

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Pete addiert 100 aufeinanderfolgende Zweierpotenzen beginnend mit einer beliebigen, während Basil mehrere aufeinanderfolgende natürliche Zahlen beginnend mit der 1 aufsummiert. Können beide dasselbe Ergebnis erhalten?

Aufgabe 2 (4 P.). Eine Motte hat vier kleine Löcher in einen quadratischen Teppich mit Kantenlänge 275 cm gefressen. Kann man immer ein quadratisches Stück mit 1 m Kantenlänge ohne Loch ausschneiden? (Betrachte jedes Loch als Punkt.)

Aufgabe 3 (4 P.). Es seien $2n + 1$ ganze Zahlen gegeben: einmal die 0 und je zweimal jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$. Für welche Zahlen n kann man die $2n + 1$ Zahlen so anordnen, dass für jedes $m = 1, \dots, n$ jeweils genau m Zahlen zwischen den zwei Zahlen m stehen?

Aufgabe 4 (5 P.). Im Dreieck $\triangle ABC$ werde die Seitenhalbierende AM durch die Punkte K und L gedrittelt, es gelte also $|AK| = |KL| = |LM| = \frac{1}{3}|AM|$. Der Punkt P sei so gewählt, dass die Dreiecke $\triangle KPL$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind ($\frac{|KP|}{|AB|} = \frac{|PL|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|AC|}$) und dass P und C auf derselben Seite der Geraden AM liegen. Beweise, dass P auf der Geraden AC liegt.

Aufgabe 5 (5 P.). 2015 positive ganze Zahlen seien so im Kreis angeordnet, dass die Differenz zweier benachbarter Zahlen jeweils mit ihrem größten gemeinsamen Teiler (ggT) übereinstimmt. Ermittle die größte Zahl N , die in jedem Fall ein Teiler des Produktes dieser 2015 Zahlen sein muss.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!