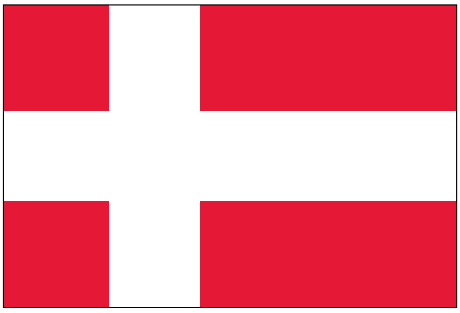
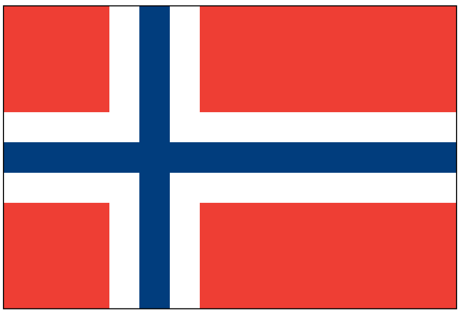
Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (8+7 Punkte). (a) Die dänische Flagge besteht aus einem weißen Kreuz auf rotem Untergrund, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Dabei ist die Flagge 2 Meter hoch und 3 Meter lang, die beiden Balken des Kreuzes sind gleich breit. Wie breit sind diese Balken, wenn die Fläche des weißen Kreuzes ebenso groß ist wie die des Untergrundes?



(b) Die norwegische Flagge besitzt zusätzlich noch ein blaues Kreuz im Inneren des weißen Kreuzes, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Wie breit sind die Balken dieses Kreuzes, wenn die blaue Fläche und die weiße Fläche gleich groß sind?



(Die hier angegebenen Größenverhältnisse entsprechen nicht den wirklichen.)

Aufgabe 2 (30 Punkte)**.** Es seien n verschiedene positive ganze Zahlen gegeben. Überprüfe für $n = 1, \ldots, 10$, ob es möglich ist, dass die Summe dieser n Zahlen gleich ihrem kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist. Es ist für jedes n ein Beispiel in die unten stehende Tabelle einzutragen, beziehungsweise ein Beweis anzugeben, dass es nicht möglich ist.

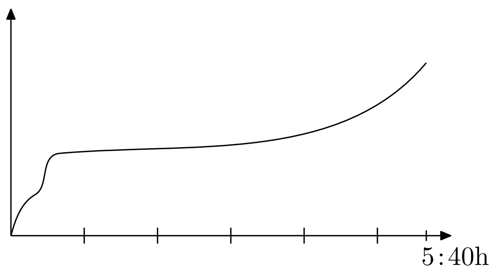
n	Zahlen
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Ein Zug, der eine 100km lange Strecke fährt, hat eine Anzeige für die voraussichtliche Restfahrzeit. Die Restfahrzeit wird dabei unter der Annahme berechnet, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit für die restliche Fahrstrecke genau so hoch sein wird, wie sie für die bereits zurückgelegte gewesen ist.

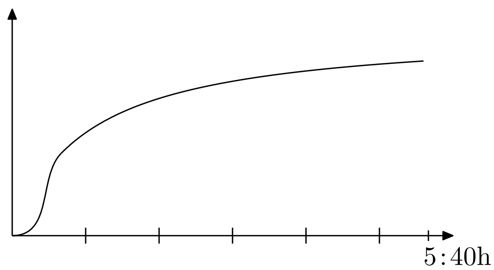
Nach 40 Minuten wird eine Restzeit von einer Stunde angezeigt. Die nächsten fünf Stunden ändert sich die Anzeige nicht.

(a) Nachfolgend sind einige Kurven angegeben, welche die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit darstellen sollen. Welche Kurven können die beschriebene Situation darstellen, welche nicht? (Eine genaue Begründung wird nur für die Kurven erwartet, die nicht möglich sind.)

