28. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 16. November 2006

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Als Ann ihren neuen Job antritt, wird ihr als erstes mitgeteilt, welche Arbeitskollegen sich gegenseitig kennen. Um sich dies zu merken, fertigt sie sich folgendes Schema an. Sie zeichnet einen großen Kreis und repräsentiert jeden Mitarbeiter durch eine Sehne, wobei sich die Sehnen genau dann schneiden, wenn sich die zugehörigen Mitarbeiter kennen. Ann ist sicher, dass sie auf diese Weise die Konstellation in jeder beliebigen Firma exakt abbilden kann. Hat Ann recht? (Zwei Sehnen schneiden sich bereits, wenn sie von dem gleichen Punkt ausgehen.)

Aufgabe 2: [6 Punkte]

Auf den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden drei Punkte – und zwar A_1 auf BC, B_1 auf AC und C_1 auf AB – so gewählt , dass A_1A, B_1B und C_1C gerade die Winkelhalbierenden in dem Dreieck $A_1B_1C_1$ sind. Zeigen Sie, dass AA_1, BB_1 und CC_1 die Höhen in dem Dreieck ABC sind.

Aufgabe 3: [6 Punkte]

Es sei $a = 0,12457\ldots$ die Zahl, deren n-te Ziffer hinter dem Komma genau die letzte Dezimalstelle vor dem Komma von $n\sqrt{2}$ ist. Zeigen Sie, dass a keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Kann jedes Prisma in lauter sich nicht überschneidende Pyramiden derart zerlegt werden, dass die Grundfläche jeder Pyramide Teil einer Grundfläche des Prismas ist und ihre Spitze auf der anderen Grundfläche des Prismas liegt?

Aufgabe 5: [7 Punkte]

Es sei $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a_n, b_n. Zeige, dass es unendlich viele Indizes n gibt mit $b_{n+1} < b_n$.

Aufgabe 6:

Wir sagen, dass die Karten eines 52-Kartendecks regulär geordnet sind, sofern je zwei benachbarte Karten entweder die gleiche Farbe (Pik, Kreuz, Herz, Karo) oder den gleichen Wert (Zwei bis Zehn, Bube, Dame, König, Ass) haben. Das Gleiche muss auch für die oberste und die unterste Karte gelten. Ferner muss noch die oberste Karte Pik Ass sein. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller möglichen regulären Anordnungen durch

a) 12! [3 Punkte]

b) 13! [5 Punkte]

teilbar ist.

Aufgabe 7:

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ positive Zahlen mit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{2} \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

a) Zeigen Sie: $k > 50$; [3 Punkte]

b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für irgend ein k an; [3 Punkte]

c) Finden Sie das kleinste k, für das ein solches Beispiel existiert. [3 Punkte]

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**