Städtewettbewerb Herbst 2011 Lösungsvorschläge

Hamburg

26. Oktober 2011 [Version 18. Februar 2012]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). Auf einer Tafel steht eine ganze Zahl $N > 1$. Alex schreibt nun positive ganze Zahlen dahinter, welche er auf folgende Weise erhält: Er wählt einen Teiler der letzten Zahl an der Tafel und addiert ihn zu dieser letzten Zahl oder subtrahiert ihn davon. Dabei muss der gewählte Teiler größer als 1 sein. Ist es Alex immer möglich, also für jede Ausgangszahl N, auf diese Weise irgendwann die Zahl 2011 an die Tafel zu schreiben?

Lösung. Alex erhält 2011 auf folgende Weise: Er addiert N und erhält die gerade Zahl $2N$. Anschließend addiert oder subtrahiert er so oft die Zahl 2, bis er 4022 an die Tafel schreiben kann. Das ist möglich, weil er dabei nur gerade Zahlen erzeugt und daher jeweils im nächsten Schritt den Teiler 2 addieren oder subtrahieren darf. Von 4022 subtrahiert er dann 2011, das ergibt 2011. □

Aufgabe M.2 (4 P.). Im Dreieck $\triangle ABC$ wird der Punkt P auf der Seite AB so gewählt, dass AP doppelt so lang ist wie PB. Außerdem sei Q der Mittelpunkt der Seite AC. Zeige: Falls CP doppelt so lang ist wie PQ, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig.

Lösung. Es sei R der Mittelpunkt der Strecke AP. Nach dem Strahlensatz gilt $|QR| = \frac{1}{2}|CP| = |PQ|$. Q liegt also auf der Mittelsenkrechten von RP. Weil $|AP| = 2|PB|$ gilt, folgt $|AR| = \frac{1}{3}|AB| = |PB|$. Daher sind die Mittelsenkrechten der Strecken AB und RP identisch, somit liegt Q auf der Mittelsenkrechten von AB. Daraus folgt $|AQ| = |BQ|$. Da zudem AQ und CQ gleichlang sind, liegt B auf dem Thaleskreis über AC, also hat $\triangle ABC$ bei B einen rechten Winkel. □

Aufgabe M.3 (5 P.). Gegeben sind eine Balkenwaage und einige (mindestens zwei) paarweise verschiedene Gewichte. Wann immer man zwei dieser Gewichte auf eine Seite der Waage legt, kann man die Waage durch eines oder mehrere der anderen Gewichte ausbalancieren. Welches ist die kleinste Anzahl an Gewichten, für die dies möglich ist?

Lösung. Für weniger als 5 Gewichte ist es nicht möglich, die Waage auszubalancieren, wenn man die beiden schwersten Gewichte auf eine Seite legt, denn dann sind höchstens zwei leichtere Gewichte übrig. Angenommen, es gäbe fünf verschiedene Gewichte mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann müssten die beiden schwersten Gewichte zusammen so schwer sein wie die drei anderen Gewichte zusammen. Dies müsste aber auch für schwerste und das drittschwerste

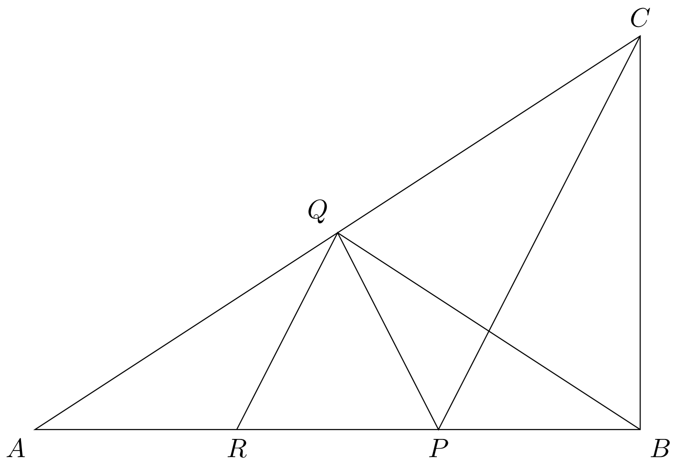

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.2.

Gewicht zusammen gelten: Von zwei weiteren Gewichten ist mindestens eins leichter als das drittschwerste und beide sind leichter als das schwerste, daher sind sie zusammen leichter als das schwerste und das drittschwerste zusammen. Es ist klar, das diese Bedingungen nicht beide zugleich erfüllt sein können: Das schwerste und das drittschwerste Gewicht sind zusammen leichter als die beiden schwersten Gewichte, aber das leichteste, das zweitleichteste und das viertleichteste Gewicht zusammen sind schwerer als die leichtesten drei Gewichte zusammen. Daher muss eine Menge von Gewichten mit dieser Eigenschaft aus mindestens sechs Gewichten bestehen.

