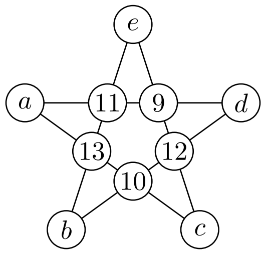
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (6+6+8 Punkte)**.** Magischer Stern:

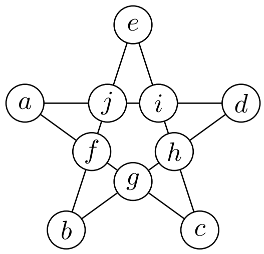


Die Summe S der natürlichen Zahlen entlang jeder der fünf Strecken ist die gleiche Zahl.

(a) Gib eine Lösung für die Variablen a, b, c, d, e an.

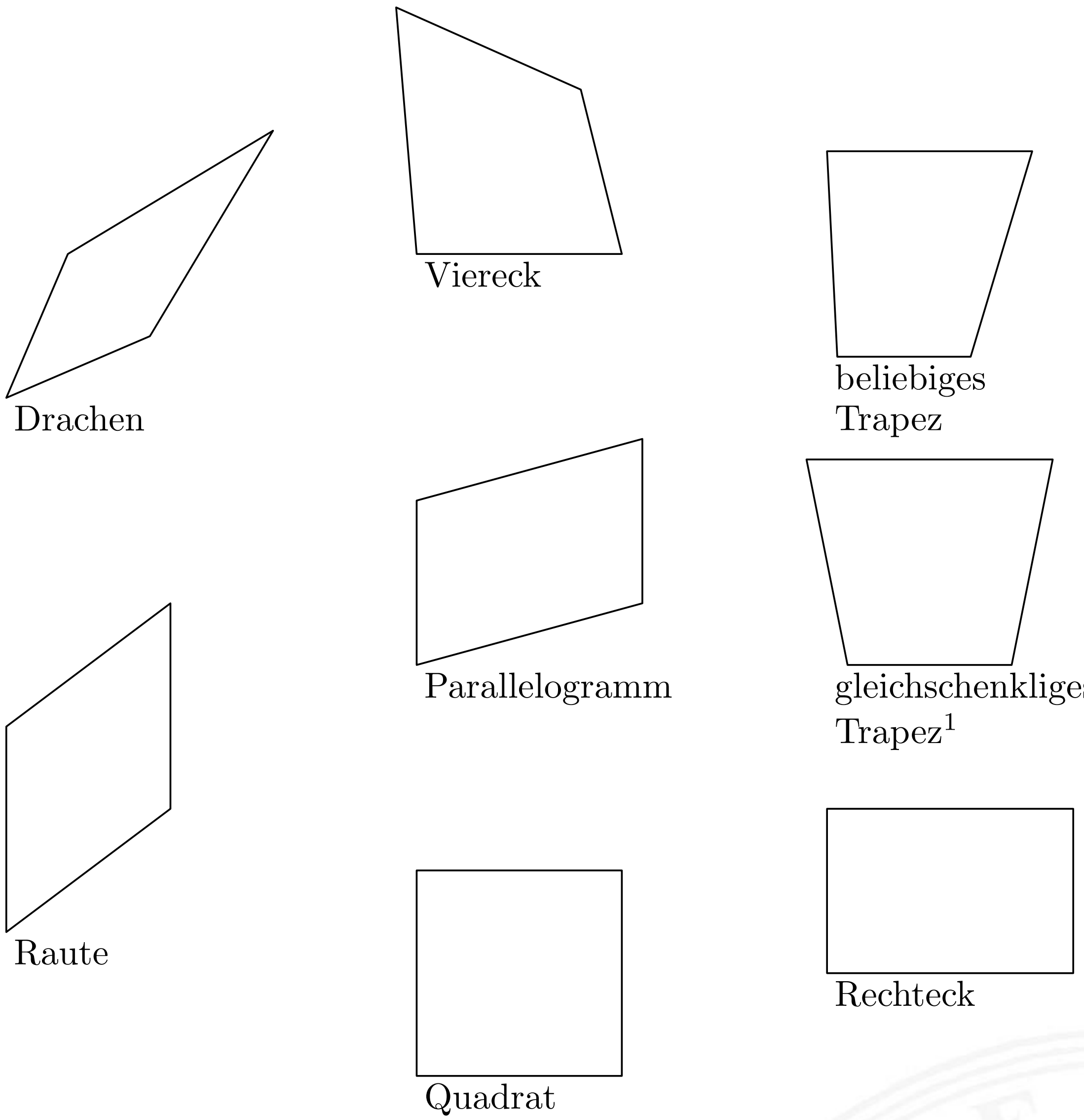
(b) Begründe, dass es für die Variablen a, b, c, d, e unendlich viele Möglichkeiten gibt.

(c) Nun dürfen alle 10 Zahlen frei gewählt werden, auch die mittleren:



Es sollen magische Sterne entstehen, bei denen die Summe S eine ungerade Zahl ist. Begründe, wie viele magische Sterne es mit dieser Eigenschaft gibt.

Aufgabe 2 (15+10 Punkte)**.** Wenn man in einem Viereck $ABCD$ die Mitten der vier Seiten miteinander verbindet, so entsteht ein so genanntes Mittenviereck $EFGH$ (mit E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA).



(Dies sind Beispiele, die Aufgaben stehen auf der nächsten Seite.)

[1] Ein gleichschenkliges Trapez hat eine Spiegelachse senkrecht zu zwei parallelen Seiten.

(a) Kreuze in der folgenden Tabelle an, was das Mittenviereck sein muss. (In manchen Spalten musst du mehrere Kreuze machen; das Mittenviereck ist zum Beispiel sicher immer ein Viereck, es kann aber zusätzlich noch spezielIere Eigenschaften haben.)

Das Viereck $ABCD$ ist ein \ Das Mittenviereck ist immer ein	Viereck	Trapez	gleichschenkliges Trapez	Parallelogramm	Drachen	Raute	Rechteck	Quadrat
Viereck								
Trapez								
gleichschenkliges Trapez								
Parallelogramm								
Drachen								
Raute								
Rechteck								
Quadrat								

(b) Beweise deine Aussage in der ersten Zeile der Tabelle, also welche Form das Mittenviereck in jedem beliebigen Viereck (ohne besondere Eigenschaften) hat.

(Dazu kannst du die folgende Aussage als bewiesen voraussetzen: In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.)

Aufgabe 3 (5+7+8 Punkte). Eine Allee hat 600 Bäume. Ein Gärtner pflanzt 5 Krokusse unter jeden vierten Baum, unter jeden sechsten pflanzt er 3 Narzissen und unter jeden zehnten 2 Tulpen.

