Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1. Multiple Choice

(a) Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.

(b) Jede Schülergruppe bekommt zu Beginn 10 Punkte. Bei einer richtigen Antwort wird 1 Punkt hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, wird 1 Punkt abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 20, die niedrigste 0.

(c) Taschenrechner sind nicht zugelassen.

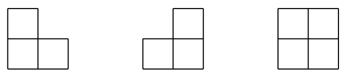
(a) $\frac{2008+2008+2008+2008+2008}{2008+2008} =$

(A) 2008 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{5}{2}$ **(E)** 10040

(b) Im Zooladen schwimmen in einem Aquarium 6 verschiedene Fische mit einem durchschnittlichen Verkaufspreis von 20 €. Als eines Tages der prächtigste verkauft wird, beträgt der durchschnittliche Preis der restlichen fünf Fische nur noch 18 €. Wie teuer war der verkaufte Fisch?

(A) 20 € **(B)** 24 € **(C)** 26 € **(D)** 28 € **(E)** 30 €

(c) Auf einem Tisch werden Würfel zusammengestellt. In den Abbildungen sind drei Ansichten des Körpers dargestellt. Aus wie vielen Würfeln besteht er dann?



Vorderansicht — Seitenansicht — Ansicht von oben

(A) aus 3 **(B)** aus 4 **(C)** aus 5 **(D)** aus 6 **(E)** aus 7

(d) An die Tafel sind 4 Geraden gezeichnet worden. Welche der folgenden Zahlen ist gewiss *nicht* die Anzahl der Schnittpunkte, die diese Geraden miteinander haben (auch nicht außerhalb der Tafel)?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

(e) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2007 - 2008 =$

(A) 1004 **(B)** -2008 **(C)** -1 **(D)** -1004 **(E)** 2007

(f) Die Masse eines LKW ohne Ladung beträgt 2 t. Als der LKW heute auf Tour geht, machen die geladenen Waren 80 % der Gesamtmasse aus. Wie viel Prozent machen die Waren von der neuen Gesamtmasse aus, nachdem beim ersten Halt ein Viertel der Waren abgeladen wurde?

(A) 25 % **(B)** 75 % **(C)** 66 % **(D)** 55 % **(E)** 60 %

(g) Als der Bus heute an der Endstation los fuhr, waren wir insgesamt 44 Fahrgäste. An der 1. Station stiegen 7 aus und 3 ein. Nachdem an der 2. und 3. Station dasselbe passierte, fragte ich mich, an welcher Station – wenn das so weiterginge – nach dem Aus- und Einsteigen die Zahl der Fahrgäste erstmals kleiner als 7 ist. Das ist an der

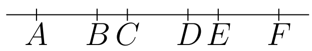
(**A**) 4. (**B**) 6. (**C**) 7. (**D**) 9. (**E**) 10. Station.

(h) Die Zeichen $\boxtimes$ und $\otimes$ stehen für voneinander verschiedene Ziffern. Es ist bekannt, dass die Summe der nebenstehenden Additionsaufgabe eine 3-stellige Zahl ist. Dann ist der größtmögliche Wert dieser Summe

$$\begin{array}{lr} & \boxtimes\boxtimes\boxtimes \\ + & \otimes\boxtimes \\ + & \boxtimes \\ \hline \end{array}$$

(**A**) 991 (**B**) 897 (**C**) 889 (**D**) 994 (**E**) 997

(i) Die Punkte $A, \ldots, F$ liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Es gilt $\overline{AD} = \overline{CF}$ und $\overline{BD} = \overline{DF}$. Dann gilt sicher



(**A**) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (**B**) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (**C**) $\overline{BC} = \overline{DE}$

(**D**) $\overline{BD} = \overline{EF}$ (**E**) $\overline{CD} = \overline{EF}$

(j) Stell dir vor, du hast 6 Metallstangen in den Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2006 cm, 2007 cm und 2008 cm. Wie viele verschiedene Dreiecke könntest du daraus legen? *(Bemerkung: Dreiecke werden hier als voneinander verschieden angesehen, wenn sie sich in mindestens einer Seitenlänge voneinander unterscheiden.)*

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 20

Die folgenden 3 Aufgaben müssen gut nachvollziehbar gelöst werden. Einzelne Schritte sind zu begründen.