Ein Beispiel für sechs verschiedene Gewichte mit dieser Eigenschaft sind Gewichte von 3, 4, 5, 6, 7 und 8 Gramm. Jedes Paar von Gewichten zwischen 4 und 7 Gramm ist insgesamt gleich schwer wie das Gewicht, das 1 Gramm leichter ist als leichtere der beiden Gewichte, zusammen mit dem Gewicht, das 1 Gramm schwerer ist als das schwerere der beiden Gewichte. Für jedes Paar von Gewichten, deren Differenz mindestens 3 Gramm beträgt, sind das Gewicht, das 1 Gramm schwerer als das leichtere der beiden Gewichte ist, und das Gewicht, das ein Gramm leichter als das schwerere der beiden Gewichte ist, voneinander und von diesen beiden Gewichten verschieden und wiegen zusammen genauso viel wie diese beiden Gewichte. Alle übrigen Paare von Gewichten sind insgesamt so schwer wie ein anderes Gewicht oder drei andere Gewichte zusammen:

$$\begin{aligned}
3+4&=7\\
3+5&=8\\
6+8&=3+4+7\\
7+8&=4+5+6.
\end{aligned}$$

Daher ist die kleinste mögliche Anzahl solcher Gewichte 6. $\square$

Aufgabe M.4 (6 P.)**.** Es ist ein schachbrettartiger Tisch mit 2012 Zeilen und $k > 2$ Spalten gegeben. Ein Spielstein wird in einem Feld der äußersten linken Spalte platziert und zwei Spieler bewegen ihn abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den Stein um ein Feld nach rechts, oben oder unten zu bewegen, wobei der Stein nicht auf ein Feld bewegt werden darf, welches er schon einmal belegt hat. Das Spiel endet, sobald der Stein in die äußerste rechte Spalte gezogen wird. Allerdings ist zu Beginn des Spiels nicht bekannt, ob der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt oder verliert. Dies wird erst bekannt gegeben, sobald der Stein die zweite Spalte von rechts erreicht. Kann einer der Spieler seinen Sieg erzwingen?

LÖSUNG. Der erste Spieler kann seinen Sieg erzwingen. Seine Strategie sieht wie folgt aus: Zunächst zieht er nach oben oder unten, in Richtung auf dasjenige äußere Feld der ersten Spalte, das die andere Farbe als das Feld hat, auf dem der Stein sich befindet. Falls keiner der beiden Spieler den Stein nach rechts zieht, bevor er die oberste oder unterste Zeile erreicht hat, dann vergehen eine ungerade Anzahl an Zügen, bis der Stein in die oberste oder unterste Zeile gezogen wird. Daher muss in jedem Fall der zweite Spieler den Stein in Spalte 2 ziehen. Solange dies nicht bereits die Spalte $k-1$ ist, verhält sich der erste Spieler wie zuvor in Spalte 1. Somit zieht der zweite Spieler den Stein irgendwann in Spalte $k-1$.

Nun wird bekannt gegeben, ob der Spieler, den den letzten Zug macht, gewinnt oder verliert. Gewinnt er, zieht der erste Spieler in die letzte Spalte und gewinnt. Ansonsten verfährt der erste Spieler wie in den Spalten zuvor und zwingt somit den Gegner, in die letzte Spalte zu ziehen und dadurch zu verlieren. □

Aufgabe M.5 (6 P.)**.** Gegeben seien positive Zahlen a, b, c, d kleiner als 1. Zeige: Ist $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, dann gilt

$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$

LÖSUNG. Aus

$$abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$

folgt ohne Einschränkung (sonst kann man in der Benennung a und c mit b und d vertauschen)

$$(1-a)(1-c) \geq ac \qquad \text{und} \qquad (1-b)(1-d) \leq bd.$$

Äquivalent dazu ist

$$1-(a+c) \geq 0 \qquad \text{und} \qquad 1-(b+d) \leq 0,$$

woraus man durch Multiplikation

$$(1-(a+c))(1-(b+d)) \leq 0$$

erhält. Multipliziert man einen Teil aus, erhält man wie gewünscht

$$a+b+c+d-(a+c)(b+d) \geq 1.$$ □

Aufgabe M.6 (7 P.)**.** Ein Auto fährt auf einer geraden Straße mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 Kilometern pro Stunde. Parallel zu dieser Straße verläuft ein 100 Meter langer Zaun. Der Beifahrer des Autos misst den Winkel in seinem Blickfeld, welchen der Zaun von seinem Standpunkt aus einnimmt. Dies wiederholt er in Abständen von jeweils einer Sekunde. Beweise, dass die Summe aller dieser Winkel kleiner als 1100° ist.