(a) Berechne wie viele Blumenzwiebeln er insgesamt pflanzt.

(b) Unter wie vielen Bäumen pflanzt er alle drei Arten? Begründe deine Antwort.

(c) Der Gärtner bekommt nur das Pflanzen von 1000 Blumenzwiebeln bezahlt. Also will er auch nicht mehr einpflanzen. Wie kann er das erreichen, wenn er am Pflanzabstand der Sorten nichts ändern will, sondern nur an den Anzahlen, in denen er die einzelnen Sorten pflanzt? Außerdem möchte er weiterhin alle drei Sorten verwenden. Gib alle Möglichkeiten an, wie er auf diese Art genau 1000 Zwiebeln pflanzen kann.

Aufgabe 4 (5+5+10 Punkte)**.** Gegeben ist die Menge der Zahlen $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

(a) Schreibe die jeweiligen Zahlenmengen für $n = 1, \ldots, 10$ auf.

Beispiel: Für $n = 5$ folgt: $n - 1 = 4$, $n + 1 = 6$ und $n^2 + 1 = 26$. Diese Menge hat die Form: $\{4, 5, 6, 26\}$. In dieser Menge ist die Zahl 5 selbst durch 5 teilbar.

(b) Prüfe, ob es in jeder Zahlenmenge von (a) eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

(c) Zeige, dass es für jedes n (auch größer 10) in der Menge eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

Falls noch Zeit ist, könnt ihr folgender Frage nachgehen: Gibt es entsprechende Aussagen für andere Teiler (als 5)?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Durch Probieren kann man zum Beispiel auf folgende Lösungen kommen:

a	b	c	d	e	S
3	1	4	7	5	30
4	2	5	8	6	32
5	3	6	9	7	34

(b) Aus einer Lösung kann man unendlich viele Lösungen erzeugen: Addiert man zu jeder der Zahlen a, b, c, d und e die gleiche natürliche Zahl n, so wird die Summe in jeder Strecke um $2n$ größer. Da vorher alle fünf Summen gleich groß waren, sind sie auch danach gleich groß.

Da es mindestens eine Lösung gibt, gibt es also unendlich viele Lösungen.

Bemerkung: Man erhält auf diese Weise sogar alle weiteren Lösungen aus der Lösung $a = 2, b = 0, c = 3, d = 6, e = 4$ (oder $a = 3, b = 1, c = 4, d = 7, e = 5$, je nachdem, ob 0 als natürliche Zahl betrachtet wird oder nicht). Wenn man die Zahlen a, b, c, d und e verändert, können die Summen auf den beiden Strecken mit den Zahlen $a, 13, 10, c$ beziehungsweise $a, 11, 9, d$ nur dann noch gleich sein, wenn zu c und d die gleiche Zahl addiert wurde. Ebenso kann man argumentieren, dass zu d und e, e und a, a und b beziehungsweise b und c jeweils die gleiche Zahl addiert werden muss. Also erhält man aus einer Lösung höchstens dann eine weitere Lösung, wenn zu allen Zahlen a, b, c, d und e die gleiche ganze Zahl n addiert wird. Aus der Lösung $a = 2, b = 0, c = 3, d = 6, e = 4$ erhält man zudem nur dann eine Lösung (mit natürlichen Zahlen a, b, c, d und e) wenn n eine natürliche Zahl ist, andernfalls wird b negativ.

(c) Addiert man alle fünf Summen, so erhält man die folgende Gleichung:

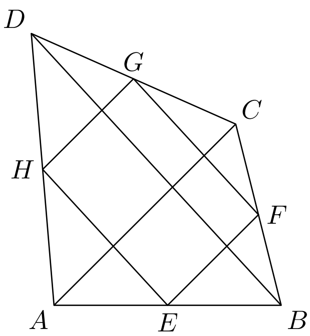
$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h + 2i + 2j = 5S.$$

Der Wert der linken Seite ist eine gerade Zahl. Nach Voraussetzung soll S eine ungerade Zahl sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da das Produkt auf der rechten Seite dann immer ungerade ist.

Lösung 2. (a)

Das Viereck $ABCD$ ist ein \ Das Mittenviereck ist immer ein	Viereck	Trapez	gleichschenkliges Trapez	Parallelogramm	Drachen	Raute	Rechteck	Quadrat
Viereck	X	X		X				
Trapez	X	X		X				
gleichschenkliges Trapez	X	X		X	X	X		
Parallelogramm	X	X		X				
Drachen	X	X	X	X			X	
Raute	X	X	X	X			X	
Rechteck	X	X		X	X	X		
Quadrat	X	X	X	X	X	X	X	X

(b) Zu zeigen ist, dass das Mittenviereck eines beliebigen Vierecks $ABCD$ immer ein Viereck, Trapez und Parallelogramm ist. Da jedes Trapez ein Viereck und jedes Parallelogramm ein Trapez ist, müssen wir nur zeigen, dass das Mittenviereck ein Parallelogramm ist.



Wir bezeichnen das Mittenviereck mit $EFGH$ – dabei ist E der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, F der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und so weiter. Wir wollen also zeigen, dass $EF \| HG$ und $FG \| EH$.

Schauen wir uns das Dreieck ΔABC an, liefert uns der Hinweis aus der Aufgabenstellung, dass EF parallel zu AC ist. Entsprechend sehen wir im Dreieck ΔACD, dass HG parallel zu AC ist. Also sind EF und HG parallel. Außerdem liefert uns der Hinweis noch $\left|\overline{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$ und $\left|\overline{HG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$, also sind $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ gleich lang. Somit ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösung 3. (a) Da der Gärtner unter jeden vierten Baum 5 Krokusse setzt, pflanzt er unter insgesamt $600 : 4 = 150$ Bäume insgesamt $5 \cdot 150 = 750$ Krokusse.

Entsprechend pflanzt er unter insgesamt $600 : 6 = 100$ Bäume insgesamt $3 \cdot 100 = 300$ Narzissen, sowie unter insgesamt $600 : 10 = 60$ Bäume insgesamt $2 \cdot 60 = 120$ Tulpen.

Insgesamt pflanzt er also $750 + 300 + 120 = 1170$ Blumenzwiebeln.

(b) Wenn man die Bäume in der Allee durchnummeriert, pflanzt der Gärtner genau unter die Bäume alle drei Sorten, deren Nummer ein Vielfaches von 4, 6 und 10 ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 ist 60, daher sind die gemeinsamen Vielfachen von 4, 6 und 10 die Vielfachen von 60. Da $600 : 60 = 10$, pflanzt der Gärtner unter genau 10 Bäume Blumenzwiebeln aller drei Sorten.

