O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.)**.** 37 positive ganze Zahlen bilden eine geometrische Folge, also eine Folge, bei der das Verhältnis benachbarter Folgenglieder immer dasselbe ist. Das erste und letzte Folgenglied sind teilerfremd. Beweise, dass das 19te Folgenglied die 18te Potenz einer positiven ganzen Zahl ist.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Ein quadratisches 10×10-Gitter sei entlang 80 innerer Einheitssegmente in 20 Polygone gleicher Fläche zerteilt. Beweise, dass diese Polygone alle kongruent zueinander sind.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Jeder Koeffizient eines nicht-konstanten Polynoms ist eine ganze Zahl, deren Betrag höchstens 2015 ist. Beweise, dass jede positive Nullstelle des Polynoms größer als $\frac{1}{2016}$ ist.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis einbeschrieben (also ein Sehnenviereck). Die Verlängerungen gegenüberliegender Seiten schneiden sich in den Punkten P und Q. Die Mittelpunkte der Diagonalen seien K und N. Beweise, dass $\angle PKQ + \angle PNQ = 180°$.

Aufgabe 5. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4, 6\}$ und $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ erzeugt $\{1, 2, 3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (2 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (6 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Aufgabe 6. Basil hat eine kugelförmige Wassermelone mit 20 cm Durchmesser. Mit einem langen Messer macht Basil drei Einschnitte, die jeweils (paarweise) senkrecht zueinander verlaufen. Jeder Einschnitt hat die Tiefe h, die Schnittfläche ist also ein Kreisausschnitt der Höhe h. Muss die Wassermelone in jedem Fall in mindestens zwei Stücke zerlegt worden sein, wenn

(a) (6 P.) $h = 17$ cm bzw.

(b) (6 P.) $h = 18$ cm ist?

Aufgabe 7 (12 P.)**.** N Kinder, die alle (paarweise) verschieden groß sind, stehen in einer Reihe (irgendwie angeordnet). Die folgende zweischrittige Prozedur wird wiederholt angewendet: Als Erstes wird die Reihe in so wenige Gruppen wie möglich geteilt, so dass innerhalb einer Gruppe alle Kinder von links nach rechts aufsteigend der Größe nach sortiert sind (dabei können Gruppen auch nur aus einem Kind bestehen). Als Zweites wird die Reihenfolge der Kinder innerhalb ihrer Gruppe genau umgedreht (die Kinder stehen also absteigend der Größe nach sortiert). Beweise, dass nach $N - 1$ solchen Umordnungen die Kinder in absteigender Reihenfolge von links nach rechts angeordnet sind.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!