LÖSUNG. Bei einer Geschwindigkeit von 60 Kilometern pro Stunde benötigt das Auto eine Minute für einen Kilometer. Es legt 100 Meter also in 6 Sekunden zurück. Somit befindet sich aus Sicht des Beifahrers der Anfang des Zaunes genau in der Richtung, in der sich 6 Sekunden zuvor das Ende des Zaunes befunden hat. Betrachtet man also nur jeden sechsten gemessenen Winkel, dann ist die Summe dieser Winkel 180° (oder weniger, falls nur ein begrenzter Zeitraum betrachtet wird), nämlich von genau vor dem Auto bis genau hinter ihm. Insgesamt ist die Summe der Winkel $6 \cdot 180° = 1080°$, also kleiner als 1100°. □

Aufgabe M.7 (9 P.)**.** Die Ecken eines regelmäßigen 45-Ecks werden mit drei Farben gefärbt, wobei jede Farbe gleich häufig verwendet wird. Nun wählt man in jeder Farbe drei Ecken aus und betrachtet die Dreiecke, welche von den gewählten gleichfarbigen Punkten gebildet werden. Zeige, dass man die Punkte stets so wählen kann, dass diese drei Dreiecke paarweise kongruent sind.

LÖSUNG. Die drei Farben seien Rot, Blau und Grün. Es gibt 45 Drehungen (inklusive der Drehung um 0°), die Kongruenzabbildungen des 45-Ecks sind. Für jede solche Drehung zählen wir, wie viele rot markierte Ecken auf blau markierte abgebildet werden. Da jede rote Ecke genau einmal auf jede blaue Ecke abgebildet wird, haben wir insgesamt $15^2 = 225$ Übereinstimmungen, also im Durchschnitt $225/45 = 5$ pro Drehung. Bei der Drehung um 0° haben wir aber keine Übereinstimmungen, es muss daher eine Drehung mit mehr als 5 Übereinstimmungen geben. Wir merken uns diese Drehung sowie die (mindestens) 6 dazugehörigen roten Ecken. Jetzt betrachten wir erneut alle 45 Drehungen und zählen diesmal, wie viele der gerade ausgewählten roten Ecken auf grüne Ecken abgebildet werden. Insgesamt zählen wir dabei mindestens $6 \cdot 15 = 90$ Übereinstimmungen, im Durchschnitt also $90/45 = 2$ pro Drehung. Wie zuvor haben wir bei der Drehung um 0° keine Übereinstimmungen (bei der im ersten Schritt gemerkten Drehung ebenfalls), es gibt also eine Drehung, bei der 3 der gemerkten roten Ecken auf grüne Ecken abgebildet werden. Wieder merken wir uns die Drehung und die 3 roten Ecken. Diese Ecken bilden ein Dreieck, welches durch die im ersten Schritt gemerkte Drehung in ein Dreieck mit blauen Ecken überführt wird. Durch die im zweiten Schritt gemerkte Drehung wird es in ein Dreieck mit grünen Ecken überführt, wir haben also drei kongruente Dreiecke mit der gewünschten Eigenschaft gefunden. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.)**.** Pete markiert mehrere Punkte (mehr als zwei) in der Ebene, so dass alle Abstände zwischen ihnen verschieden sind. Ein Paar (A, B) von Punkten heißt *ungewöhnlich*, wenn A der am weitesten von B entfernte Punkt ist und B der am nächsten an A gelegene Punkt (abgesehen von A selbst). Welches ist die größte Zahl an ungewöhnlichen Paaren, die Pete erhalten kann?

LÖSUNG. Die maximale Zahl an ungewöhnlichen Paaren ist 1. Ein ungewöhnliches Paar erhält Pete zum Beispiel, wenn er die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ und $C = (3, 0)$ markiert, denn dann ist (A, B) ungewöhnlich.

Nun müssen wir zeigen, dass es nicht mehr als ein ungewöhnliches Paar geben kann. Wir können offensichtlich annehmen, dass es ein ungewöhnliches Paar (A, B) gibt. Der Punkt A kann nicht in einem weiteren ungewöhnlichen

Paar enthalten sein: Da alle Abstände unterschiedlich sind, könnte ein solches Paar nur von der Art (A', A) sein, wobei A' der am weitesten von A entfernte Punkt ist. Da (A, B) ungewöhnlich ist, gilt aber $|A'B| < |AB| < |A'A|$, also ist A nicht der am nächsten an A' gelegene Punkt und (A', A) ist nicht ungewöhnlich. Entsprechend kann auch B nicht in einem weiteren ungewöhnlichen Paar liegen.