(c) Diesen Vorschlag kann man mit Hilfe der folgenden Gleichung ermöglichen:

$$\begin{aligned} 150x + 100y + 60z &= 1000, \\ 15x + 10y + 6z &= 100, \end{aligned}$$

wobei x die Anzahl der Krokusse, y die der Narzissen und z die der Tulpen ist.

z muss ein Vielfaches von 5 sein, weil 100, $15x$ und $10y$ Vielfache von 5 sind. Da der Gärtner jede Sorte pflanzen will, kann z nicht den Wert 0 haben, also gilt $z = 5$ oder $z = 10$.

Da 100, $10y$ und $6z$ gerade Zahlen sind, muss auch x eine gerade Zahl sein. Im Fall $z = 5$ kann x nur die Werte 2 und 4 annehmen, alle anderen positiven geraden Zahlen sind zu groß. Im Fall $z = 10$ muss $x = 2$ gelten.

Daraus ergibt sich, dass es nur folgende drei Möglichkeiten gibt:

$$\begin{aligned} x &= 4, \quad y = 1, \quad z = 5, \\ x &= 2, \quad y = 1, \quad z = 10, \\ x &= 2, \quad y = 4, \quad z = 5. \end{aligned}$$

Lösung 4. (a)

$n-1$	n	$n+1$	n^2+1
$\boxed{0}$	1	2	2
1	2	3	$\boxed{5}$
2	3	4	$\boxed{10}$
3	4	$\boxed{5}$	17
4	$\boxed{5}$	6	26
$\boxed{5}$	6	7	37
6	7	8	$\boxed{50}$
7	8	9	$\boxed{65}$
8	9	$\boxed{10}$	82
9	$\boxed{10}$	11	101

(b) Die in der Tabelle markierten Zahlen sind durch 5 teilbar, da sie entweder auf 0 oder auf 5 enden.

(c) Von den fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ und $n+2$ muss eine durch 5 teilbar sein. Falls $n-1$, n oder $n+1$ durch 5 teilbar ist, gibt es in der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ eine durch 5 teilbare Zahl.

Falls $n-2$ oder $n+2$ durch 5 teilbar ist, dann ist auch $(n-2)(n+2)$ durch 5 teilbar. Nun ist

$$\begin{aligned}(n+2)(n-2) &= n^2 - 2n + 2n - 4\\ &= n^2 - 4\\ &= (n^2+1) - 5\end{aligned}$$

und somit ist n^2+1 durch 5 teilbar.

In jedem Fall ist also eine Zahl der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ durch 5 teilbar.

Alternativlösung: Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Die letzten Ziffern der Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 hängen nur von der letzten Ziffer von n ab. Es reicht also, für jeweils eine Zahl mit der Endziffer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 beziehungsweise 9 zu prüfen, ob mindestens eine Zahl aus der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ die Endziffer 0 oder 5 hat. Das wurde bereits in Teilaufgabe b erledigt.

Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1 (6+7+7 Punkte)**.** Zwei Spieler A und B spielen auf einem 2×9-Kästchen-Spielfeld. Sie ziehen abwechselnd, Spieler A beginnt.

Ein Zug besteht darin, zwei noch leere, benachbarte Kästchen mit Kreuzen zu versehen. (Die beiden Kästchen sollen also eine gemeinsame Seite aufweisen.)

Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, hat gewonnen. Spielt zunächst einige Male!

(a) Entscheide, ob aus der angegebenen Stellung Spieler A gewinnen kann. (Der Index gibt jeweils die Zugnummer an.)

	A_1		B_1	B_1		B_2	B_2	
	A_1			A_2	A_2			

(b) Zeige, dass Spieler A bei sinnvoller Spielweise immer gewinnen kann, dass er also eine Gewinnstrategie hat.

(c) Wir verallgemeinern das Problem auf $2 \times n$-Spielfelder, die Definitionen von Zug und Gewinn bleiben.

Untersuche, für welche Zahlen n Spieler A eine Gewinnstrategie hat und für welche Zahlen n der Spieler B.

Aufgabe 2 (5+7+8 Punkte)**.** Für jede natürliche Zahl n sei

$$E(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)\dots(10n+1).$$

(a) Berechne $E(1)$ und $E(2)$.

(b) Zeige, dass $E(3)$ durch 1000 teilbar ist.

(c) Bestimme den größten gemeinsamen Primteiler der Zahlen $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$, $E(4)$ und $E(5)$.

Zusatzteil – wenn noch Zeit bleibt: Ermittle den größten gemeinsamen Teiler (den ggT) der Zahlen $E(1), E(2), E(3), \dots, E(2009)$.

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Das Dreieck ΔABC sei rechtwinklig, der Punkt C liege der Hypotenuse gegenüber. Die Längen der A, B und C gegenüberliegenden Seiten seien mit a, b bzw. c bezeichnet. Weiterhin sei r der Inkreisradius und F der Flächeninhalt des Dreiecks.

(a) Begründe die vielleicht schon bekannte Formel

$$r = \frac{2F}{a+b+c}.$$

(b) Zeige, dass $F = r(a+b-r)$ gilt.

Aufgabe 4 (12+7+6 Punkte)**.** Gegeben sind zwei Gleichungen

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1} = 1. \tag{2}$$

Die Zahlen p, q und r sollen grundsätzlich Primzahlen sein.

(a) Zunächst sollen die Zahlen p, q und r aus der Menge $\{2, 3, 5, 7\}$ gewählt werden. Überprüfe für die Gleichungen (1) und (2), ob es mit diesen Zahlen Lösungen gibt.

(b) Hat die Gleichung (1) noch weitere Lösungen?

(c) Hat die Gleichung (2) überhaupt eine Lösung?

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Spieler A kann in dieser Situation gewinnen. Dazu besetzt er in seinem nächsten Zug das Feld in der Ecke unten rechts und das Feld links daneben. Dann gibt es für B nur noch zwei Möglichkeiten: Er besetzt die beiden Felder ganz links oder er besetzt das dritte Feld von links in der unteren Reihe (sowie das Feld darüber oder rechts davon). Auch nachdem B einen dieser beiden Züge ausgeführt hat, ist der andere Zug noch möglich. A macht also den letzten Zug und gewinnt.

(b) Spieler A beginnt zum Beispiel, indem er zwei Kästchen am Ende „entwertet“ und so Spieler B ein 2×8-Kästchen-Spielfeld hinterlässt. Nun kann er immer punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des verbleibenden 2×8-Kästchen-Spielfeldes antworten und hat damit den letzten gültigen Zug: Er wird gewinnen.