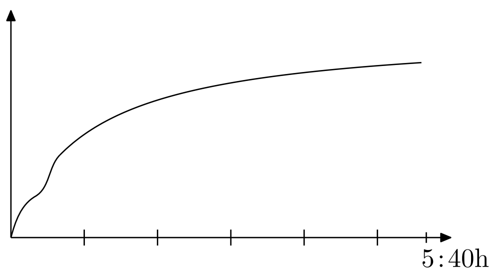
1.



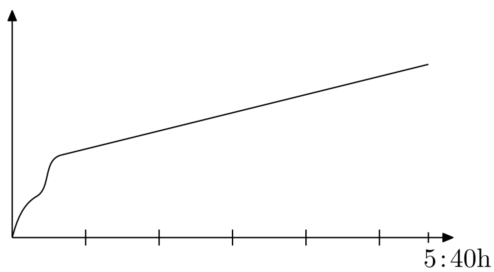
2.



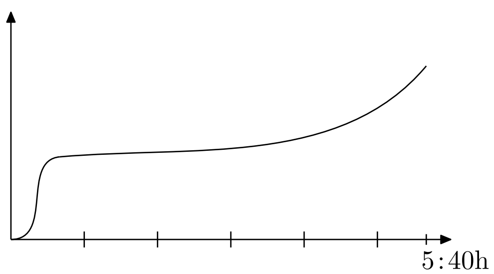
3.



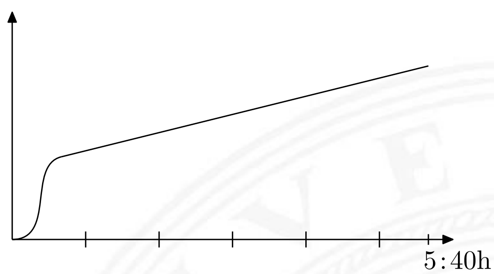
4.



5.



6.



(b) Wie viele Kilometer hat der Zug während dieser fünf Stunden (also in der Zeit zwischen 40 Minuten nach der Abfahrt und 5 Stunden und 40 Minuten nach der Abfahrt) zurückgelegt? (Mit Beweis.)

Aufgabe 4 (10+10 Punkte). Martin und Corinna spielen ein Spiel: Martin wählt ein Kästchen eines Kästchenpapiers aus und Corinna versucht herauszufinden, um welches es sich handelt. Dazu wählt sie in jedem Schritt eine Gerade aus (nicht notwendig parallel zu den Seiten) und Martin teilt ihr daraufhin mit, ob sein Kästchen von der Geraden geteilt wird (also einen inneren Punkt mit ihr gemeinsam hat) und wenn nicht, auf welcher Seite der Geraden das Kästchen liegt.

(a) Corinna möchte herausfinden, ob Martins Kästchen zu einem bestimmten 5×5-Quadrat aus Kästchen gehört. Nach höchstens wie vielen abgefragten Geraden kann sie das feststellen?

(b) Corinna weiß bereits, dass Martins Kästchen zu einem bestimmten 5×5-Quadrat aus Kästchen gehört. Was ist die kleinste Anzahl an Geraden, die sie abfragt, nach der sie Martins Kästchen sicher benennen kann?

Für die Lösungsanzahlen muss jeweils gezeigt werden, dass es mit der Zahl an Fragen stets möglich ist, mit weniger jedoch nicht in jedem Fall.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Die Dicke der weißen Balken sei D. Schiebt man die einzelnen Teile der roten Fläche zusammen, sieht man sofort, dass die rote Fläche gleich $(2-D)(3-D)$ ist. Da die Gesamtfläche der Flagge 6 ist, haben wir

$$\begin{aligned} && (2-D)(3-D) &= 3 \\ \Leftrightarrow && 6-5D+D^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow && D^2-5D+3 &= 0 \\ \Rightarrow && D &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-3} \\ && &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Da offensichtlich $D < 2$ sein muss, folgt $D = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Alternativ kann man auch direkt die weiße Fläche berechnen: Der horizontale Balken hat die Fläche $3D$, der vertikale Balken $2D$. Beide Balken überschneiden sich auf einer Fläche von D^2. Die Berechnung von D ist dann wie zuvor.