Seien nun C und D zwei weitere Punkte. Weil (A, B) ungewöhnlich ist, liegt C näher an B als A und D liegt weiter von A entfernt als B, es gilt also $|CB| < |AB| < |AD|$. Daher kann $|CD|$ nicht sowohl kleiner als $|CB|$ als auch größer als $|AD|$ sein. Mit anderen Worten, es ist nicht sowohl D am nächsten an C gelegen als auch C am weitesten von D entfernt, was beweist, dass (C, D) nicht ungewöhnlich ist. Also kann es keine zwei ungewöhnlichen Paare geben. □

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** Gegeben seien positive Zahlen a, b, c, d kleiner als 1. Zeige: Ist $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$, dann gilt

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.5. □

Aufgabe O.3 (5 P.)**.** Im Dreieck $\triangle ABC$ seien A_1, B_1 und C_1 die Fußpunkte der Höhen durch die Ecken A, B und C. Die Punkte C_A und C_B seien die Projektionen von C_1 auf AC beziehungsweise BC. Zeige, dass die Gerade C_AC_B die Strecken C_1A_1 und C_1B_1 jeweils in deren Mitte schneidet.

Lösung. Zusätzlich zu den in der Aufgabenstellung definierten Punkten seien M der Schnittpunkt der drei Höhen sowie P und Q die Schnittpunkte von C_AC_B mit C_1A_1 beziehungsweise C_1B_1, siehe auch Abbildung 2. Zu zeigen ist also $|PC_1| = |PA_1|$ und $|QC_1| = |QB_1|$.

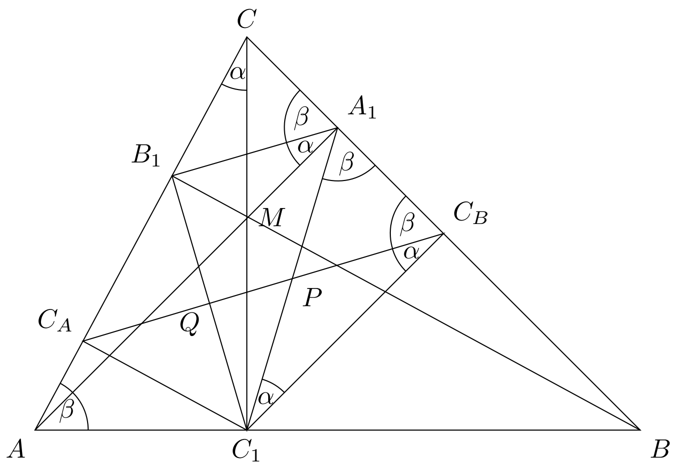

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3.

Da die Dreiecke $\triangle MA_1C$ und $\triangle CMB_1$ rechtwinklig sind, ist MA_1CB_1 ein Sehnenviereck. Also ist $\angle B_1A_1M = \angle B_1CM$. Diesen Winkel nennen wir α. Weil die Vierecke MA_1CB_1 und $C_1C_BCC_A$ ähnlich sind (denn ihre Seiten sind parallel), haben wir auch $\angle C_AC_BC_1 = \alpha$.

Wir setzen nun $\beta := \angle BAC$. Es gilt $\beta = 90° - \alpha$, weil das Dreieck $\triangle AC_1C$ einen rechten Winkel bei C_1 hat. Außerdem gilt $\angle CA_1B_1 = \angle A_1C_BP = 90° - \alpha = \beta$, weil $\angle CA_1A$ und $\angle A_1C_BC_1$ rechte Winkel sind.

Analog zu $\angle CA_1B_1 = \angle BAC$ erhalten wir auch $\angle C_1A_1B = \angle BAC = \beta$. Weil das Dreieck $\triangle C_1C_BA_1$ einen rechten Winkel bei C_B hat, erhalten wir schließlich noch $\angle C_BC_1A_1 = 90° - \beta = \alpha$.

