Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1. Die Zahl 6 wird aus 3 gleichen Ziffern mit Hilfe der folgenden mathematischen Symbole dargestellt:

$+$	Addition
$-$	Subtraktion
$\cdot$	Multiplikation
$:$	Division
$(\dots)$	Klammern setzen
$\sqrt{\dots}$	zweite Wurzel ziehen
$!$	Fakultät

Gesucht ist jeweils die Möglichkeit mit der kleinsten Punktsumme. Dabei werden die einzelnen Operationen unterschiedlich gewichtet:

Punkte	Operation
1	Addition und Subtraktion
2	Multiplikation und Division
3	Klammern setzen, Wurzel ziehen
4	Fakultät

Schreibt eure Lösung gut lesbar in der Tabelle auf der nächsten Seite auf und gebt die Punktsumme jeweils an.

(a)	0	0	0	$= 6$
(b)	1	1	1	$= 6$
(c)	2	2	2	$= 6$
(d)	3	3	3	$= 6$
(e)	4	4	4	$= 6$
(f)	5	5	5	$= 6$
(g)	6	6	6	$= 6$
(h)	7	7	7	$= 6$
(i)	8	8	8	$= 6$
(j)	9	9	9	$= 6$
(k)	10	10	10	$= 6$

Aufgabe 2. Um ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kantenlängen a, b und c und den Eckpunkten A, B und C (rechter Winkel bei C), wird entsprechend Abbildung 1 ein Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ gezeichnet.

Zeigt, dass der Flächeninhalt dieses Sechsecks gleich dem des Sechsecks $Q_1Q_2Q_3$ $Q_4Q_5Q_6$ in Abbildung 2 ist.

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Abbildung 1

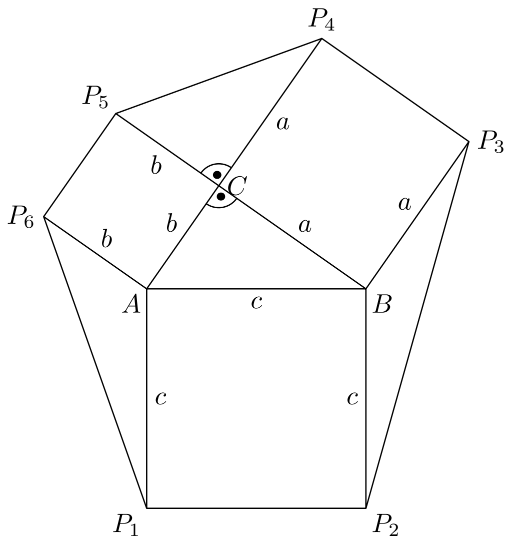
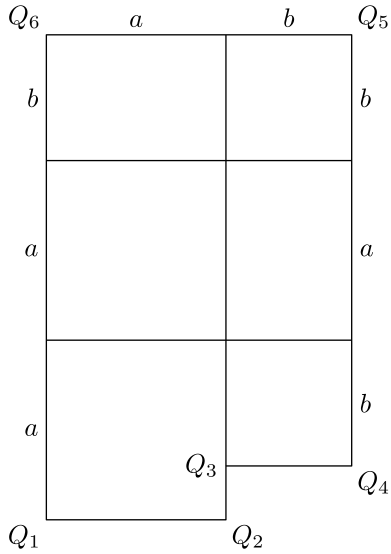


Abbildung 2



Aufgabe 3. Durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel gegeben.

(a) $A(-1|4)$, $B(0|6)$ und $C(2|22)$ sind Punkte einer Parabel. Bestimmt für diese Parabel die Koeffizienten a, b und c. (Zur Kontrolle: $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$)

(b) $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ und $C(c_1|c_2)$ sind drei verschiedene Punkte einer Parabel mit ganzzahligen Koordinaten. Zeigt, dass dann die Koeffizienten a, b und c der quadratischen Funktion rationale Zahlen sind.

