Städtewettbewerb Frühjahr 2005 Lösungsvorschläge

Hamburg

11. März 2005 [Version 24. April 2005]

Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.) Auf dem Graphen eines quadratischen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten werden zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gewählt. Zeige, dass die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen muss, wenn diese beiden Punkte einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

LÖSUNG Sei $f(x) := ax^2 + bx + c$ und $(y, f(y)), (z, f(z))$ die beiden markierten Punkte. Ist ihr Abstand ganzzahlig, so ist das Quadrat ihres Abstands eine Quadratzahl. Das Quadrat ihres Abstands ist

$$\begin{aligned}(y-z)^2 + \big(f(y) - f(z)\big)^2 =& (y-z)^2 + \big(a(y^2 - z^2) + b(y-z)\big)^2 \\ =& (y-z)^2 + \Big(\big(a(y+z) + b\big)(y-z)\Big)^2 \\ =& (y-z)^2\Big(1 + \big(a(y+z) + b\big)^2\Big).\end{aligned}$$

Da $(y-z)^2$ eine Quadratzahl ist, muss auch $\Big(1+\big(a(y+z)+b\big)^2\Big)$ eine Quadratzahl sein. Nun ist bereits $\big(a(y+z)+b\big)^2$ eine Quadratzahl; da 0 und 1 die einzigen Quadratzahlen mit Differenz 1 sind, folgt $a(y+z) + b = 0$ und somit

$$\begin{aligned} & (y-z)^2 + \big(f(y) - f(z)\big)^2 =(y-z)^2 \\ \Rightarrow \quad & f(y) =f(z)\end{aligned}$$

Somit ist die Verbindungsstrecke parallel zur x-Achse. □

Aufgabe 2 (5 P.) In einem Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AA' und BB' in dem Punkt H. Ferner bezeichnen X und Y die Mittelpunkte der Strecken AB bzw. CH. Zeige, dass sich die beiden Geraden durch $A'B'$ und durch XY rechtwinklig schneiden.

LÖSUNG Zeichnung siehe Abbildung 1. Die Dreiecke CHA' und HCB' sind rechtwinklig und besitzen die gleiche Hypothenuse CH. Somit besitzen diese beiden Dreiecke den gleichen Umkreis, CH ist der Durchmesser dieses Umkreises

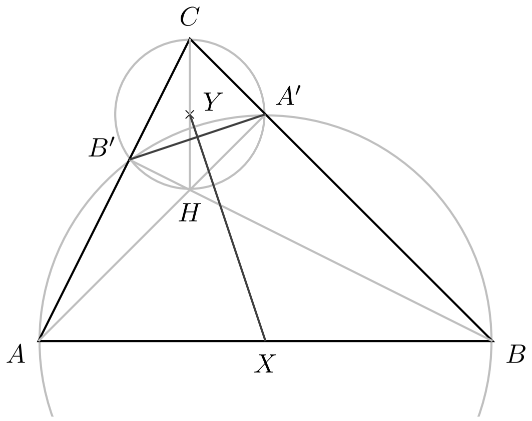

Abbildung 1: Zeichnung zu Lösung 2 der Mittelstufe

und demnach ist Y sein Mittelpunkt. Ebenso sind die Dreiecke ABA' und ABB' rechtwinklig und besitzen die gleiche Hypothenuse AB. Somit besitzen diese beiden Dreiecke den gleichen Umkreis, AB ist der Durchmesser dieses Umkreises und demnach ist X sein Mittelpunkt. Die beiden Kreise schneiden sich in A' und B'. Aus Symmetriegründen stehen für beliebige Kreise die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte und die Verbindungsstrecke ihrer Schnittpunkte senkrecht aufeinander. Da dies für die beiden erwähnten Umkreise gerade die Strecken XY und $A'B'$ sind, ist die Aufgabe hiermit gelöst. $\square$

Aufgabe 3 (5 P.) Die Uhr des Barons Münchhausen geht zwar richtig, allerdings befinden sich auf dem Zifferblatt keinerlei Markierungen, nur der Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger sind zu sehen. Der Baron behauptet nun, dass er trotzdem in der Tagzeit (von 8:00 Uhr bis 19:59 Uhr) die genaue Uhrzeit ablesen kann, denn die Stellung der drei Zeiger zueinander wiederholt sich in dieser Zeit niemals. Hat der Baron Recht oder nicht? (Die Zeiger haben unterschiedliche Längen und bewegen sich gleichförmig.)

