

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Es sei A eine positive ganze Zahl. Zwei Operationen sind erlaubt: Die Zahl kann um 9 erhöht werden oder eine Ziffer 1 darf von beliebiger Stelle aus der Zahl entfernt werden. Ist es immer möglich, $A + 1$ zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Bemerkung: Wenn eine führende 1 gelöscht wird, werden auch alle führenden Nullen gelöscht.

Aufgabe 2 (4 P.). In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei der Winkel bei C ein rechter. Auf den Katheten AC und BC werden außerhalb des Dreiecks Quadrate $ACKL$ und $CBNM$ konstruiert. Sei CE eine Höhe im Dreieck. Beweise, dass der Winkel $\angle MEL$ ein rechter ist.

Aufgabe 3 (4 P.). Acht Türme sind so auf einem 8×8 -Schachbrett angeordnet, dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagrecht oder senkrecht an). Die Felder sind wie folgt zwischen den Türmen aufgeteilt: Jeder besitzt sein eigenes Feld. Ein Feld, das von zwei Türmen bedroht wird, gehört dem näheren; falls beide gleich weit entfernt sind, gehört ihnen jeweils das halbe Feld. Beweise, dass jedem Turm die gleiche Fläche des Brettes gehört.

Aufgabe 4 (4 P.). An 100 Steinen zeigen Aufkleber deren wirkliches Gewicht. Keine zwei Steine sind gleich schwer. Der schelmische Greg möchte die Aufkleber so umordnen, dass die Summe der Zahlen einer beliebigen Gruppe von 1 bis 99 Steinen niemals deren wirklichem Gewicht entspricht. Ist dies immer möglich?

Aufgabe 5 (5 P.). Ein quadratisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten sei *zulässig*, wenn der erste Koeffizient 1 ist, alle Nullstellen ganzzahlig sind und der Betrag eines Koeffizienten 2013 übersteigt. Basil hat die Summe aller zulässigen Polynome gebildet. Beweise, dass das Ergebnispolynom keine reellen Nullstellen hat.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!