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Aufgabe 4. Gegeben ist ein Tetraeder (Pyramide, deren Oberfläche aus 4 gleichseitigen Dreiecken besteht). Die Kanten dieses regelmäßigen Körpers sollen mit 6 verschiedenen Farben gefärbt werden, so dass jede Farbe genau einmal vorkommt. (Hinweis: Zwei Kantenfärbungen F_1 und F_2 sind verschieden, wenn das F_1-Tetraeder nicht durch Drehen und Kippen in das F_2-Tetraeder verwandelt werden kann.)

(a) Zeichnet sorgfältig ein Schrägbild mit der Kantenlänge $a = 8$cm.

(b) Wie viel verschiedene Kantenfärbungen sind möglich?

(Hinweis: Bei einem Schrägbild werden Strecken in die Zeichenebene hinein im Winkel von 45° mit halber Länge abgetragen. Strecken parallel zur Zeichenebene werden in voller Länge ohne Drehung dargestellt.)

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) $(0! + 0! + 0!)! = 6$ (21)

(b) $(1 + 1 + 1)! = 6$ (9)

(c) $2 + 2 + 2 = 6$ (2)

(d) $3 \cdot 3 - 3 = 6$ (3)

(e) $4 + 4 - \sqrt{4} = 6$ (5)

(f) $5 : 5 + 5 = 6$ (3)

(g) $6 + 6 - 6 = 6$ (2)

(h) $7 - 7 : 7 = 6$ (3)

(i) $8 - \sqrt{\sqrt{8 + 8}} = 6$ (8)

(j) $9 - 9 : \sqrt{9} = 6$ (6)

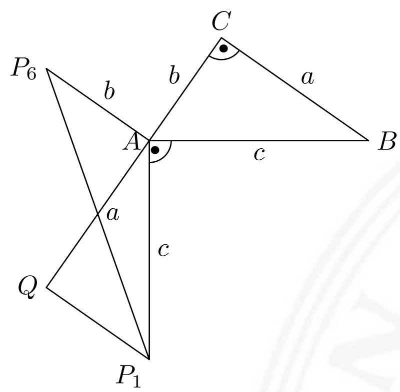
(k) $\sqrt{10 - 10 : 10}\,! = 6$ (10)

Lösung 2. Das Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ besteht aus 2 Quadraten mit der Seitenlänge a, 2 Quadraten mit der Seitenlänge b und 2 Rechtecken jeweils mit Seitenlängen a und b. Daher hat es den Flächeninhalt

$$2a^2 + 2b^2 + 2ab. \qquad (1)$$

Das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ besteht aus vier Dreiecken und Quadraten mit Flächen a^2, b^2 und $c^2 = a^2 + b^2$ (nach Pythagoras). Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und CP_4P_5 haben jeweils den Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$.

Die bisher betrachteten Teilflächen des Sechsecks haben zusammen den Flächeninhalt $2a^2 + 2b^2 + ab$. Der Flächeninhalt des Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ stimmt also genau dann mit (1) überein, wenn die Flächeninhalte der Dreiecke P_1AP_6 und P_2P_3B zusammen ab ergeben.



Es wird nun gezeigt, dass das Dreieck P_1AP_6 den Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$ hat. Analoges folgt auch für das Dreieck P_2P_3B, womit die Behauptung bewiesen ist.

Dazu betrachtet man die Verlängerung von AC über A hinaus um a. Der Endpunkt hiervon sei Q. Da bei A die drei Winkel $\angle BAC$, $\angle P_1AB$ und $\angle QAP_1$ zusammen $180°$ betragen, genau wie die Innenwinkel des Dreiecks ABC, ist $\angle QAP_1 = \angle CBA$ (siehe auch obige Abbildung).

In den Dreiecken ABC und P_1AQ stimmt also zusätzlich zu den Seiten a und c noch der von diesen eingeschlossene Winkel überein. Die Dreiecke sind kongruent.

Also ist bei Q ein rechter Winkel, weshalb AQ die parallel verschobene Höhe im Dreieck P_1AP_6 über b ist. Da AQ gerade a lang ist, beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks P_1AP_6 $\frac{ab}{2}$, was noch zu zeigen war.

Die beiden Sechsecke haben also den gleichen Flächeninhalt.

Lösung 3. (a) Setzt man die gegebenen Punkte in die allgemeine Gleichung ein, so erhält man das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 4 &= a - b + c \\ 6 &= c \\ 22 &= 4a + 2b + c \end{aligned}$$

Nach elementaren Umformungen erhält man die angegebene Gleichung.