(b) Die Dicke der blauen Balken sei d. Wie im ersten Teil erhalten wir, dass das blaue Kreuz die Fläche $5d - d^2$ hat. Dies soll $\frac{3}{2}$ entsprechen, also

$$\begin{aligned} && 5d-d^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow && d^2-5d+\frac{3}{2} &= 0 \\ \Rightarrow && d &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-\frac{3}{2}} \\ && &= \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2} \end{aligned}$$

Also $d = \frac{5-\sqrt{19}}{2}$.

Lösung 2. Für $n = 2$ gibt es keine Lösung: Für $a_1 < a_2$ ist entweder $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) = a_2$ (falls a_2 durch a_1 teilbar ist) oder $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) \geq 2a_2$ (sonst). Da aber $a_2 < a_1 + a_2 < 2a_2$ gilt, folgt $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) \neq a_1 + a_2$.

Für die anderen Werte von n gibt es Lösungen, zum Beispiel:

n	Zahlen
1	1
3	$1, 2, 3$
4	$1, 3, 8, 12$
5	$2, 3, 5, 20, 30$
6	$1, 2, 3, 4, 6, 8$
7	$1, 3, 8, 12, 16, 24, 32$
8	$1, 2, 3, 6, 12, 16, 24, 32$
9	$1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32$
10	$1, 3, 8, 12, 16, 24, 32, 64, 96, 128$

Die Lösungen für $n = 1, 3, 6$ findet man leicht durch Probieren. Die Lösung für $n = 4$ erhält man zum Beispiel aus der Lösung für $n = 6$, indem man die Zahlen $2, 4, 6$ durch 12 ersetzt, was weder an der Summe noch am kgV etwas ändert. (Man beachte, dass $2, 4, 6$ auch eine Lösung für $n = 3$ ist, also identische Summe und kgV hat.)

An den Fällen $n = 3$ und $n = 6$ erkennt man, dass man dort ausschließlich mit Zweierpotenzen sowie dem Dreifachen von Zweierpotenzen auskommt. Folgt man diesem Muster, kann man die Lösung für $n = 9$ finden, indem man zur Lösung für $n = 6$ die Zweierpotenzen 16 und 32 sowie das Dreifache 24 der Zweierpotenz 8 hinzufügt.

Die Lösung für $n = 7$ erhält man nun aus der Lösung für $n = 9$ wie zuvor die Lösung für $n = 4$ aus der Lösung für $n = 6$: Man ersetze die Zahlen $2, 4, 6$ durch ihre Summe (und kgV) 12. Die Lösung für $n = 10$ erhält man analog aus der für $n = 12$. (Dafür sollte man sich Gedanken zur allgemeinen Struktur solcher Lösungen gemacht haben.)

Die Lösung für $n = 8$ erhält man, indem man in der Lösung für $n = 9$ die Zahlen 4 und 8 durch 12 ersetzt. Dies ändert die Summe nicht. Obwohl $\mathrm{kgV}(4, 8) \neq 4 + 8$, ändert sich auch nichts am kgV der (inzwischen 8) Zahlen, da der Primfaktor 3 erhalten bleibt (in den Zahlen 3, 6 und 24), ebenso wie der Primfaktor 2 in der Häufigkeit 5 (nämlich in der Zahl 32).

Die Lösung für $n = 5$ findet man auf anderem Wege. Hier kann man nicht die Lösung für $n = 6$ nehmen und zwei Zahlen durch ihre Summe ersetzen. Eine Möglichkeit, die oben genannte Lösung zu finden, ist wie folgt: Da die Summe der Zahlen gleich ihrem kgV sein soll, muss es sich bei der Summe um eine Zahl mit mehreren verschiedenen Teilern handeln. Es liegt daher nahe, sich eine Zahl mit vielen Teilern auszusuchen und zu versuchen, diese als Summe zu erhalten. Eine Zahl mit bekanntermaßen vielen Teilern ist 60. Wenn man sich deren Teiler notiert (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30), muss man sich noch fünf dieser Teiler heraus suchen, die sich zu 60 summieren und auch alle Primfaktoren von $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ in der richtigen Häufigkeit enthalten. Die Zahlen 12, 15, 20 oder 30 sind somit schon einmal gute Wahlen, da sie bereits jeweils zwei der Primfaktoren abdecken. Man wählt sich nun einige dieser Zahlen aus (am besten so, dass damit bereits alle Primfaktoren abgedeckt sind) und ergänzt mit den restlichen Zahlen zur Summe 60. Auf diese Art erhält man 9 verschiedene Lösungen, nämlich:

$1, 4, 5, 20, 30$	$2, 3, 5, 20, 30$	$1, 3, 6, 20, 30$
$1, 2, 12, 15, 30$	$1, 4, 10, 15, 30$	$4, 5, 6, 15, 30$
$2, 6, 10, 12, 30$	$3, 5, 10, 12, 30$	$3, 10, 12, 15, 20$

Lösung 3. (a) Da die bisherige Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitraumes von 40 Minuten nach der Abfahrt bis 5 Stunden und 40 Minuten nach der Abfahrt stets eine verbleibende Fahrtdauer von 1 Stunde vermuten lässt, muss während dieser Zeit die Durchschnittsgeschwindigkeit also fallen. Damit sind die Kurven 1 und 5 ausgeschlossen, da dort gegen Ende (im Bereich um 5 Stunden) die Durchschnittsgeschwindigkeit steigt.

Die Kurven 4 und 6 verlaufen so, dass die Geschwindigkeit während des entscheidenden Zeitraumes konstant bleibt. Dies kann auch nicht der Fall sein: Ist d die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 1 Stunde und v die konstante Geschwindigkeit des Zuges während der 5 Stunden (jeweils in Kilometern pro Stunde), so läge die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 2 Stunden bei $\frac{1}{2}(d+v)$ und nach 3 Stunden bei $\frac{1}{3}(d+2v)$. Andererseits soll die Durchschnittsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt genau so groß sein wie die noch zu fahrende Strecke (in Kilometern). Also müsste die Durchschnittsgeschwindigkeit innerhalb einer Stunde immer um genau v sinken, also nach 2 Stunden $d-v$ sein und nach 3 Stunden $d-2v$. Wir hätten also die Gleichungen

$$\frac{1}{2}(d+v) = d-v \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{3}(d+2v) = d-2v$$

Löst man die erste Gleichung nach v auf, erhält man $v = \frac{1}{3}d$. Bei der zweiten Gleichung erhält man allerdings $v = \frac{1}{4}d$. Da dies nicht beides richtig sein kann, haben wir einen Widerspruch erreicht. Also können auch die Kurven 4 und 6 nicht den tatsächlichen Verlauf beschreiben.

Die Kurven 2 und 3 widersprechen nicht den Bedingungen: Die Durchschnittsgeschwindigkeit sinkt fortwährend, ebenso die aktuelle Geschwindigkeit während der entscheidenden 5 Stunden. Diese beiden Kurven könnten also beide die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit beschreiben.

Bemerkung: Es ist wichtig, hier von *Durchschnitts*geschwindigkeiten zu sprechen. Die Aufgabenstellung liefert nicht unmittelbar, dass die aktuelle Geschwindigkeit fortlaufend fällt, nur dass die durchschnittliche Geschwindigkeit dies tut.

(b) Zu jeder Zeit zwischen 40 Minuten ($=\frac{2}{3}$ Stunden) nach der Abfahrt und 5 Stunden und 40 Minuten ($=\frac{17}{3}$ Stunden) nach der Abfahrt würde der Zug jeweils nach einer Stunde sein Ziel erreichen, wenn er mit der bisherigen Durchschnittsgeschwindigkeit fährt. Bezeichnet man die Zeit nach der Abfahrt in Stunden mit t und die zurückgelegte Strecke in Kilometern mit $s(t)$, folgt also für $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{17}{3}$:

$$\begin{aligned} & & 100 - s(t) &= 1 \cdot \frac{s(t)}{t} \\ \Leftrightarrow & & 100 \cdot t - s(t) \cdot t &= s(t) \\ \Leftrightarrow & & 100 \cdot t &= s(t) \cdot (1+t) \\ \Leftrightarrow & & 100 \cdot \frac{t}{1+t} &= s(t) \end{aligned}$$