(c) Ersichtlich funktioniert diese Strategie immer dann, wenn n ungerade ist, denn dann übergibt Spieler A seinem Gegner ein $2 \times (2k)$-Feld, auf dem wieder punktsymmetrisch gezogen werden kann.

Bei geradem n muss Spieler A auf einem $2 \times (2k)$-Feld beginnen und Spieler B kann gewinnen, indem er punktsymmetrisch zum Mittelpunkt spielt.

Bemerkung: Es gibt noch etliche andere Gewinnstrategien. Man kann andere Symmetrien verwenden oder auch mit seinen Zügen kleine „Blöcke“ bilden, mit denen man garantiert, dass am Ende das gesamte Feld ausgefüllt ist.

Lösung 2. (a) Es ist

$$\begin{aligned} E(1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 11 = 39916800 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(2) &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 21 = 27498621150 \\ &= 2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1. \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$E(3) = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 31.$$

Somit enthält $E(3)$ zehnmal den Faktor 2 und dreimal den Faktor 5. Also ist $E(3)$ durch $2^3 \cdot 5^3 = 1000$ teilbar.

(c) Da $E(1)$ nur die Primteiler bis 11 enthält, kann der größte Primteiler nicht größer als 11 sein.

Zu zeigen bleibt, dass 11 als Primteiler in allen fünf Zahlen vorkommt. Für $E(2)$ und $E(3)$ haben wir die einzelnen Faktoren bereits ausgerechnet. Nun enthält $E(4)$ den Faktor $8 \cdot 4 + 1 = 33$ und $E(5)$ den Faktor $2 \cdot 5 + 1 = 11$. Also kommt 11 in allen fünf Zahlen vor und ist somit der größte Primteiler.

Zusatzaufgabe: Der gesuchte ggT ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Beweis:

- Für jede Primzahl n ist von den Faktoren in der Definition von $E(n)$ nur n selbst durch n teilbar. Also enthält der gesuchte ggT jeden der Primfaktoren 2, 3, 5, 7 und 11 höchstens einmal.

- Für $p = 2, 3, 5, 7, 11$ ist einer der ersten p Faktoren durch p teilbar.

Der zweite Punkt lässt sich folgendermaßen einsehen: Falls es unter den Faktoren $n+1, \ldots, (p-1)n+1$ zwei Zahlen gibt, die den gleichen Rest bei der Division durch p lassen, muss ihre Differenz ein Vielfaches von p sein. Die Differenz ist von der Form kn, wobei k eine positive ganze Zahl kleiner als p ist. Weil p eine Primzahl ist, folgt hieraus, dass dann n ein Vielfaches von p ist.

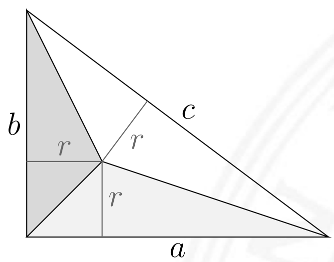
Andernfalls haben die Faktoren $n+1, \ldots, (p-1)n+1$ alle verschiedene Reste bei der Division durch p. Angenommen, der Rest von einem Faktor $kn+1$ stimmt mit dem Rest von n bei der Division durch p überein. Dann ist sicherlich $k > 1$ und es folgt, dass $(kn+1) - n = (k-1)n + 1$ durch p teilbar ist.

Falls keiner der Reste von $n+1, \ldots, (p-1)n+1$ mit dem Rest von n übereinstimmt, haben die Faktoren $n, n+1, \ldots, (p-1)n+1$ genau p verschiedene Reste bei der Division durch p. Da es nur die möglichen Reste $0, 1, \ldots, p-1$ gibt, ist dann einer der Faktoren durch p teilbar.

Also sind die Faktoren 2, 3, 5, 7 und 11 genau einmal im gesuchten ggT enthalten. Da $E(1)$ keine größeren Primfaktoren als 11 enthält, hat der ggT keine weiteren Faktoren. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Lösung 3. (a) Addiert man die Flächen der Teildreiecke aus Inkreismittelpunkt und je zwei der Dreiecksecken, so erhält man die Fläche F des Dreiecks

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}, \tag{3}$$



da die Inkreisradien r jeweils Höhen sind. Somit gilt für alle Dreiecke

$$r = \frac{2F}{a+b+c}. \tag{4}$$

(b) Da das Dreieck rechtwinklig ist, gilt $a^2 + b^2 = c^2$, daraus folgt

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

bzw. äquivalent

$$\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}. \tag{5}$$

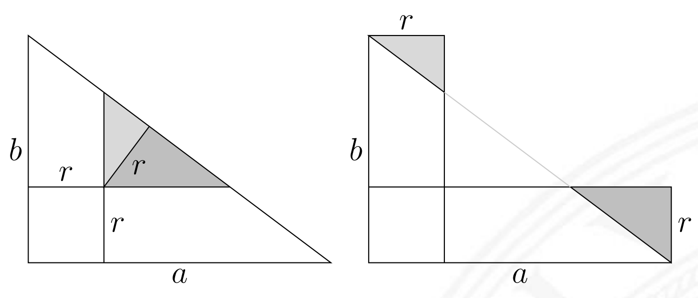
Da in rechtwinkligen Dreiecken $2F = ab$ ist, sind die rechte Seite von (4) und die linke Seite von (5) gleich, also ist

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2} - r.$$

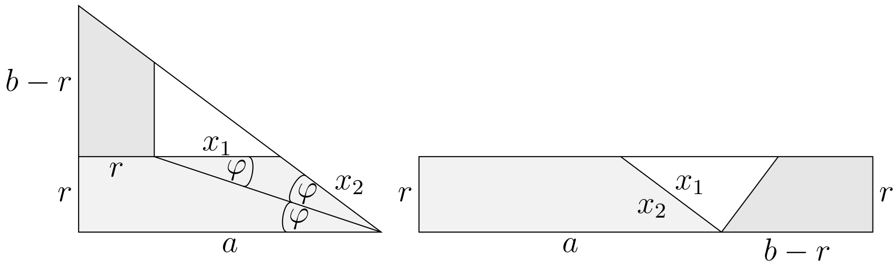
Setzt man dieses in (3) ein, erhält man

$$F = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c}{2}\right) r = (a+b-r)r.$$

Alternative Lösung: Die gleichfarbigen Dreiecke in den nächsten beiden Abbildungen sind jeweils kongruent, da jeweils zwei Winkel und eine Seite übereinstimmen: Der eine Winkel ist ein Scheitelwinkel, der andere 90°; die Strecke ist der Inkreisradius r. Somit erhält man eine Figur, welche aus zwei Rechtecken mit Flächeninhalten ar und br bestehen, die sich im Quadrat mit Flächeninhalt r^2 überschneiden. Die Fläche ist also $ar+br-r^2 = (a+b-r)r$.