Somit sind die Dreiecke $\triangle PC_BA_1$ und $\triangle PC_1C_B$ gleichschenklig und wir haben $|PA_1| = |PC_B| = |PC_1|$. Die Identität $|QB_1| = |QC_1|$ erhalten wir auf entsprechendem Weg. □

Bemerkung. In der obigen Lösung wird implizit verwendet, dass das Dreieck spitzwinklig ist. Bei einem stumpfwinkligen Dreieck müssen die Argumente nur minimal abgewandelt werden, da einige Punkte außerhalb des Dreiecks liegen. Bei einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Fall anders: Ist der rechte Winkel bei A, so fällt C_1 mit B_1 und C_A zusammen, ebenso gilt dann $A_1 = C_B$. Die Strecke C_1B_1 ist also gar nicht definiert und die Strecke C_1A_1 fällt mit der Strecke C_AC_B zusammen, es gibt also keinen Schnittpunkt. Der Fall, dass der rechte Winkel bei B ist, ist analog. Ist der rechte Winkel bei C, dann fallen A_1 und B_1 auf C. Weiter ist dann $CC_AC_1C_B$ ein Rechteck und die Diagonale C_AC_B halbiert wie gewünscht die andere Diagonale $C_1C = C_1A_1 = C_1B_1$.

Aufgabe O.4. Existiert ein konvexes N-Eck, für welches alle Seiten gleich lang sind und alle Ecken auf der Parabel $y = x^2$ liegen, falls

(a) (3 P.) $N = 2011$;

(b) (4 P.) $N = 2012$?

Lösung. (a) Ein solches 2011-Eck existiert. Für $L > 0$ betrachten wir das 2011-Eck mit folgenden Ecken auf der Parabel: Der Nullpunkt sei eine Ecke. In beide Richtungen gebe es nun jeweils 1005 weitere Ecken $A_1, \dots, A_{1005}, B_1, \dots, B_{1005}$ auf der Parabel, so dass die Kanten jeweils Länge L haben. Die beiden Ecken A_{1005} und B_{1005} sind ebenfalls durch eine Kante verbunden. Diese hat jedoch nicht ohne Weiteres die Länge L. Allerdings hängt die Länge dieser Kante stetig vom Wert L ab. Für $L = 1$ ist die Kante länger als L, weil bereits die Ecken A_1 und B_1 (und somit erst recht A_{1005} und B_{1005}) eine x-Koordinate mit Betrag größer $\frac{1}{2}$ haben. Für $L = 4020$ ist der Abstand von A_{1005} und B_{1005} zum Nullpunkt kleiner als $1005 \cdot 4020 = \frac{1}{4} \cdot L^2$. Daher sind die y-Koordinaten kleiner als $\frac{1}{4} \cdot L^2$ und somit die Beträge der x-Koordinaten kleiner als $\frac{1}{2} \cdot L$. Also ist der Abstand von A_{1005} und B_{1005} kleiner als L.

Der Zwischenwertsatz besagt, dass eine stetige Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Wenden wir ihn auf die Funktion $|A_{1005}B_{1005}| - L$ an, besagt er, dass für ein L zwischen 1 und 4020 der Wert 0 angenommen wird, also auch die letzte Kante die Länge L hat.

(b) Ein solches 2012-Eck existiert nicht. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe so ein 2012-Eck, und führen dies zum Widerspruch. Die Ecken seien von links nach rechts mit $A_1, \dots, A_{2012}$ bezeichnet, die Kantenlänge nennen wir L. Wir betrachten nun die beiden „mittleren" Ecken A_{1006}, A_{1007}. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass A_{1007} eine mindestens ebenso große y-Koordinate wie A_{1006} hat. Weil die Steigung der Parabel mit $2x$ proportional zur x-Koordinate ist – für $|x_1| < |x_2|$ die Steigung bei x_1 also betragsmäßig kleiner als bei x_2 ist – hat die Kante $A_{1007}A_{1008}$ eine betragsmäßig mindestens so große Steigung wie die Kante $A_{1005}A_{1006}$. Somit ist die Differenz der y-Koordinaten für A_{1005} und A_{1008} mindestens so groß wie für A_{1006} und A_{1007}. Da die Differenz der x-Koordinaten größer ist als für A_{1006} und A_{1007}, ist $|A_{1005}A_{1008}| > |A_{1006}A_{1007}| = L$. Analog erhalten wir, dass $|A_{1004}A_{1009}| > |A_{1005}A_{1008}|$ und so weiter. Letztendlich folgt mit $|A_1A_{2012}| > L$ der gewünschte Widerspruch. Also kann es ein solches 2012-Eck nicht geben. □

Aufgabe O.5 (7 P.)**.** Wir nennen eine positive ganze Zahl *gut*, wenn sie keine Null als Ziffer hat. Eine gute Zahl heißt *besonders*, falls sie mindestens k Ziffern hat und jede Ziffer größer als die vorhergehende (von links nach rechts gesehen) ist. Eine gute Zahl können wir nun wie folgt verändern: In jedem Schritt wählen wir eine besondere Zahl und fügen diese entweder links, rechts oder zwischen zwei Ziffern zur Dezimaldarstellung der aktuellen Zahl hinzu oder löschen sie aus der Dezimaldarstellung, falls sie darin vorkommt. Was ist das größte k, für welches man auf diese Weise jede gute Zahl in jede andere gute Zahl umwandeln kann?