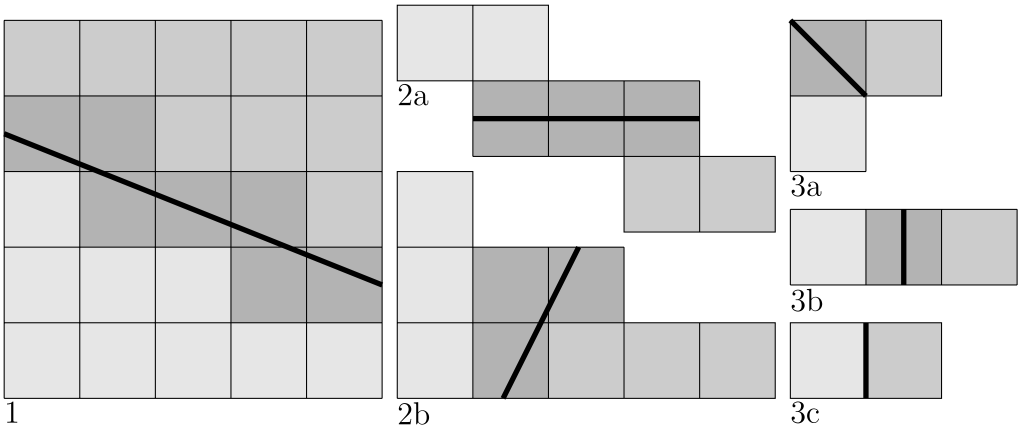
Diese Gleichung liefert, dass der Zug nach 40 Minuten genau 40 Kilometer und nach 5 Stunden und 40 Minuten genau 85 Kilometer zurückgelegt hat. Also ist er innerhalb der 5 Stunden 45 Kilometer gefahren.

Bemerkung: Die Funktion $s(t)$ kann man auch bereits im ersten Aufgabenteil verwenden.

Lösung 4. (a) Mit zwei Geraden kann Corinna nicht in jedem Fall entscheiden, ob sich das ausgewählte Kästchen in einem 5×5-Quadrat befindet, da mit diesen kein „abgeschlossener Bereich“ abgegrenzt werden kann. Mit drei Geraden ist es stets möglich, indem Corinna die erste durch die Diagonale des Quadrats legt. Liegt Martins Kästchen auf einer Seite, wählt Corinna die anderen beiden Geraden durch die beiden Quadratseiten auf der Seite der ersten Geraden, die Martin genannt hat. Genau wenn das Kästchen für beide Geraden jeweils auf der Seite liegt, auf der das Quadrat ist, ist Martins Kästchen im 5×5-Quadrat. Erfährt Corinna von Martin, dass ihre erste Gerade das gewählte Quadrat trifft, kann sie fortfahren, als läge das Quadrat auf einer beliebigen Seite.

(b) Mit zwei Geraden kann Corinna nicht sicher feststellen, welches Kästchen innerhalb eines 5×5-Quadrats Martin gewählt hat: Jede Gerade teilt die Kästchen in drei Gruppen, auf der Geraden bzw. auf einer oder der anderen Seite. Die größte dieser Gruppen enthält mindestens ein Drittel (aufgerundet) aller Kästchen, weshalb Corinna mit zwei Geraden nur eins von $3 \cdot 3 = 9$ Kästchen auszeichnen kann und nicht von 25.

Da $3^3 = 27 \geq 5 \cdot 5 = 25$, ist es mit drei Geraden prinzipiell möglich, mit folgendem Vorgehen auch praktisch:



Im ersten Schritt wählt Corinna die in 1 eingezeichnete Gerade und erfährt, in welchem der drei verschiedenfarbig markierten Bereichen das Kästchen liegt. Im nächsten Schritt muss ein Bereich wie in 2a oder 2b (ggf. gedreht) auf die gleiche Weise untersucht werden, im dritten Schritt einer wie in 3a, 3b oder 3c.