Aufgabe 2. Zahlentheorie (Maximalpunktzahl: 10 Punkte)
Klabautermann, Klabauterfrau und Klabauterkind treiben an Bord eines Containerschiffes ihren Schabernack. Die Container sind von Eins an durchnummeriert. Der Klabautermann macht an jeden vierten Container ein Kreuz, Klabauterfrau an jeden sechsten Container und Klabauterkind an jeden zehnten Container. Der Lademeister erhält den Auftrag, im nächsten Hafen jeden Container mit drei Kreuzen zu entladen.

(a) Wie viele sind das, wenn sich 600 durchnummerierte Container an Bord befinden und die ersten drei Kreuze von der Klabauterfamilie an den Containern mit den Nummern 4, 6 und 10 sind?

(b) Wie viele Container mit drei Kreuzen gibt es, wenn alle Klabauter nach ihrer Regel Kreuze machen, aber das Klabauterkind mit dem Container 1 beginnt?

Aufgabe 3. Kombinatorik (Maximalpunktzahl: 15 Punkte)
Auf dem Schaufelraddampfer *Louisiana Star* findet in der Weihnachtszeit wieder eine spektakuläre Abendfahrt auf der Elbe statt. Es wird eine Dinnershow mit leckerem Essen, Getränken und Gesangseinlagen geboten. Ein Kellner ist bei der guten Stimmung an Bord so beschwingt, dass er vergessen hat, welchen Gästen er die vier Gläser Apfelsaft auf seinem Tablett bringen wollte. An den Tisch kann er sich jedoch noch erinnern. An diesem Tisch sitzen jedoch neun Personen. Er beschließt, die Gläser rein zufällig vor irgendwelche vier Gäste zu platzieren.

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, auf diese Art vier Gäste für die Gläser auszuwählen?

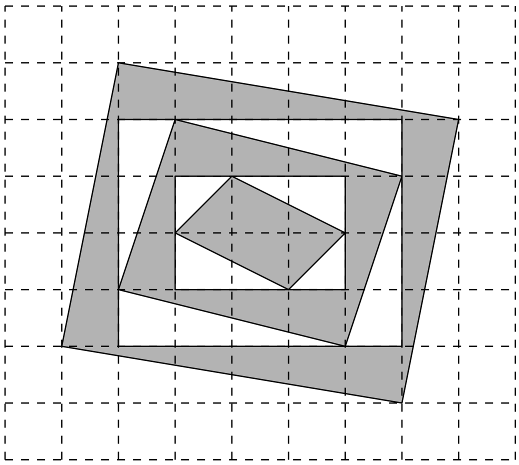
(b) Wie groß ist die Chance (Wahrscheinlichkeit) dafür, dass er die Getränke genau den richtigen Gästen serviert?

Am Nachbartisch ergibt sich ein ähnliches Problem bei der Vorspeise. Dort sitzen zehn Personen auf derselben Seite einer langen Tafel, alle nebeneinander. Genau drei Personen haben eine Fischsuppe bestellt, und der Ober hat wieder vergessen, wer diese drei waren. Er erinnert sich aber daran, dass genau zwei dieser Gäste mit Fischsuppenwunsch (aber nicht alle drei!) nebeneinander sitzen. Er stellt die Vorspeisen wiederum zufällig auf den Tisch, wobei er das berücksichtigt, an was er sich noch erinnert.

(c) Wie viele Möglichkeiten hat er jetzt, drei Gäste für Fischsuppe auszuwählen?

Hinweis: Auch wenn aus dem Unterricht Formeln bekannt sind, reicht es bei dieser Aufgabe nicht, die Formeln zu zitieren und die Werte einzusetzen. Die Ergebnisse sind direkt aus der Aufgabenstellung herzuleiten.

Aufgabe 4. Geometrie/Prozesse (Maximalpunktzahl: 15 Punkte)



(a) Welchen Flächeninhalt hat die innerste grau gefärbte Fläche in der obigen Abbildung? (1 Kästchen sei 1cm breit und 1cm hoch.)

