

## O Oberstufe

**Aufgabe 1** (3 P.). Auf 2010 Schiffen werden Ananas, Bananen und Zitronen von Südamerika nach Russland transportiert. Auf jedem Schiff befinden sich genau so viele Bananen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Zitronen transportiert werden. Außerdem befinden sich auf jedem Schiff genau so viele Zitronen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Ananas transportiert werden. Zeige, dass die Gesamtanzahl an Früchten durch 31 teilbar ist.

**Aufgabe 2** (4 P.). Eine Funktion  $f(x)$  besitzt die folgende Eigenschaft: Jede Gerade in der  $xy$ -Ebene schneidet den Funktionsgraphen  $y = f(x)$  ebenso oft wie sie die Parabel  $y = x^2$  schneidet. Zeige, dass  $f(x) = x^2$ .

**Aufgabe 3** (5 P.). Kann man die Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders ohne Lücken und Überlappungen durch (endlich viele) regelmäßige Sechsecke überdecken? (Ein regelmäßiges Oktaeder hat 6 Ecken, alle Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke und jede Ecke liegt auf 4 Seitenflächen.)

**Aufgabe 4** (5 P.). Baron Münchhausen fordert dich auf, ein nicht konstantes Polynom  $P(x)$  mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten zu wählen und ihm die Werte  $P(2)$  und  $P(P(2))$  mitzuteilen. Er behauptet, aus diesen zwei Werten stets das Polynom bestimmen zu können. Lügt der Baron?

**Aufgabe 5** (6 P.). Eine Nadel liegt in der Ebene. Man darf sie nun um einen ihrer Endpunkte um  $45^\circ$  drehen. Ist es möglich, dass die Nadel nach einigen dieser Rotationen – wobei der Endpunkt, um den gedreht wird, bei jeder Rotation neu gewählt werden darf – wieder exakt ihre ursprüngliche Position einnimmt, ihre Endpunkte aber vertauscht sind? (Die Nadel darf als Strecke angesehen werden.)

---

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!