Lösung. Das größte solche k ist 8. Für $k = 9$ lässt sich zum Beispiel die gute Zahl 1 nicht in die gute Zahl 2 umwandeln: Die einzige besondere Zahl ist in diesem Fall 123456789 und bei mehrfachem Hinzufügen und Löschen dieser Zahl zur Zahl 1 wird die Ziffer 1 stets häufiger als die Ziffer 2 vorkommen. Also kann die Zahl 2 nie erreicht werden.

Es bleibt zu zeigen, dass es für $k = 8$ möglich ist, jede gute Zahl in jede andere gute Zahl umzuwandeln. Hierfür zeigen wir, dass wir zu einer gegebenen Zahl jede beliebige Ziffer an jeder beliebigen Stelle der Dezimaldarstellung hinzufügen können, ohne die restlichen Ziffern zu ändern. (Durch umgekehrtes Vorgehen kann man dann auch jede beliebige Ziffer entfernen.) Die Ziffer 1 ist einfach hinzuzufügen: Zunächst fügt man an der gewünschten Stelle die besondere Zahl 123456789 ein und entfernt hieraus dann die besondere Zahl 23456789.

Sei nun z eine Ziffer größer als 1 und nehmen wir an, dass wir die Ziffern 1 bis $z-1$ wie gewünscht hinzufügen und entfernen können. Die Ziffer z können wir dann wie folgt einfügen: Zunächst fügen wir 123456789 ein, dann entfernen wir daraus die Ziffern 1 bis $z-1$ (was nach Annahme möglich ist) und fügen sie in aufsteigender Reihenfolge hinter der Ziffer z ein. Auf diese Weise haben wir in die ursprüngliche Zahl die Ziffernfolge $z1\ldots(z-1)(z+1)\ldots9$ eingefügt. Da es sich bei den letzten 8 Ziffern um eine besondere Zahl handelt, können wir sie entfernen und haben somit die Ziffer z in die ursprüngliche Zahl eingefügt. Per Induktion erhalten wir also, dass wir jede Ziffer einfügen oder entfernen können. Daher können wir jede gute Zahl in jede andere gute Zahl umwandeln. □

Aufgabe O.6 (7 P.)**.** Zeige, dass für $n > 1$ die Zahl $1^1+3^3+5^5+\cdots+(2^n-1)^{2^n-1}$ ein Vielfaches von 2^n aber nicht von 2^{n+1} ist.

Lösung. In dieser Lösung wird die Notation $a \equiv b\ (m)$ benutzt (lies „*a kongruent b modulo m*“), die bedeutet, dass a und b denselben Rest bei der Teilung durch m lassen bzw. äquivalent dass $a-b$ durch m teilbar ist. Darüber hinaus wird das Prinzip der *Vollständigen Induktion* benutzt: Eine Aussage wird für eine natürliche Zahl k gezeigt und danach wird gezeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt, sofern sie für n gilt. Das bedeutet dann, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ gilt.

Zwischenbehauptung: Für ungerade x gilt für jede natürliche Zahl n

$$x^{2^n} \equiv 1 \quad (2^{n+2}). \tag{1}$$

Für $n = 1$ steht dort $x^2 \equiv 1 \ (8)$. Eine ungerade Zahl ist kongruent 1, 3, 5 oder 7 modulo 8 und wegen $1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \ (8)$ gilt (1) für $n = 1$. Es wird nun (1) für ein festes n angenommen und damit $x^{2^{n+1}} \equiv 1 \ (2^{n+1+2})$ gezeigt (also die Aussage für $n+1$ statt n).

Nach (1) gilt nun entweder $x^{2^n} \equiv 1 \ (2^{n+1+2})$ oder $x^{2^n} \equiv 1+2^{n+2} \ (2^{n+1+2})$. Durch Quadrieren erhält man in beiden Fällen die Behauptung, im ersten sofort und im zweiten

$$x^{2^{n+1}} \equiv (1+2^{n+2})^2 = 1^2 + 2^{n+1+2} + 2^{2n+2} \equiv 1 \quad (2^{n+1+2})$$

nach der Feststellung, dass der zweite und dritte Term beim Ausmultiplizieren kongruent zu 0 modulo 2^{n+1+2} sind. Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Wir beweisen nun die ursprüngliche Behauptung per Induktion. Für $n = 2$ ist $1^1 + 3^3 = 28$ ein Vielfaches von $2^2 = 4$, aber nicht von $2^3 = 8$. Es wird nun wieder angenommen, dass

$$1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1} \equiv 2^n \quad (2^{n+1})$$

für ein festes $n > 1$ gilt, die Summe also durch 2^n, aber nicht durch 2^{n+1} teilbar ist, und gezeigt, dass dann die Aussage der Aufgabe auch für $n+1$ anstelle von n zutrifft, dass also gilt

$$1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1} - 1} \equiv 2^{n+1} \quad (2^{n+2}).$$

