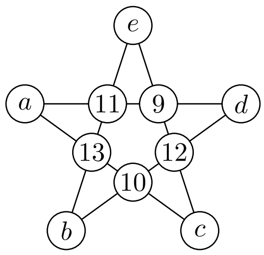
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (6+6+8 Punkte)**.** Magischer Stern:

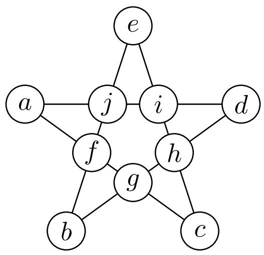


Die Summe S der natürlichen Zahlen entlang jeder der fünf Strecken ist die gleiche Zahl.

(a) Gib eine Lösung für die Variablen a, b, c, d, e an.

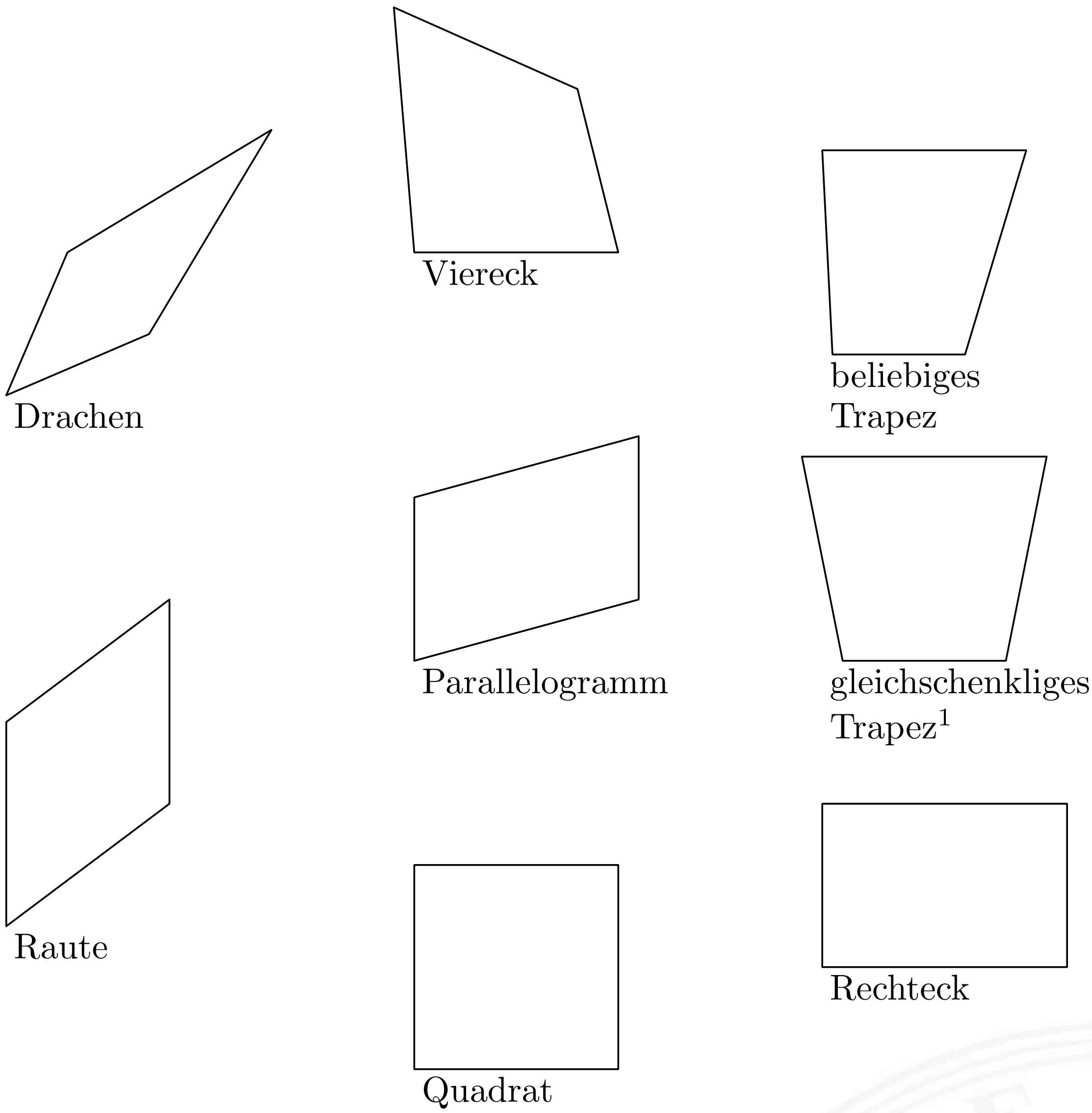
(b) Begründe, dass es für die Variablen a, b, c, d, e unendlich viele Möglichkeiten gibt.