2. Alternative Lösung: Wie in den nachfolgenden Abbildungen gezeigt, teilt man das Dreieck auf, setzt es neu zusammen und erhält ein Rechteck mit Kantenlängen $a+b-r$ und r.



Es ist zu zeigen, dass das kleine Dreieck wirklich zwischen die Vierecke passt. Abgesehen vom 90°-Winkel werden in beiden Figuren die Winkel des kleinen Dreiecks jeweils von denselben Winkeln zu 180° ergänzt, so dass die kleinen Dreiecke in beiden Figuren ähnlich sind. Bleibt zu zeigen, dass eine Kantenlänge übereinstimmt, damit die kleinen Dreiecke kongruent sind. Dazu muss im großen Dreieck gezeigt werden, dass die in der Abbildung mit x_1 und x_2 bezeichneten Strecken gleich lang sind, da diese im Rechteck aneinander liegen.

Die Strecken x_1 und x_2 sind gleich, da alle eingezeichneten Winkel φ gleich sind, zwei von ihnen sind Wechselwinkel, zwei liegen um die Winkelhalbierende zum Inkreismittelpunkt.

Lösung 4. (a) Natürlich können hier alle $4^3 = 64$ Fälle untersucht werden; es ist aber leicht ersichtlich, dass zumindest $\frac{p}{q} > 1$ und somit $p > q$ gelten muss. Dies reduziert das Problem auf folgende 24 Fälle (von denen viele durch Überlegung ebenfalls auszuschließen wären):

p	q	r	$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1}$	$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1}$	p	q	r	$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1}$	$\frac{p}{q} - \frac{1}{r+1}$
3	2	2	1/6	7/6	7	2	2	13/6	19/6
3	2	3	1/2	5/4	7	2	3	5/2	13/4
3	2	5	5/6	4/3	7	2	5	17/6	10/3
$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{1}$	11/8	7	2	7	3	27/8
5	2	2	7/6	13/6	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	2
5	2	3	3/2	9/4	7	3	3	4/3	25/12
5	2	5	11/6	7/3	7	3	5	5/3	13/6
5	2	7	2	19/8	7	3	7	11/6	53/24
5	3	2	1/3	4/3	7	5	2	1/15	16/15
5	3	3	2/3	17/12	7	5	3	2/5	23/20
$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	3/2	7	5	5	11/15	37/30
5	3	7	7/6	37/24	7	5	7	9/10	51/40

Also hat unter den gegebenen Zahlen die Gleichung (1) die drei markierten Lösungen, die Gleichung (2) gar keine.

(b) Multipliziert man die Gleichung mit $q(r+1)$, ergibt sich $p(r+1) - 4q = q(r+1)$, also

$$(p-q)(r+1) = 4q. \tag{6}$$

Folglich muss einer der Faktoren auf der linken Seite ein Vielfaches von q sein. Dies kann nur für $r+1$ gelten, denn wenn q ein Teiler von $p-q$ wäre, wäre es auch ein Teiler von p. Da p und q Primzahlen sind, müsste dann $p = q$ gelten, was aber nicht möglich ist (siehe erster Teil der Aufgabe). Es bleiben drei Fälle zu untersuchen:

1. $4 \big| p-q$. Dann müssen p und q beide ungerade sein. Da dann die rechte Seite von (6) den Primfaktor 2 nur zweimal enthält, muss $r+1$ ungerade sein, also $r = 2$. Daher ist $4q$ wegen (6) durch 3 teilbar, also $q = 3$, da q eine Primzahl ist. Hieraus folgt $p = 7$.
2. 2 teilt $p-q$ genau einmal. Nun kann $p-q$ keinen ungeraden Primfaktor haben, da dieser sonst auch Teiler von q wäre. Da q eine Primzahl ist, müsste es sich bei dem Primfaktor von $p-q$ also um q handeln, was wir oben bereits ausgeschlossen haben. Also ist $p-q = 2$. Aus (6) folgt damit $r = 2q-1$. Wir haben also $pqr = (q+2) \cdot q \cdot (2q-1)$, und dieses Produkt ist durch 3 teilbar: Sind die ersten beiden Faktoren nicht durch 3 teilbar, dann muss $q+1$ durch 3 teilbar sein. Damit ist dann auch $2q-1 = 2(q+1) - 3$ durch 3 teilbar. Da alle drei Faktoren prim sein sollen, muss einer von ihnen gleich 3 sein. Das geht nur für $q = 3$, $p = 5$ und $r = 5$.
3. $p-q$ ist ungerade. Da $p-q$ erneut keinen ungeraden Primfaktor haben kann, haben wir $p-q = 1$ und daher $p = 3$ und $q = 2$. Aus (6) folgt nun $r = 7$.

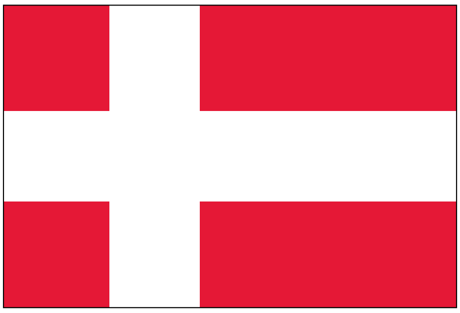
Also sind die drei Lösungen aus Teil a) alle möglichen Lösungen.

(c) Formt man die Formel wie im vorherigen Aufgabenteil um, erhält man $(p-q)(r+1) = q$; dies bedeutet, dass einer der beiden Faktoren auf der linken Seite gleich 1 und der andere gleich q sein muss. $r+1$ ist aber mindestens 3, also muss $p-q = 1$ gelten. Dies ist nur mit $p = 3, q = 2$ zu erzielen. Folglich muss $r = 1$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung.