Die Summe für $n+1$ hat doppelt so viele Summanden wie für wn. Dabei gibt es genau zu jedem x^x in der Summe für n noch einen Summanden $(x+2^n)^{x+2^n}$. Wendet man die Zwischenbehauptung an, so ist

$$(x+2^n)^{x+2^n} = (x+2^n)^x \cdot (x+2^n)^{2^n} \equiv (x+2^n)^x \cdot 1 \quad (2^{n+2}).$$

Beim Ausmultiplizieren von $(x+2^n)^x$ fallen alle Terme modulo 2^{n+2} weg, bei denen 2^n mindestens zur zweiten Potenz, nämlich $(2^n)^2 = 2^{2n}$, steht. Man behält nur die ersten beiden Terme, also gilt

$$(x+2^n)^{x+2^n} \equiv (x+2^n)^x \equiv x^x + x \cdot x^{x-1} \cdot 2^n = x^x(1+2^n) \quad (2^{n+2}).$$

Addiert man noch x^x auf beiden Seiten der Kongruenz, erhält man

$$x^x + (x+2^n)^{x+2^n} \equiv x^x(2+2^n) \quad (2^{n+2}),$$

also

$$\begin{aligned} &1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1} - 1} \\ \equiv &(1+2^{n-1}) \cdot 2 \cdot \left(1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1}\right) \quad (2^{n+2}). \end{aligned} \tag{2}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1} \equiv 2^n \quad (2^{n+2})$$
$$\text{oder} \quad 1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1} \equiv 2^n + 2^{n+1} \quad (2^{n+2}),$$

in jedem Fall aber

$$2 \cdot \left(1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1}\right) \equiv 2 \cdot 2^n \quad (2^{n+2}).$$

Setzt man dies in (2) ein, erhält man

$$1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1} - 1} \equiv (1 + 2^{n-1})2^{n+1} \equiv 2^{n+1} \quad (2^{n+2}).$$

Dies ist die Aussage für $n + 1$, womit die vollständige Induktion abgeschlossen ist. □

Aufgabe O.7 (9 P.)**.** Ein blauer Kreis wird durch 100 rote Punkte in 100 Kreisbögen unterteilt. Die Längen dieser Bögen sind genau die ganzen Zahlen von 1 bis 100, nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Zeige, dass es stets zwei Sehnen mit roten Endpunkten gibt, die senkrecht aufeinander stehen.

LÖSUNG. Falls zwei rote Punkte, nennen wir sie A und B, genau gegenüber liegen, dann ist nach dem Satz des Thales für jeden anderen roten Punkt C das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig und somit AC und BC zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen. Wir können daher annehmen, dass es solche Punkte nicht gibt.

Der Umfang des Kreises beträgt $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$. Wir betrachten nun alle Kreisbögen, deren Endpunkte rot sind und deren Länge kleiner als der halbe Umfang 2525, aber mindestens 2475 ist. Jeder rote Punkt ist Endpunkt eines solchen Bogens: Für den roten Punkt A gibt es im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn jeweils einen längsten Bogen mit rotem Endpunkt, der noch kürzer als 2525 ist. Da die beiden Endpunkte dieser Bögen einen Kreisbogen der Länge höchstens 100 begrenzen, muss mindestens einer dieser Bögen mindestens Länge 2475 haben. Die Länge 2475 kann außerdem nur dann auftreten, wenn *beide* diese Bögen so lang sind (und der Bogen zwischen ihren Endpunkten die Länge 100 hat). In diesem Fall gibt es an A sogar zwei Bögen der gesuchten Art.

Wir haben also für jeden der 100 roten Punkte mindestens einen Bogen gefunden. Da jeder Bogen hierbei zweimal (für jeden seiner Endpunkte) auftritt, haben wir mindestens 50 verschiedene Bögen mit einer Länge zwischen 2475 und 2524. Falls die Länge 2475 nicht auftritt, haben wir nur 49 verschiedene mögliche Längen für die 50 Bögen. Falls hingegen die Länge 2475 auftritt, haben wir für einen roten Punkt sogar zwei Bögen gefunden, also insgesamt mindestens 51 verschiedene Bögen mit 50 möglichen Längen. In jedem Fall muss daher eine Länge doppelt auftreten.