(c) Nun dürfen alle 10 Zahlen frei gewählt werden, auch die mittleren:



Es sollen magische Sterne entstehen, bei denen die Summe S eine ungerade Zahl ist. Begründe, wie viele magische Sterne es mit dieser Eigenschaft gibt.

Aufgabe 2 (15+10 Punkte)**.** Wenn man in einem Viereck $ABCD$ die Mitten der vier Seiten miteinander verbindet, so entsteht ein so genanntes Mittenviereck $EFGH$ (mit E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA).



(Dies sind Beispiele, die Aufgaben stehen auf der nächsten Seite.)

[1]Ein gleichschenkliges Trapez hat eine Spiegelachse senkrecht zu zwei parallelen Seiten.

(a) Kreuze in der folgenden Tabelle an, was das Mittenviereck sein muss. (In manchen Spalten musst du mehrere Kreuze machen; das Mittenviereck ist zum Beispiel sicher immer ein Viereck, es kann aber zusätzlich noch speziellere Eigenschaften haben.)

Das Viereck $ABCD$ ist ein \ Das Mittenviereck ist immer ein	Viereck	Trapez	gleichschenkliges Trapez	Parallelogramm	Drachen	Raute	Rechteck	Quadrat
Viereck								
Trapez								
gleichschenkliges Trapez								
Parallelogramm								
Drachen								
Raute								
Rechteck								
Quadrat								

(b) Beweise deine Aussage in der ersten Zeile der Tabelle, also welche Form das Mittenviereck in jedem beliebigen Viereck (ohne besondere Eigenschaften) hat.

(Dazu kannst du die folgende Aussage als bewiesen voraussetzen: In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.)

Aufgabe 3 (5+7+8 Punkte)**.** Eine Allee hat 600 Bäume. Ein Gärtner pflanzt 5 Krokusse unter jeden vierten Baum, unter jeden sechsten pflanzt er 3 Narzissen und unter jeden zehnten 2 Tulpen.

(a) Berechne wie viele Blumenzwiebeln er insgesamt pflanzt.

(b) Unter wie vielen Bäumen pflanzt er alle drei Arten? Begründe deine Antwort.

(c) Der Gärtner bekommt nur das Pflanzen von 1000 Blumenzwiebeln bezahlt. Also will er auch nicht mehr einpflanzen. Wie kann er das erreichen, wenn er am Pflanzabstand der Sorten nichts ändern will, sondern nur an den Anzahlen, in denen er die einzelnen Sorten pflanzt? Außerdem möchte er weiterhin alle drei Sorten verwenden. Gib alle Möglichkeiten an, wie er auf diese Art genau 1000 Zwiebeln pflanzen kann.

Aufgabe 4 (5+5+10 Punkte)**.** Gegeben ist die Menge der Zahlen $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

(a) Schreibe die jeweiligen Zahlenmengen für $n = 1, \ldots, 10$ auf.

Beispiel: Für $n = 5$ folgt: $n - 1 = 4$, $n + 1 = 6$ und $n^2 + 1 = 26$. Diese Menge hat die Form: $\{4, 5, 6, 26\}$. In dieser Menge ist die Zahl 5 selbst durch 5 teilbar.