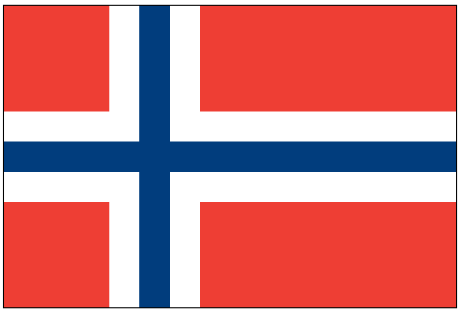
Die Gleichung hat also keine Lösungen.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (8+7 Punkte). (a) Die dänische Flagge besteht aus einem weißen Kreuz auf rotem Untergrund, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Dabei ist die Flagge 2 Meter hoch und 3 Meter lang, die beiden Balken des Kreuzes sind gleich breit. Wie breit sind diese Balken, wenn die Fläche des weißen Kreuzes ebenso groß ist wie die des Untergrundes?



(b) Die norwegische Flagge besitzt zusätzlich noch ein blaues Kreuz im Inneren des weißen Kreuzes, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Wie breit sind die Balken dieses Kreuzes, wenn die blaue Fläche und die weiße Fläche gleich groß sind?



(Die hier angegebenen Größenverhältnisse entsprechen nicht den wirklichen.)

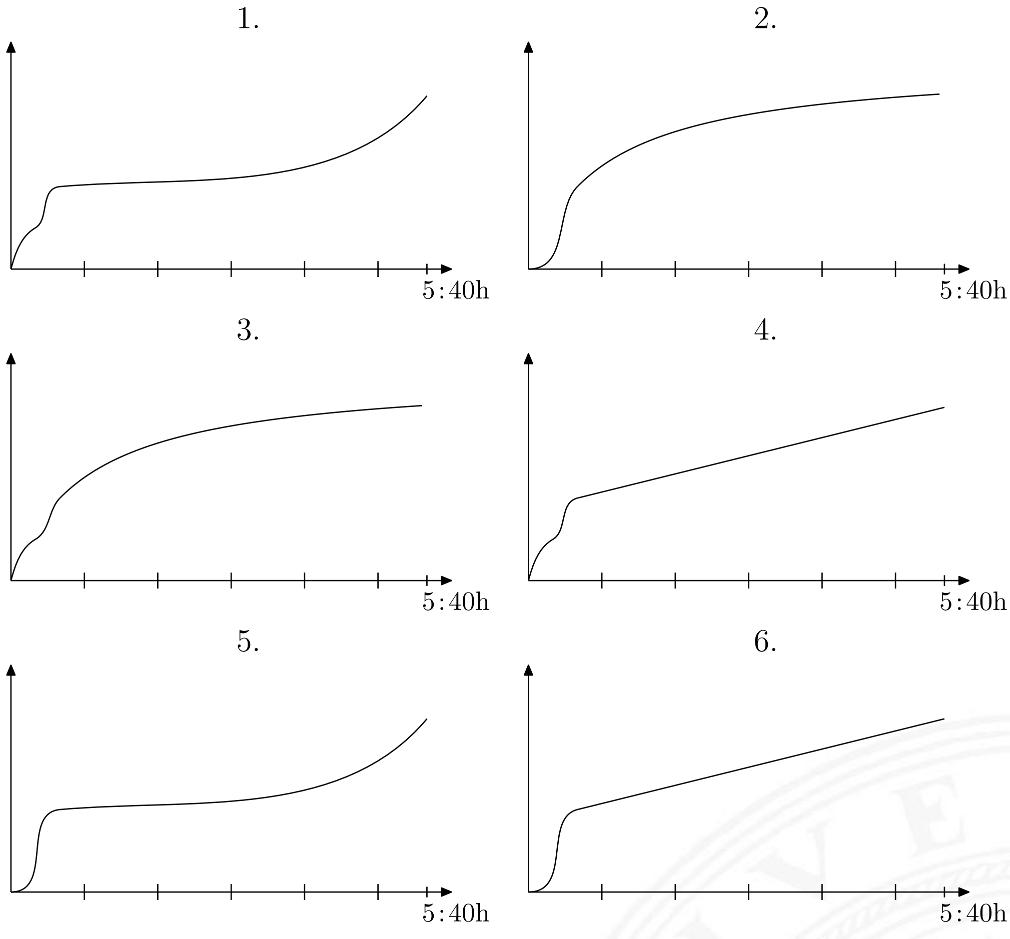
Aufgabe 2 (30 Punkte)**.** Es seien n verschiedene positive ganze Zahlen gegeben. Überprüfe für $n = 1, \dots, 10$, ob es möglich ist, dass die Summe dieser n Zahlen gleich ihrem kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist. Es ist für jedes n ein Beispiel in die unten stehende Tabelle einzutragen, beziehungsweise ein Beweis anzugeben, dass es nicht möglich ist.

n	Zahlen
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Ein Zug, der eine 100km lange Strecke fährt, hat eine Anzeige für die voraussichtliche Restfahrzeit. Die Restfahrzeit wird dabei unter der Annahme berechnet, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit für die restliche Fahrstrecke genau so hoch sein wird, wie sie für die bereits zurückgelegte gewesen ist.

Nach 40 Minuten wird eine Restzeit von einer Stunde angezeigt. Die nächsten fünf Stunden ändert sich die Anzeige nicht.

(a) Nachfolgend sind einige Kurven angegeben, welche die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit darstellen sollen. Welche Kurven können die beschriebene Situation darstellen, welche nicht? (Eine genaue Begründung wird nur für die Kurven erwartet, die nicht möglich sind.)



(b) Wie viele Kilometer hat der Zug während dieser fünf Stunden (also in der Zeit zwischen 40 Minuten nach der Abfahrt und 5 Stunden und 40 Minuten nach der Abfahrt) zurückgelegt? (Mit Beweis.)

Aufgabe 4 (10+10 Punkte)**.** Martin und Corinna spielen ein Spiel: Martin wählt ein Kästchen eines Kästchenpapiers aus und Corinna versucht herauszufinden, um welches es sich handelt. Dazu wählt sie in jedem Schritt eine Gerade aus (nicht notwendig parallel zu den Seiten) und Martin teilt ihr daraufhin mit, ob sein Kästchen von der Geraden geteilt wird (also einen inneren Punkt mit ihr gemeinsam hat) und wenn nicht, auf welcher Seite der Geraden das Kästchen liegt.

(a) Corinna möchte herausfinden, ob Martins Kästchen zu einem bestimmten 5×5-Quadrat aus Kästchen gehört. Nach höchstens wie vielen abgefragten Geraden kann sie das feststellen?

(b) Corinna weiß bereits, dass Martins Kästchen zu einem bestimmten 5×5-Quadrat aus Kästchen gehört. Was ist die kleinste Anzahl an Geraden, die sie abfragt, nach der sie Martins Kästchen sicher benennen kann?

