O Oberstufe

Aufgabe 1. In einem Land gebe es genau 100 Städte, die als Punkte in der Ebene aufgefasst werden. In einem Buch ist zu je zwei Städten ihre Entfernung zueinander eingetragen (insgesamt 4950 Einträge).

(a) (2 P.) Irgendein Eintrag wurde entfernt. Ist es stets möglich, ihn anhand der anderen Einträge zu rekonstruieren?

(b) (3 P.) Angenommen, es wurden k Einträge gelöscht und keine drei Städte im Land liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Welches ist das größte k, für das man die fehlenden Einträge in jedem Fall rekonstruieren kann?

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Auf einer Rundstrecke starten $2N$ Radfahrer gleichzeitig vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung. Jeder Radfahrer fährt ein konstantes Tempo, aber keine zwei fahren das gleiche Tempo. Befinden sich zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Radfahrer wieder am gleichen Punkt, nennen wir dies eine *Begegnung*. Bis zum Mittag ist jeder Radfahrer jedem anderen mindestens einmal begegnet, aber niemals zweien oder mehr gleichzeitig. Zeige, dass jeder Radfahrer bis zum Mittag mindestens N^2 Begegnungen hatte.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Es sei ein beliebiges Vieleck gegeben. Für jede seiner Seiten teilen wir seine Länge durch die Summe der Längen aller anderen Seiten und summieren diese Verhältnisse auf. Zeige, dass die Summe stets kleiner als 2 ist.

Aufgabe 4. Zwei Zauberer duellieren sich. Zu Beginn fliegen sie in einer Höhe von 100 über dem Meer. Dann wenden sie abwechselnd Zaubersprüche an, wobei jeder Spruch die eigene Höhe um a und die des Gegners um b verringert, mit positiven reellen Zahlen $a < b$ (für jeden Spruch verschieden). Beide Zauberer kennen die gleichen Zaubersprüche und können jeden beliebig oft anwenden. Ein Zauberer gewinnt, wenn er sich irgendwann in einer positiven Höhe befindet, sein Gegner aber nicht. Gibt es eine Menge an bekannten Zaubersprüchen, für die der zweite Zauberer seinen Sieg erzwingen kann und die

(a) (2 P.) endlich ist;

(b) (5 P.) unendlich ist?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis mit Mittelpunkt O einbeschrieben, so dass seine Diagonalen nicht durch O verlaufen. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle AOC$ liege auf der Geraden durch B und D. Zeige, dass dann der Umkreismittelpunkt von $\triangle BOD$ auf der Geraden durch A und C liegt.

Aufgabe 6 (12 P.)**.** Die Einträge einer Tabelle der Größe 1000×1000 seien Einsen und Nullen. Zeige, dass man stets 990 Zeilen löschen kann, so dass in jeder Spalte mindestens eine Eins verbleibt, oder 990 Spalten, so dass in jeder Zeile mindestens eine Null verbleibt.

Aufgabe 7 (14 P.)**.** Das Quadrat $ABCD$ sei in kongruente Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen unterteilt. Die Figur F umfasse genau diejenigen Rechtecke, welche die Diagonale AC treffen. Zeige, dass diese Diagonale die Fläche von F halbiert.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!