 2$ . Aus (6) folgt nun  $r = 7$ .

Also sind die drei Lösungen aus Teil a) alle möglichen Lösungen.

- (c) Formt man die Formel wie im vorherigen Aufgabenteil um, erhält man  $(p - q)(r + 1) = q$ ; dies bedeutet, dass einer der beiden Faktoren auf der linken Seite gleich 1 und der andere gleich  $q$  sein muss.  $r + 1$  ist aber mindestens 3, also muss  $p - q = 1$  gelten. Dies ist nur mit  $p = 3$ ,  $q = 2$  zu erzielen. Folglich muss  $r = 1$  gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Gleichung hat also keine Lösungen.