Für die Lösungsanzahlen muss jeweils gezeigt werden, dass es mit der Zahl an Fragen stets möglich ist, mit weniger jedoch nicht in jedem Fall.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Die Dicke der weißen Balken sei D. Schiebt man die einzelnen Teile der roten Fläche zusammen, sieht man sofort, dass die rote Fläche gleich $(2-D)(3-D)$ ist. Da die Gesamtfläche der Flagge 6 ist, haben wir

$$\begin{aligned} & & (2-D)(3-D) &= 3 \\ &\Leftrightarrow & 6-5D+D^2 &= 3 \\ &\Leftrightarrow & D^2-5D+3 &= 0 \\ &\Rightarrow & D &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-3} \\ & & &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Da offensichtlich $D < 2$ sein muss, folgt $D = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Alternativ kann man auch direkt die weiße Fläche berechnen: Der horizontale Balken hat die Fläche $3D$, der vertikale Balken $2D$. Beide Balken überschneiden sich auf einer Fläche von D^2. Die Berechnung von D ist dann wie zuvor.

(b) Die Dicke der blauen Balken sei d. Wie im ersten Teil erhalten wir, dass das blaue Kreuz die Fläche $5d - d^2$ hat. Dies soll $\frac{3}{2}$ entsprechen, also

$$\begin{aligned} & & 5d-d^2 &= \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow & d^2-5d+\frac{3}{2} &= 0 \\ &\Rightarrow & d &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-\frac{3}{2}} \\ & & &= \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2} \end{aligned}$$

Also $d = \frac{5-\sqrt{19}}{2}$.

Lösung 2. Für $n = 2$ gibt es keine Lösung: Für $a_1 < a_2$ ist entweder $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) = a_2$ (falls a_2 durch a_1 teilbar ist) oder $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) \geq 2a_2$ (sonst). Da aber $a_2 < a_1 + a_2 < 2a_2$ gilt, folgt $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) \neq a_1 + a_2$.

Für die anderen Werte von n gibt es Lösungen, zum Beispiel:

n	Zahlen
1	1
3	$1, 2, 3$
4	$1, 3, 8, 12$
5	$2, 3, 5, 20, 30$
6	$1, 2, 3, 4, 6, 8$
7	$1, 3, 8, 12, 16, 24, 32$
8	$1, 2, 3, 6, 12, 16, 24, 32$
9	$1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32$
10	$1, 3, 8, 12, 16, 24, 32, 64, 96, 128$

Die Lösungen für $n = 1, 3, 6$ findet man leicht durch Probieren. Die Lösung für $n = 4$ erhält man zum Beispiel aus der Lösung für $n = 6$, indem man die Zahlen $2, 4, 6$ durch 12 ersetzt, was weder an der Summe noch am kgV etwas ändert. (Man beachte, dass $2, 4, 6$ auch eine Lösung für $n = 3$ ist, also identische Summe und kgV hat.)

An den Fällen $n = 3$ und $n = 6$ erkennt man, dass man dort ausschließlich mit Zweierpotenzen sowie dem Dreifachen von Zweierpotenzen auskommt. Folgt man diesem Muster, kann man die Lösung für $n = 9$ finden, indem man zur Lösung für $n = 6$ die Zweierpotenzen 16 und 32 sowie das Dreifache 24 der Zweierpotenz 8 hinzufügt.

Die Lösung für $n = 7$ erhält man nun aus der Lösung für $n = 9$ wie zuvor die Lösung für $n = 4$ aus der Lösung für $n = 6$: Man ersetze die Zahlen $2, 4, 6$ durch ihre Summe (und kgV) 12. Die Lösung für $n = 10$ erhält man analog aus der für $n = 12$. (Dafür sollte man sich Gedanken zur allgemeinen Struktur solcher Lösungen gemacht haben.)

Die Lösung für $n = 8$ erhält man, indem man in der Lösung für $n = 9$ die Zahlen 4 und 8 durch 12 ersetzt. Dies ändert die Summe nicht. Obwohl $\text{kgV}(4, 8) \neq 4 + 8$, ändert sich auch nichts am kgV der (inzwischen 8) Zahlen, da der Primfaktor 3 erhalten bleibt (in den Zahlen 3, 6 und 24), ebenso wie der Primfaktor 2 in der Häufigkeit 5 (nämlich in der Zahl 32).

Die Lösung für $n = 5$ findet man auf anderem Wege. Hier kann man nicht die Lösung für $n = 6$ nehmen und zwei Zahlen durch ihre Summe ersetzen. Eine Möglichkeit, die oben genannte Lösung zu finden, ist wie folgt: Da die Summe der Zahlen gleich ihrem kgV sein soll, muss es sich bei der Summe um eine Zahl mit mehreren verschiedenen Teilern handeln. Es liegt daher nahe, sich eine Zahl mit vielen Teilern auszusuchen und zu versuchen, diese als Summe zu erhalten. Eine Zahl mit bekanntermaßen vielen Teilern ist 60. Wenn man sich deren Teiler notiert (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30), muss man sich noch fünf dieser Teiler heraus suchen, die sich zu 60 summieren und auch alle Primfaktoren von $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ in der richtigen Häufigkeit enthalten. Die Zahlen 12, 15, 20 oder 30 sind somit schon einmal gute Wahlen, da sie bereits jeweils zwei der Primfaktoren abdecken. Man wählt sich nun einige dieser Zahlen aus (am besten so, dass damit bereits alle Primfaktoren abgedeckt sind) und ergänzt mit den restlichen Zahlen zur Summe 60. Auf diese Art erhält man 9 verschiedene Lösungen, nämlich:

$1, 4, 5, 20, 30$	$2, 3, 5, 20, 30$	$1, 3, 6, 20, 30$
$1, 2, 12, 15, 30$	$1, 4, 10, 15, 30$	$4, 5, 6, 15, 30$
$2, 6, 10, 12, 30$	$3, 5, 10, 12, 30$	$3, 10, 12, 15, 20$

Lösung 3. (a) Da die bisherige Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitraumes von 40 Minuten nach der Abfahrt bis 5 Stunden und 40 Minuten nach der Abfahrt stets eine verbleibende Fahrtdauer von 1 Stunde vermuten lässt, muss während dieser Zeit die Durchschnittsgeschwindigkeit also fallen. Damit sind die Kurven 1 und 5 ausgeschlossen, da dort gegen Ende (im Bereich um 5 Stunden) die Durchschnittsgeschwindigkeit steigt.

