Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1. Es sei n eine natürliche Zahl. Mit $T(n)$ wird die Anzahl der positiven Teiler, mit $T_g(n)$, bzw. $T_u(n)$ die Anzahl der geraden, bzw. der ungeraden Teiler von n bezeichnet. So ist zum Beispiel für $n = 12$ mit den Teilern $1, 2, 3, 4, 6, 12$ hier $T(12) = 6$, $T_g(12) = 4$ und $T_u(12) = 2$.

(a)
1. Geben Sie fünf Zahlen n an mit ungeradem $T(n)$.
2. Geben Sie fünf Zahlen n mit ungeradem $T_g(n)$ an.
3. Geben Sie fünf Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ an.
4. Geben Sie fünf Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ an.
5. Geben Sie fünf Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ an.

(b)
1. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
2. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T_g(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
3. Können Sie alle Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
4. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
5. Können Sie alle Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)

Die Lösungen sind jeweils zu begründen. Falls gezeigt wird, dass eine bestimmte Situation möglich ist, reicht die Angabe eines Beispiels, ansonsten muss bewiesen werden, weshalb die Situation in keinem Fall möglich ist.

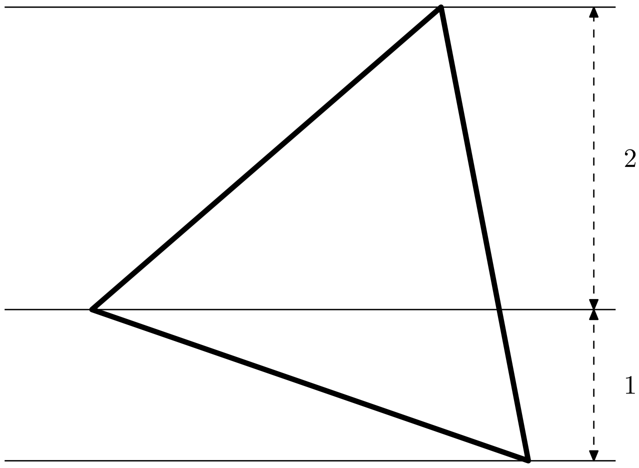
Aufgabe 2. (a) Zwei Münzen haben jeweils eine Seite mit einem *Kopf* und eine mit einer *Zahl*. Durch Manipulation kann man die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse *Kopf* bzw. *Zahl* für jede einzelne Münze beliebig verändern.

Ist es möglich, dass bei gleichzeitigem Werfen beider Münzen die Wahrscheinlichkeit keinmal, einmal oder zweimal Kopf zu erhalten jeweils genau gleich groß ist?

(b) Ähnlich kann man auch Würfel, die ganz normal mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet sind, manipulieren und dabei die Wahrscheinlichkeiten für jede Augenzahl bestimmen – auch wieder für jeden Würfel einzeln.

Wenn man zwei derart manipulierte Würfel gleichzeitig wirft, ist es dann möglich, dass jede mögliche Gesamtaugenzahl gleich wahrscheinlich ist?

Aufgabe 3. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen auf drei parallelen Geraden, deren Abstände 1 und 2 sind, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Berechnen Sie die Seitenlänge des Dreiecks.



Aufgabe 4. (a) Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 4, 8, 16, 32$. Nun wählt man zwei der Zahlen an der Tafel, wischt sie aus und schreibt ihre (nicht-negative) Differenz an die Tafel. Dies wiederholt man fünf mal, so dass nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Kann dies die Zahl 17 sein?

Falls ja: Geben Sie ein Vorgehen an, bei dem die 17 am Ende an der Tafel steht. Falls nein: Begründen Sie, warum es kein solches Vorgehen gibt.

(b) Kann am Ende auch die Zahl 10 oder die Zahl 11 an der Tafel stehen? Geben Sie jeweils entweder ein entsprechendes Vorgehen an oder eine Begründung, warum es keine solches Vorgehen gibt.

(c) Die zunächst auf der Tafel stehenden Zahlen seien $1, 2, 4, 8, 16$. Zeigen Sie: Alle Zahlen, die hier am Ende an der Tafel stehen können, können auch dann am Ende auf der Tafel stehen, wenn wir wie zuvor mit $1, 2, 4, 8, 16, 32$ beginnen.