Lösung Der Baron hat Recht. Sei eine beliebige Stellung der Zeiger gegeben. Wiederholt sich diese Stellung, so haben sich alle Zeiger um den gleichen Winkel weiterbewegt (bis auf Vielfache von 360°). Insbesondere gilt dies für Minuten- und Stundenzeiger. Der Minutenzeiger bewegt sich mit der 12-fachen Geschwindigkeit wie der Stundenzeiger. Sei α der Winkel zwischen der Position des Stundenzeigers zu Anfang und seiner Position, wenn sich Minuten- und Stundenzeiger zum ersten Mal wieder in der gleichen Stellung zueinander befinden wie zu Anfang. Dann gilt:

$$12\alpha = 360^\circ + \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{360^\circ}{11}\,.$$

Die entsprechenden Überlegungen für Sekunden- und Minutenzeiger liefern:

$$60\beta = 360^\circ + \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = \frac{360^\circ}{59}\,.$$

Sollen alle Zeiger wieder in der gleichen Stellung zueinander stehen, so muss $m\alpha = n\beta$ gelten für $m, n \in \mathbb{N}$. Da 11 und 59 teilerfremd sind, ist dies erst möglich, wenn alle Zeiger 360° zurückgelegt haben, also nach 12 Stunden. Also sagt Münchhausen die Wahrheit. □

Aufgabe 4 Ein kariertes Blatt mit den Maßen 10×12 wird so lange entlang der Karolinien gefaltet, bis sich ein 1×1-Karo ergibt. In wie viele Teile zerfällt das Blatt, wenn man das Karo

(a) **(2 P.)** entlang der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten bzw.

(b) **(4 P.)** entlang der Mittelpunkte zweier benachbarter Seiten

gerade durchschneidet. (Finde alle möglichen Anzahlen und zeige, dass es keine weiteren gibt.)

Lösung Während des Faltens werde ein Eckfeld des Papiers stets festgehalten. Wird das Papier nun an einer (Falt-)Geraden gefaltet, so verändern nur die Felder ihre Position, die sich auf der anderen Seite der Faltgeraden befinden als dieses Eckfeld. Diese Felder werden durch den Faltvorgang „umgeklappt“.

Zwei (horizontal oder vertikal) benachbarte Felder sind nach einem einzelnen Faltvorgang weiterhin benachbart, falls sie sich auf der gleichen Seite der Faltgeraden befinden; anderenfalls befinden sie sich danach an der gleichen Position. Somit wird jedes Feld genau einmal mehr oder weniger umgeklappt als ein Nachbarfeld. Die Schnitte durch die einzelnen Felder werden somit bereits durch den Schnitt durch das fixierte Eckfeld festgelegt. Horizontal benachbarte Felder werden entlang einer um die Vertikale gespiegelten Geraden durchschnitten, vertikal benachbarte Felder entlang einer um die Horizontale gespiegelten Geraden.

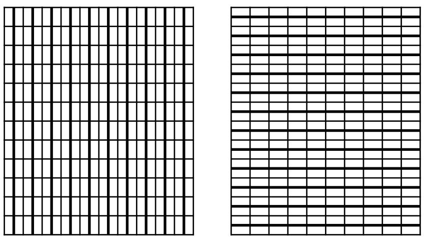

Abbildung 2: Zeichnung zu Lösung 4 a der Mittelstufe

(a) Die beiden einzigen Möglichkeiten sind somit in Abbildung 2 angegeben. Im ersten Fall ergeben sich 11 Stücke, im zweiten sind es 13 Stücke.