Die Kurven 4 und 6 verlaufen so, dass die Geschwindigkeit während des entscheidenden Zeitraumes konstant bleibt. Dies kann auch nicht der Fall sein: Ist d die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 1 Stunde und v die konstante Geschwindigkeit des Zuges während der 5 Stunden (jeweils in Kilometern pro Stunde), so läge die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 2 Stunden bei $\frac{1}{2}(d + v)$ und nach 3 Stunden bei $\frac{1}{3}(d + 2v)$. Andererseits soll die Durchschnittsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt genau so groß sein wie die noch zu fahrende Strecke (in Kilometern). Also müsste die Durchschnittsgeschwindigkeit innerhalb einer Stunde immer um genau v sinken, also nach 2 Stunden $d - v$ sein und nach 3 Stunden $d - 2v$. Wir hätten also die Gleichungen

$$\frac{1}{2}(d + v) = d - v \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{3}(d + 2v) = d - 2v$$

Löst man die erste Gleichung nach v auf, erhält man $v = \frac{1}{3}d$. Bei der zweiten Gleichung erhält man allerdings $v = \frac{1}{4}d$. Da dies nicht beides richtig sein kann, haben wir einen Widerspruch erreicht. Also können auch die Kurven 4 und 6 nicht den tatsächlichen Verlauf beschreiben.

Die Kurven 2 und 3 widersprechen nicht den Bedingungen: Die Durchschnittsgeschwindigkeit sinkt fortwährend, ebenso die aktuelle Geschwindigkeit während der entscheidenden 5 Stunden. Diese beiden Kurven könnten also beide die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit beschreiben.

Bemerkung: Es ist wichtig, hier von *Durchschnitts*geschwindigkeiten zu sprechen. Die Aufgabenstellung liefert nicht unmittelbar, dass die aktuelle Geschwindigkeit fortlaufend fällt, nur dass die durchschnittliche Geschwindigkeit dies tut.

(b) Zu jeder Zeit zwischen 40 Minuten ($= \frac{2}{3}$ Stunden) nach der Abfahrt und 5 Stunden und 40 Minuten ($= \frac{17}{3}$ Stunden) nach der Abfahrt würde der Zug jeweils nach einer Stunde sein Ziel erreichen, wenn er mit der bisherigen Durchschnittsgeschwindigkeit fährt. Bezeichnet man die Zeit nach der Abfahrt in Stunden mit t und die zurückgelegte Strecke in Kilometern mit $s(t)$, folgt also für $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{17}{3}$:

$$\begin{aligned} & & 100 - s(t) &= 1 \cdot \frac{s(t)}{t} \\ &\Leftrightarrow & 100 \cdot t - s(t) \cdot t &= s(t) \\ &\Leftrightarrow & 100 \cdot t &= s(t) \cdot (1+t) \\ &\Leftrightarrow & 100 \cdot \frac{t}{1+t} &= s(t) \end{aligned}$$

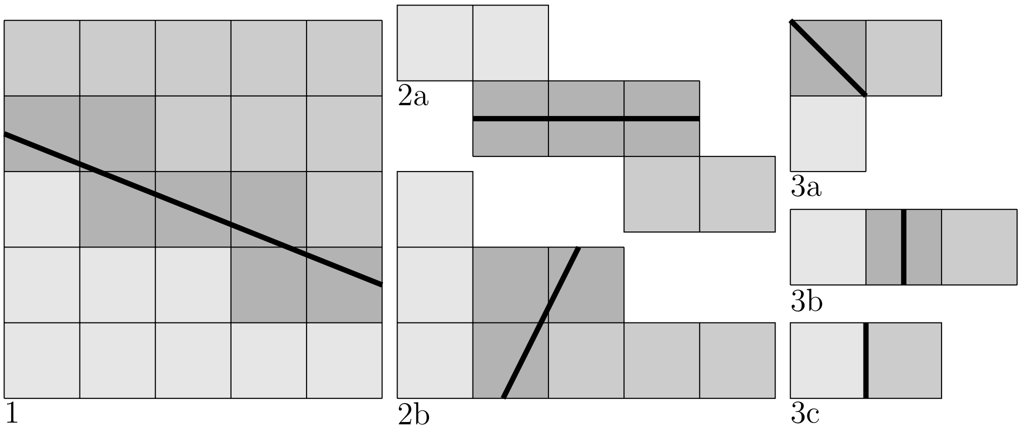
Diese Gleichung liefert, dass der Zug nach 40 Minuten genau 40 Kilometer und nach 5 Stunden und 40 Minuten genau 85 Kilometer zurückgelegt hat. Also ist er innerhalb der 5 Stunden 45 Kilometer gefahren.

Bemerkung: Die Funktion $s(t)$ kann man auch bereits im ersten Aufgabenteil verwenden.

Lösung 4. (a) Mit zwei Geraden kann Corinna nicht in jedem Fall entscheiden, ob sich das ausgewählte Kästchen in einem 5×5-Quadrat befindet, da mit diesen kein „abgeschlossener Bereich“ abgegrenzt werden kann. Mit drei Geraden ist es stets möglich, indem Corinna die erste durch die Diagonale des Quadrats legt. Liegt Martins Kästchen auf einer Seite, wählt Corinna die anderen beiden Geraden durch die beiden Quadratseiten auf der Seite der ersten Geraden, die Martin genannt hat. Genau wenn das Kästchen für beide Geraden jeweils auf der Seite liegt, auf der das Quadrat ist, ist Martins Kästchen im 5×5-Quadrat. Erfährt Corinna von Martin, dass ihre erste Gerade das gewählte Quadrat trifft, kann sie fortfahren, als läge das Quadrat auf einer beliebigen Seite.

(b) Mit zwei Geraden kann Corinna nicht sicher feststellen, welches Kästchen innerhalb eines 5×5-Quadrats Martin gewählt hat: Jede Gerade teilt die Kästchen in drei Gruppen, auf der Geraden bzw. auf einer oder der anderen Seite. Die größte dieser Gruppen enthält mindestens ein Drittel (aufgerundet) aller Kästchen, weshalb Corinna mit zwei Geraden nur eins von $3 \cdot 3 = 9$ Kästchen auszeichnen kann und nicht von 25.

Da $3^3 = 27 \geq 5 \cdot 5 = 25$, ist es mit drei Geraden prinzipiell möglich, mit folgendem Vorgehen auch praktisch:



Im ersten Schritt wählt Corinna die in 1 eingezeichnete Gerade und erfährt, in welchem der drei verschiedenfarbig markierten Bereichen das Kästchen liegt. Im nächsten Schritt muss ein Bereich wie in 2a oder 2b (ggf. gedreht) auf die gleiche Weise untersucht werden, im dritten Schritt einer wie in 3a, 3b oder 3c.