(d) Die Zahlen an der Tafel seien nun $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ mit $n \geq 1$. Welche Zahlen können hierbei am Ende an der Tafel stehen? (Mit Beweis, dass diese Zahlen möglich sind, sowie dass keine anderen Zahlen möglich sind.)

(e) Wenn am Anfang die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ an der Tafel stehen ($n \geq 1$), welche Zahlen können dann am Ende an der Tafel stehen? (Mit Beweis!)

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) 1. Zum Beispiel $1, 4, 9, 16, 25$.

2. Zum Beispiel $2, 8, 18, 32, 50$.
3. Zum Beispiel $4, 8, 12, 16, 20$.
4. Zum Beispiel $1, 9, 25, 49, 81$.
5. Zum Beispiel $3, 5, 7, 11, 13$.

(b)

1. Genau für Quadratzahlen n ist $T(n)$ ungerade. Ist a ein Teiler der Zahl n, so ist auch $\frac{n}{a}$ ein Teiler. Ist n keine Quadratzahl, lassen sich die Teiler stets in Paare der Form $(a, \frac{n}{a})$ aufteilen, somit ist $T(n)$ gerade. Ist n hingegen eine Quadratzahl, so lassen sich alle Teiler bis auf $\sqrt{n}$ in solche Paare aufteilen, daher ist $T(n)$ ungerade.
2. Die Zahlen n mit ungeradem $T(n)$ sind genau die Zahlen, die das Doppelte einer Quadratzahl sind. Um das zu sehen, schreiben wir eine beliebige Zahl n als $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist. (Wir spalten also alle Faktoren 2 ab.) Jeder gerade Teiler von n ist das Produkt von einem Teiler von b und einem geraden Teiler von 2^a. Da 2^a genau a gerade Teiler hat (nämlich $2, 4, 8, \ldots, 2^a$), haben wir

$$T_g(n) = T(b) \cdot T_g(2^a) = T(b) \cdot a.$$

Also ist $T_g(n)$ genau dann ungerade, wenn $T(b)$ und a ungerade sind. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist dies genau dann der Fall, wenn b eine Quadratzahl ist und a ungerade. Somit ist $n = 2 \cdot 2^{a-1} \cdot b$, wobei $2^{a-1} \cdot b$ eine Quadratzahl ist.

3. Die Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ sind genau die Zahlen, für die $T_g(n)$ nicht ungerade ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist dies genau dann der Fall, wenn n nicht das Doppelte einer Quadratzahl ist, also wenn entweder n ungerade ist oder $\frac{n}{2}$ keine Quadratzahl ist.
4. Die Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ sind genau die Zahlen, die von der Form $n = 2^a \cdot u^2$ sind, wobei u ungerade ist. Denn schreiben wir eine beliebige Zahl n als $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist, so ist jeder ungerade Teiler offensichtlich ein Teiler von b. Daher gilt $T_u(n) = T(b)$, was nach dem ersten Aufgabenteil genau dann ungerade ist, wenn b eine Quadratzahl ist.
5. Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind die Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ genau die Zahlen, die nicht von der Form $n = 2^a \cdot u^2$ mit u ungerade sind. Also sind sie von der Form $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist und keine Quadratzahl.

Lösung 2. (a) Die Wahrscheinlichkeit der ersten bzw. zweiten Münze *Kopf* zu zeigen sei K_1 bzw. K_2; für *Zahl* ist sie dann $1-K_1$ bzw. $1-K_2$. Jedes der drei möglichen Ereignisse soll gleich wahrscheinlich sein, die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis also jeweils $\frac{1}{3}$ betragen.

Keinmal *Kopf* hat dann die Wahrscheinlichkeit $(1-K_1)\cdot(1-K_2)=\frac{1}{3}$. Einmal *Kopf*: $(1-K_1)\cdot K_2+K_1\cdot(1-K_2)=\frac{1}{3}$. Zweimal *Kopf*: $K_1\cdot K_2=\frac{1}{3}$. Setzt man die dritte Gleichung in die ersten beiden ein, so erhält man

$$1-(K_1+K_2)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad (K_1+K_2)-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(Es reicht, in eine von beiden einzusetzen, wie sich gleich herausstellt.)