(b) Die drei verschiedenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ und $C(c_1|c_2)$.

Dann erhält man das folgende lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen:

$$\begin{aligned} a_2 &= a{a_1}^2 + ba_1 + c && (2) \\ b_2 &= a{b_1}^2 + bb_1 + c && (3) \\ c_2 &= a{c_1}^2 + bc_1 + c && (4) \end{aligned}$$

Man subtrahiert Gleichung (3) von Gleichung (2) und Gleichung (3) von Gleichung (4) und erhält:

$$\begin{aligned} a_2 - b_2 &= a\left({a_1}^2 - {b_1}^2\right) + b(a_1 - b_1) && (5) \\ c_2 - b_2 &= a\left({c_1}^2 - {b_1}^2\right) + b(c_1 - b_1) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der 3. Binomischen Formel folgt:

$$\begin{aligned} a_2 - b_2 &= a(a_1 - b_1)(a_1 + b_1) + b(a_1 - b_1) \\ c_2 - b_2 &= a(c_1 - b_1)(c_1 + b_1) + b(c_1 - b_1) \end{aligned}$$

Man dividiert die Gleichung durch $(a_1 - b_1)$ bzw. $(c_1 - b_1)$, so dass folgt:

$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = a(a_1 + b_1) + b$$
$$\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} = a(c_1 + b_1) + b$$

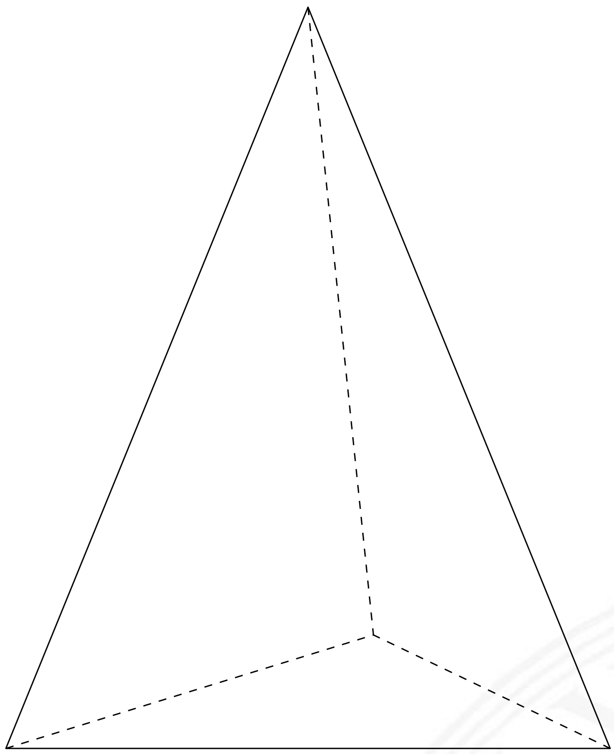
Nun subtrahiert man wieder diesen beiden Gleichungen und klammert a aus:

$$a[(a_1 + b_1) - (c_1 + b_1)] = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} - \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung rational ist und $(a_1 + b_1) - (c_1 + b_1)$ nach Voraussetzung ungleich 0 ist, ist a rational.

Aus (5) folgt die Rationalität von b und aus (2) die von c.

Lösung 4. (a) Schrägbild:



(b) Ein Tetraeder hat 6 verschiedene Kanten. Für die erste Kante gibt es 6 Möglichkeiten, für die zweite 5, für die dritte 4, für die vierte 3, für die fünfte 2 und für die sechste eine Möglichkeit. Also insgesamt $6! = 720$ Möglichkeiten. (Man kann diesen Vorgang auch als ein Ziehen ohne Zurücklegen betrachten.)

Allerdings kann jede der 4 Seiten des Tetraeders als Grundseite und jede der 3 „Mantelkanten" als vordere gewählt werden. Folglich gibt es $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Möglichkeiten für die vordere Kante. Da beim Tetraeder die verschiedenen Positionen nicht zu unterschieden sind, gibt es $720 : 12 = 60$ verschiedene Färbungen des Tetraeders.