Es gibt also zwei Bögen mit roten Endpunkten und Länge $2525 - k$ mit $1 \leq k \leq 50$. Seien A und B die beiden (im Uhrzeigersinn) aufeinander folgenden roten Punkte, die einen Kreisbogen der Länge k begrenzen. Wir wählen einen der beiden Bögen der Länge $2525 - k$ und nennen ihn $\mathcal{C}$. Den Endpunkt von $\mathcal{C}$, der im Uhrzeigersinn auf B folgt, bezeichnen wir mit P, den anderen mit Q. Ist A ein Randpunkt von $\mathcal{C}$, dann liegt B innerhalb von $\mathcal{C}$, denn ansonsten läge B dem zweiten Randpunkt von $\mathcal{C}$ gegenüber, was wir bereits ausgeschlossen haben. Entsprechendes gilt auch, wenn B Randpunkt von $\mathcal{C}$ ist. Es liegen also entweder A und B beide außerhalb von $\mathcal{C}$ oder beide auf $\mathcal{C}$. Liegen beide außerhalb dann erhalten wir zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen wie folgt: Ist R der Punkt gegenüber von Q auf dem Kreis (siehe Abbildung 3), dann hat der Kreisbogen zwischen R und P die gleiche Länge wie der zwischen A und B, nämlich k. Also sind AP und BR parallel. Da QR der Durchmesser des Kreises ist, ist $\angle QBR$ ein rechter Winkel. Somit stehen auch AP und QB senkrecht aufeinander.

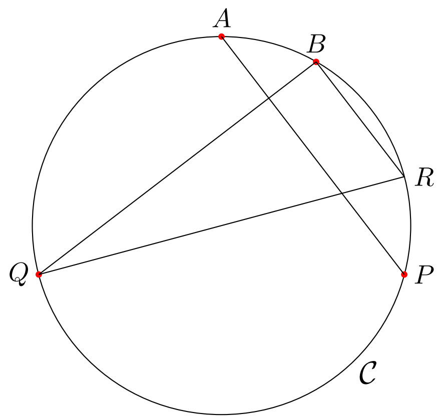

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7.

Wir können also annehmen, dass A und B beide auf $\mathcal{C}$ liegen. Falls weder A noch B Endpunkt von $\mathcal{C}$ sind, erhalten wir erneut senkrecht aufeinander stehende Sehnen: Sei wieder R der Q auf dem Kreis gegenüber liegende Punkt, siehe Abbildung 4. Dann ist AR parallel zu BP und $\angle QAR$ ein rechter Winkel, also stehen AQ und BP senkrecht aufeinander.

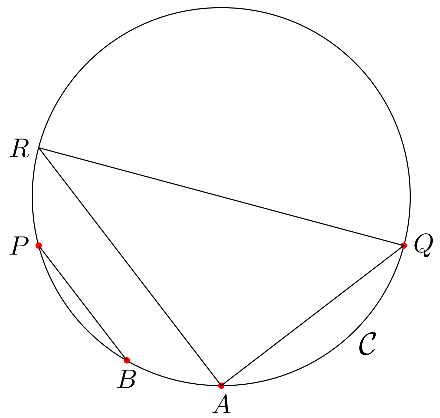

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7.

Der verbleibende Fall ist, wenn A und B auf $\mathcal{C}$ liegen und einer der beiden ein Endpunkt von $\mathcal{C}$ ist. In diesem Fall kommt der zweite Bogen der Länge $2525-k$, nennen wir ihn $\mathcal{D}$, ins Spiel: Wie für $\mathcal{C}$ erhalten wir auch hier senkrecht aufeinander stehende Sehnen, sofern nicht A und B auf $\mathcal{D}$ liegen und einer der beiden ein Endpunkt von $\mathcal{D}$ ist. Daher müssen sich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ genau in dem Bogen zwischen A und B schneiden. Verkürzen wir beide Bögen nun um diese Überschneidung, erhalten wir zwei Bögen $\mathcal{C}', \mathcal{D}'$ der Länge $2525 - 2k$, die sich nicht überschneiden. Sind A' und B' die beiden aufeinander folgenden roten Punkte, die einen Kreisbogen der Länge $2k$ begrenzen, dann können diese Punkte nicht sowohl auf $\mathcal{C}'$ als auch auf $\mathcal{D}'$ liegen. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir dann zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Christian Reiher, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.