Diese beiden Gleichungen sind genau für $K_1+K_2=1$ erfüllt, also $K_2=1-K_1$. Dieses in $K_1K_2=\frac{1}{3}$ eingesetzt ergibt

$$K_1(1-K_1)=\frac{1}{3}.$$

Diese quadratische Gleichung formt man um in

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}={K_1}^2-K_1+\frac{1}{4}=(K_1-\frac{1}{2})^2.$$

Da $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}<0$, gibt es keine (reelle) Lösung für K_1. Es kann also keine zwei Münzen geben, für die keinmal, einmal oder zweimal *Kopf* paarweise gleich wahrscheinlich sind.

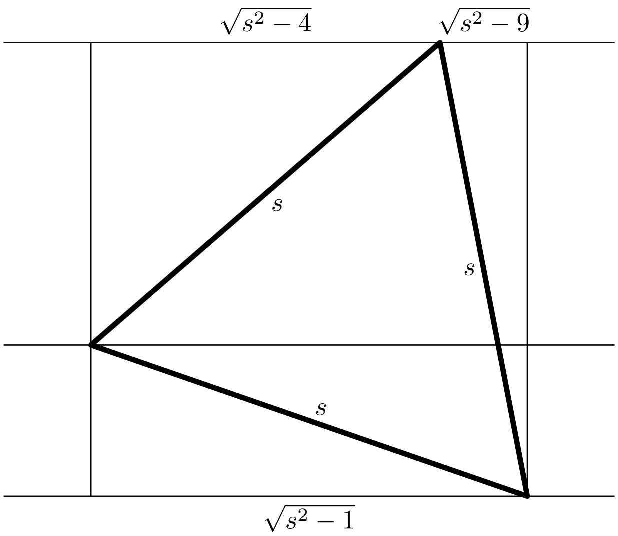
(b) A_i mit $i=1,\dots,6$ seien die Wahrscheinlichkeiten, dass der erste Würfel i liefert, B_i die entsprechenden für den zweiten Würfel. Jede der möglichen Summen $2,\dots,12$ soll mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{11}$ auftreten.

Um 2 bzw. 12 zu erhalten, gibt es jeweils nur eine Möglichkeit, also $A_1B_1=A_6B_6=\frac{1}{11}$. Keine der Zahlen A_1, B_1, A_6 und B_6 kann 0 sein, also $B_1=\frac{1}{11A_1}$ und $B_6=\frac{1}{11A_6}$. Nun ist die Gesamtsumme 7 mindestens so wahrscheinlich wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 und eine 6 fällt, also nicht kleiner als

$$A_1B_6+A_6B_1=A_1\frac{1}{11A_6}+A_6\frac{1}{11A_1}=\frac{1}{11}\left(\frac{A_1}{A_6}+\frac{A_6}{A_1}\right).$$

Da die Summe einer positiven Zahl und ihres Kehrwerts stets größer als 1 ist, ist dieser Wert größer als $\frac{1}{11}$. Die Wahrscheinlichkeit für die Gesamtsumme 7 kann also nicht $\frac{1}{11}$ sein, wenn die für 2 und 12 bereits $\frac{1}{11}$ sind.

Lösung 3. Die Seitenlänge sei s. Schließt man das Dreieck in ein Rechteck ein (siehe Zeichnung), so ergeben sich mit dem Satz von Pythagoras die in der Zeichnung angegebenen Längen $\sqrt{s^2-1}$, $\sqrt{s^2-4}$ und $\sqrt{s^2-9}$.