(b) Welchen Flächeninhalt hat die gesamte in der Abbildung grau gefärbte Fläche?

(c) Man kann das Bild als Ergebnis eines mehrfach wiederholten Prozesses auffassen, bei dem immer wieder außen an der bisherigen Figur eine neue graue Fläche angefügt wird. Wie groß ist dann der Inhalt der nächsten dazukommenden Fläche?

(d) Wenn man diesen Prozess weiter durchführt, so befindet sich die gesamte grau gefärbte Fläche immer in einem Rechteck, dessen eine Seite um ein Kästchen größer ist als die andere Seite. Welchen Flächeninhalt hat die entsprechend gebildete gesamte grau gefärbte Fläche, die zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und $(n-1)$ gehört?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) D (b) E (c) C (d) B (e) D (f) B (g) E (h) D (i) A (j) C

Lösung 2. (a) Gesucht ist die Anzahl k zwischen 1 und 600, die gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 sind.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 ist 60. Alle Vielfachen von 4, 6 und 10 sind Vielfache vom $\mathrm{kgV}(4, 6, 10) = 60$. Es gibt genau 10 Vielfache von 60 zwischen 1 und 600. Also gibt es 10 Container, die genau 3 Kreuze tragen.

(b) Da Klabautermann und Klabauterfrau nur an Containern mit gerader Nummer Kreuze machen, aber Klabauterkind nur an Containern mit ungerader Nummer, gibt es keine Container mit drei Kreuzen.

Lösung 3. (a) Der Ober stellt die 4 Gläser nacheinander auf den Tisch. Für das 1. Glas hat er dann 9 Möglichkeiten, es zu platzieren, für das 2. Glas noch 8 und danach für das dritte Glas 7 Möglichkeiten und für das 4. Glas 6 Möglichkeiten. Er kann also die 4 Gläser auf $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ verschiedene Weisen auf den Tisch stellen.

Für vier fest ins Auge gefasste Gäste gibt es jedoch mehrere Möglichkeiten, auf die oben angegebene Art die Gläser vor sie zu stellen. Für das 1. Glas stehen alle 4 Gäste zur Auswahl, für das 2. noch 3 Gäste, für das 3. Glas bleiben noch zwei Gäste und schließlich für das 4. Glas nur der 4. Gast übrig (1 Möglichkeit). Von den $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ Weisen, die Teller nacheinander auf den Tisch zu stellen, führen jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2$ (oder $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) Möglichkeiten zu einer identischen Menge von 4 Gästen.

Die Anzahl, vier Gäste zufällig für die Apfelsäfte auszuwählen, ist daher gleich $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$.

(b) Da jede Auswahl von 4 Gästen gleich wahrscheinlich ist, ist die Chance, die richtigen vier Gäste zu wählen, gleich $1 : 126$, die WS gleich $\frac{1}{126}$ (eine Angabe reichte).

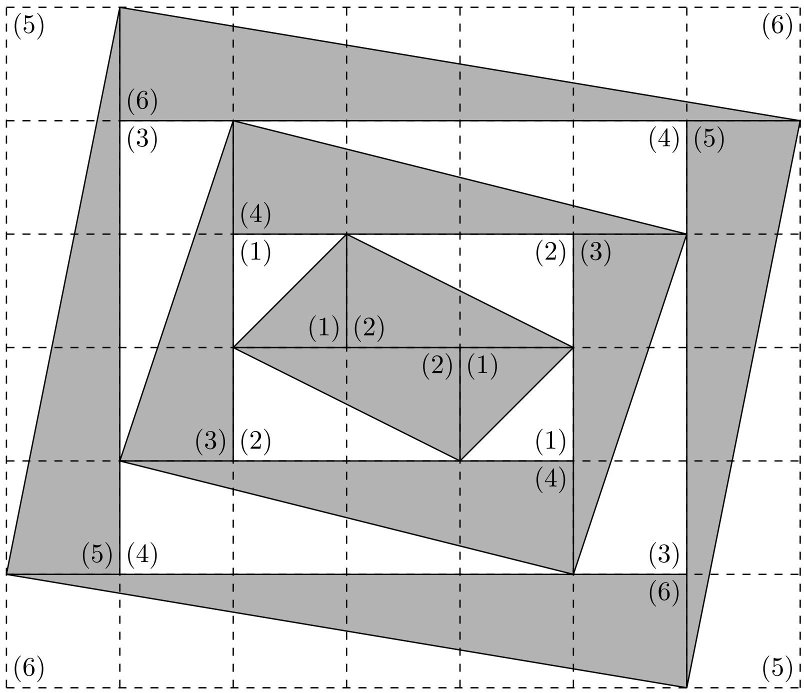
(c) Der Ober stellt zuerst zwei Fischsuppen vor zwei benachbarte Gäste. Dafür hat er 9 Möglichkeiten. Die Anzahl möglicher Positionen für die 3. Suppe hängt jetzt davon ab, wo er die ersten zwei Suppen hingestellt hat:

In zwei Fällen (wenn die 2 Suppen ganz links oder ganz rechts außen serviert wurden) kann die 3. Suppe an einem Nachbarplatz nicht serviert werden, es bleiben $7 = 10 - 2 - 1$ Möglichkeiten für die 3. Suppe.

In sieben Fällen gibt es jeweils einen Platz links und einen Platz rechts von der Position der beiden ersten Suppen, wo die 3. Suppe nicht serviert werden kann. Es bleiben dann jeweils $6 = 10 - 2 - 2$ Möglichkeiten für die 3. Suppe.

Insgesamt gibt es hier $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$ Möglichkeiten, die drei Suppen zu platzieren.

Lösung 4. In der folgenden Abbildung wird eine Zerlegung der inneren beiden grauen Flächen dargestellt.



(a) Da sich das graue Parallelogramm in zwei Flächen (1) und zwei Flächen (2) zerlegen lässt, gilt für seinen Flächeninhalt offensichtlich $F_0 = 1 + 2 = 3$.

Anders argumentiert: Die Fläche stellt die Hälfte des inneren Rechtecks dar, also ist auch ihr Inhalt halb so groß. Da da innerste Rechteck die Seitenlängen 2 und 3 hat, gilt $F_0 = 3$.

(b) Betrachten wir in der Abbildung die erste Stufe der Erweiterung: Da sich der graue „Ring“ in zwei Flächen (3) und zwei Flächen (4) zerlegen lässt und da sich die zwei Flächen (3) zu einem Rechteck mit dem Inhalt $1 \cdot 3 = 3$ und die zwei Flächen (4) zu einem Rechteck mit dem Inhalt 4 zusammen legen lassen, gilt für den Inhalt des grauen Rings $R_1 = 3 + 4 = 7$.

Nach der ersten Erweiterung ergibt sich also eine gesamte graue Fläche von $F_2 = 10$.

Wesentlich ist die Erkenntnis, dass in jeder „Stufe“ die grau gefärbten Gebiete des „Ringes“ sich paarweise zur Hälfte des neu dazugekommenen Randes zusammen schieben lassen.

Damit liefert der zweite Ring einen weiteren Inhalt von $R_2 = 5 + 6 = 11$, und damit hat die in der Aufgabe angegebene graue Fläche den Inhalt $F_2 = 10 + 11 = 21$.

Ebenso lässt sich bei dieser Teilfrage erkennen: Nach jeder „Stufe“ ist der Flächeninhalt der gesamten grau gefärbten Fläche die Hälfte des Flächeninhalts des jeweils umhüllten Rechtecks. In der Abbildung hat dieses die Seitenlängen 6 und 7, also hat die gesamte graue Fläche den Inhalt $F_2 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

(c) Mit der ersten Argumentation: Der nächste Ring hat als Flächeninhalt die Hälfte seines Randes, also $R_3 = 7 + 8 = 15$.

Mit der allgemeineren Argumentation: Im nächsten Schritt ergibt sich $F_3 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. Also ist eine Fläche von der Größe 15 dazu gekommen.

(d) Wiederum lässt sich auf beide Weisen argumentieren: das allgemeinere Argument ergibt unmittelbar $F_n = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$.