(b) Prüfe, ob es in jeder Zahlenmenge von (a) eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

(c) Zeige, dass es für jedes n (auch größer 10) in der Menge eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

Falls noch Zeit ist, könnt ihr folgender Frage nachgehen: Gibt es entsprechende Aussagen für andere Teiler (als 5)?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Durch Probieren kann man zum Beispiel auf folgende Lösungen kommen:

a	b	c	d	e	S
3	1	4	7	5	30
4	2	5	8	6	32
5	3	6	9	7	34

(b) Aus einer Lösung kann man unendlich viele Lösungen erzeugen: Addiert man zu jeder der Zahlen a, b, c, d und e die gleiche natürliche Zahl n, so wird die Summe in jeder Strecke um $2n$ größer. Da vorher alle fünf Summen gleich groß waren, sind sie auch danach gleich groß.

Da es mindestens eine Lösung gibt, gibt es also unendlich viele Lösungen.

Bemerkung: Man erhält auf diese Weise sogar alle weiteren Lösungen aus der Lösung $a = 2, b = 0, c = 3, d = 6, e = 4$ (oder $a = 3, b = 1, c = 4, d = 7, e = 5$, je nachdem, ob 0 als natürliche Zahl betrachtet wird oder nicht). Wenn man die Zahlen a, b, c, d und e verändert, können die Summen auf den beiden Strecken mit den Zahlen $a, 13, 10, c$ beziehungsweise $a, 11, 9, d$ nur dann noch gleich sein, wenn zu c und d die gleiche Zahl addiert wurde. Ebenso kann man argumentieren, dass zu d und e, e und a, a und b beziehungsweise b und c jeweils die gleiche Zahl addiert werden muss. Also erhält man aus einer Lösung höchstens dann eine weitere Lösung, wenn zu allen Zahlen a, b, c, d und e die gleiche ganze Zahl n addiert wird. Aus der Lösung $a = 2, b = 0, c = 3, d = 6, e = 4$ erhält man zudem nur dann eine Lösung (mit natürlichen Zahlen a, b, c, d und e) wenn n eine natürliche Zahl ist, andernfalls wird b negativ.

(c) Addiert man alle fünf Summen, so erhält man die folgende Gleichung:

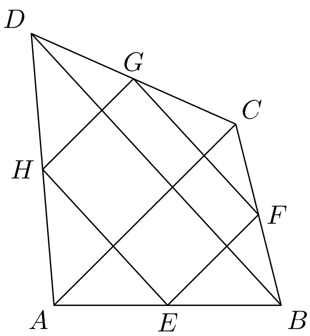
$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h + 2i + 2j = 5S.$$

Der Wert der linken Seite ist eine gerade Zahl. Nach Voraussetzung soll S eine ungerade Zahl sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da das Produkt auf der rechten Seite dann immer ungerade ist.

Lösung 2. (a)

Das Viereck $ABCD$ ist ein	Das Mittenviereck ist immer ein: Viereck	Trapez	gleichschenkliges Trapez	Parallelogramm	Drachen	Raute	Rechteck	Quadrat
Viereck	X	X		X				
Trapez	X	X		X				
gleichschenkliges Trapez	X	X		X	X	X		
Parallelogramm	X	X		X				
Drachen	X	X	X	X			X	
Raute	X	X	X	X			X	
Rechteck	X	X		X	X	X		
Quadrat	X	X	X	X	X	X	X	X

(b) Zu zeigen ist, dass das Mittenviereck eines beliebigen Vierecks $ABCD$ immer ein Viereck, Trapez und Parallelogramm ist. Da jedes Trapez ein Viereck und jedes Parallelogramm ein Trapez ist, müssen wir nur zeigen, dass das Mittenviereck ein Parallelogramm ist.



Wir bezeichnen das Mittenviereck mit $EFGH$ – dabei ist E der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, F der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und so weiter. Wir wollen also zeigen, dass $EF \| HG$ und $FG \| EH$.

Schauen wir uns das Dreieck ΔABC an, liefert uns der Hinweis aus der Aufgabenstellung, dass EF parallel zu AC ist. Entsprechend sehen wir im Dreieck ΔACD, dass HG parallel zu AC ist. Also sind EF und HG parallel. Außerdem liefert uns der Hinweis noch $\left|\overline{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$ und $\left|\overline{HG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$, also sind $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ gleich lang. Somit ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösung 3. (a) Da der Gärtner unter jeden vierten Baum 5 Krokusse setzt, pflanzt er unter insgesamt $600 : 4 = 150$ Bäume insgesamt $5 \cdot 150 = 750$ Krokusse.