Da die beiden Seiten des Rechtecks gleich lang sind, gilt also

$$\sqrt{s^2-1} = \sqrt{s^2-4} + \sqrt{s^2-9}.$$

Durch Quadrieren und weiteres Umformen erhält man

$$\begin{aligned}
& s^2-1 = s^2-4+s^2-9+2\sqrt{(s^2-4)(s^2-9)} \\
\Longrightarrow\quad & 12-s^2 = 2\sqrt{(s^2-4)(s^2-9)} \\
\Longrightarrow\quad & (12-s^2)^2 = 4(s^2-4)(s^2-9) \\
\Longrightarrow\quad & 144-24s^2+s^4 = 4s^4-52s^2+144 \\
\Longrightarrow\quad & 3s^4 = 28s^2 \\
\Longrightarrow\quad & s^2 = \frac{28}{3} \\
\Longrightarrow\quad & s = \sqrt{\frac{28}{3}}.
\end{aligned}$$

Lösung 4. (a) Die 17 erhält man zum Beispiel wie folgt:

$$\begin{aligned}
& 1,2,4,8,16,32 \xrightarrow{4,8\to 4} 1,2,4,16,32 \xrightarrow{2,4\to 2} 1,2,16,32 \\
\xrightarrow{1,2\to 1}\ & 1,16,32 \xrightarrow{1,16\to 15} 15,32 \xrightarrow{15,32\to 17} 17
\end{aligned}$$

(b) Die 10 ist nicht möglich, da während des Vorganges immer genau eine ungerade Zahl an der Tafel steht. (Wischt man zwei gerade Zahlen aus, so ist ihre Differenz eine gerade Zahl. Wischt man eine gerade und eine ungerade

Zahl aus, so ist ihre Differenz eine ungerade Zahl.) Die 11 erhält man zum Beispiel wie folgt:

$$\begin{array}{llllll} & 1,2,4,8,16,32 & \xrightarrow{16,32\to 16} & 1,2,4,8,16 & \xrightarrow{1,2\to 1} & 1,4,8,16 \\ \xrightarrow{1,4\to 3} & 3,8,16 & \xrightarrow{3,8\to 5} & 5,16 & \xrightarrow{5,16\to 11} & 11 \end{array}$$

(c) Bei $1, 2, 4, 8, 16, 32$ ersetzt man zunächst $16, 32$ durch 16 und verfährt dann wie bei $1, 2, 4, 8, 16$.

(d) Man kann genau die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^n - 1$ erhalten. Gerade Zahlen sind nicht möglich, da stets genau eine ungerade Zahl an der Tafel steht (siehe zweiter Aufgabenteil), größere Zahlen als 2^n sind offensichtlich auch nicht möglich. Die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^{n-1} - 1$ erhält man, indem man zuerst $2^{n-1}, 2^n$ durch 2^{n-1} ersetzt und dann wie bei $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ verfährt. Die restlichen Zahlen erhält man, indem man zunächst mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ eine geeignete ungerade Zahl (kleiner als 2^{n-1}) erzeugt und dann aus dieser und der Zahl 2^n die gewünschte ungerade Zahl erhält.

(e) Ist n oder $n + 1$ durch 4 teilbar (also $n = 3, 4, 7, 8, \ldots$), so kann man genau die geraden Zahlen von 0 bis n beziehungsweise $n - 1$ erhalten. Ansonsten sind genau die entsprechenden ungeraden Zahlen möglich. Andere Zahlen kann man nicht erhalten, da die Parität der Summe der Zahlen an der Tafel sich nicht verändert (wischt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihre Differenz, so sinkt die Summe aller Zahlen an der Tafel um das Doppelte der kleineren der beiden ausgewischten Zahlen, die Summe bleibt also gerade beziehungsweise ungerade) und da die Summe $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ genau dann gerade ist, wenn n oder $n + 1$ durch 4 teilbar ist.

Bei $n = 1$ kann man offenbar die 1 erhalten. Außerdem kann man bei $1, 2, 3, \ldots, n$ alle Zahlen erhalten, die von der Form $n - m$ sind, wobei m eine Zahl ist, die man bei $1, 2, 3, \ldots, n - 1$ erhalten kann. Dies sind bereits alle gewünschten Zahlen außer der 0 (im Fall, dass n oder $n + 1$ durch 4 teilbar ist). Die 0 kann man jedoch leicht erzeugen: Man ersetzt zunächst $n-1, n$ durch 1, dann $n-3, n-2$ durch 1 und so weiter, bis nur noch Einsen an der Tafel stehen. Dies sind dann gerade viele Einsen, man kann daher immer aus zwei Einsen eine 0 erzeugen und erhält am Ende eine einzelne 0.