Entsprechend pflanzt er unter insgesamt $600 : 6 = 100$ Bäume insgesamt $3 \cdot 100 = 300$ Narzissen, sowie unter insgesamt $600 : 10 = 60$ Bäume insgesamt $2 \cdot 60 = 120$ Tulpen.

Insgesamt pflanzt er also $750 + 300 + 120 = 1170$ Blumenzwiebeln.

(b) Wenn man die Bäume in der Allee durchnummeriert, pflanzt der Gärtner genau unter die Bäume alle drei Sorten, deren Nummer ein Vielfaches von 4, 6 und 10 ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 ist 60, daher sind die gemeinsamen Vielfachen von 4, 6 und 10 die Vielfachen von 60. Da $600 : 60 = 10$, pflanzt der Gärtner unter genau 10 Bäume Blumenzwiebeln aller drei Sorten.

(c) Diesen Vorschlag kann man mit Hilfe der folgenden Gleichung ermöglichen:

$$\begin{aligned} 150x + 100y + 60z &= 1000, \\ 15x + \ \ 10y + \ \ 6z &= 100, \end{aligned}$$

wobei x die Anzahl der Krokusse, y die der Narzissen und z die der Tulpen ist.

z muss ein Vielfaches von 5 sein, weil 100, $15x$ und $10y$ Vielfache von 5 sind. Da der Gärtner jede Sorte pflanzen will, kann z nicht den Wert 0 haben, also gilt $z = 5$ oder $z = 10$.

Da 100, $10y$ und $6z$ gerade Zahlen sind, muss auch x eine gerade Zahl sein. Im Fall $z = 5$ kann x nur die Werte 2 und 4 annehmen, alle anderen positiven geraden Zahlen sind zu groß. Im Fall $z = 10$ muss $x = 2$ gelten.

Daraus ergibt sich, dass es nur folgende drei Möglichkeiten gibt:

$$\begin{aligned} x &= 4, \quad y = 1, \quad z = 5, \\ x &= 2, \quad y = 1, \quad z = 10, \\ x &= 2, \quad y = 4, \quad z = 5. \end{aligned}$$

Lösung 4. (a)

$n-1$	n	$n+1$	n^2+1
$\boxed{0}$	1	2	2
1	2	3	$\boxed{5}$
2	3	4	$\boxed{10}$
3	4	$\boxed{5}$	17
4	$\boxed{5}$	6	26
$\boxed{5}$	6	7	37
6	7	8	$\boxed{50}$
7	8	9	$\boxed{65}$
8	9	$\boxed{10}$	82
9	$\boxed{10}$	11	101

(b) Die in der Tabelle markierten Zahlen sind durch 5 teilbar, da sie entweder auf 0 oder auf 5 enden.

(c) Von den fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ und $n+2$ muss eine durch 5 teilbar sein. Falls $n-1$, n oder $n+1$ durch 5 teilbar ist, gibt es in der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ eine durch 5 teilbare Zahl.

Falls $n-2$ oder $n+2$ durch 5 teilbar ist, dann ist auch $(n-2)(n+2)$ durch 5 teilbar. Nun ist

$$\begin{aligned}(n+2)(n-2) &= n^2 - 2n + 2n - 4 \\ &= n^2 - 4 \\ &= (n^2+1) - 5\end{aligned}$$

und somit ist n^2+1 durch 5 teilbar.

In jedem Fall ist also eine Zahl der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ durch 5 teilbar.

Alternativlösung: Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Die letzten Ziffern der Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 hängen nur von der letzten Ziffer von n ab. Es reicht also, für jeweils eine Zahl mit der Endziffer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 beziehungsweise 9 zu prüfen, ob mindestens eine Zahl aus der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ die Endziffer 0 oder 5 hat. Das wurde bereits in Teilaufgabe b erledigt.