(b) Hier sind die einzigen vier Möglichkeiten in Abbildung 3 angegeben. Im ersten Fall ergeben sich 31 Stücke, im zweiten Fall 37 Stücke, im dritten Fall 43 Stücke und im vierten Fall 36 Stücke. □

Aufgabe 5 (6 P.) Ein Satz von Spielsteinen besteht aus lauter Quadern, die sich alle in einer großen quaderförmigen Box unterbringen lassen. Durch einen Produktionsfehler wird bei jedem Spielstein eine Kante verkürzt. Ist es trotzdem möglich, wieder alle Spielsteine in einer quaderförmigen Box unterzubringen, deren eine Kante kleiner als bei der Originalbox ist? (Die Steine müssen stets parallel zu den Kanten der Box liegen.)

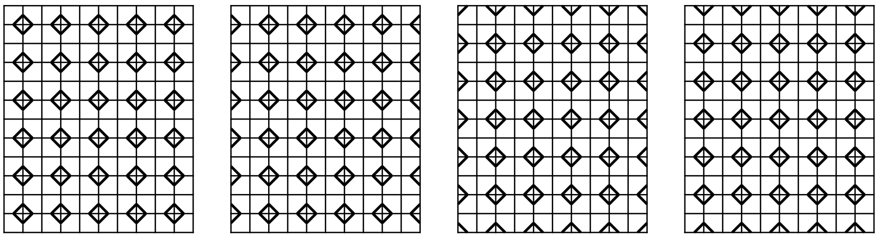

Abbildung 3: Zeichnung zu Lösung 4 b der Mittelstufe

Lösung Der ursprüngliche Satz von Spielsteinen bestehe aus zwei Quadern der Dimension $1 \times 2 \times 3$. Die dazugehörige Box habe die Dimension $1 \times 2 \times 6$.

Durch den Produktionsfehler habe ein Stein die Dimension $0,9 \times 2 \times 3$, der andere die Dimesion $1 \times 1,9 \times 3$. In die Originalbox passen diese Steine offensichtlich nur auf eine Art, nämlich „längs“. Hierbei berühren sie jede Fläche der Box, weshalb sie in keine verkleinerte Box hineinpassen. □

Aufgabe 6 (6 P.) John und James wollen durch ein Spiel die vor ihnen liegenden 25 Münzen zu 1 Cent, 2 Cent, ..., 25 Cent unter sich aufteilen. Bei jedem Schritt wählt einer eine Münze, während der andere bestimmen kann, wer sie bekommt. John beginnt. Immer der, der bereits die meisten Cent erhalten hat, wählt die nächste Münze. Haben beide gleich viel, so wählt der letzte erneut. Kann John so spielen, dass er am Ende mehr Cent erhalten hat als James, oder kann James dies stets verhindern?

Lösung James kann so spielen, dass er immer gewinnt.

Insgesamt ist die Anzahl der Cent im Spiel

$$1 + 2 + \cdots + 25 = \frac{25 \cdot (25 + 1)}{2} = 325.$$

Es kann also keinen Gleichstand am Ende geben: einer der beiden muss gewinnen. Da das Spiel zudem endlich ist, nämlich genau 25 Schritte dauert, muss auch einer den Sieg erzwingen können.

Nach dem ersten Schritt ist genau eine Münze verteilt. In dieser Position kann entweder derjenige, der die nächste Münze wählen darf, zwingend gewinnen oder der andere. (Das kann auch noch davon abhängen, welche Münze verteilt wurde.) James durfte aber wählen, in welcher Position er ist, indem er entweder John oder sich selbst die erste Münze gibt. Da James also entscheidet, wer den Sieg erzwingen kann, hat er die Möglichkeit stets zu gewinnen. □

Bemerkung Dass in einem endlichen Spiel ohne Unentschieden immer einer den Sieg erzwingen kann, ist eine ganz allgemeine Tatsache. Jede Position ist (für den der mit einer Aktion an der Reihe ist) eine Gewinn- oder Verlustposition. Gewinnpositionen sind genau die, aus denen man für den anderen eine Verlustposition erzeugen kann, Verlustpositionen sind die, aus denen man dazu keine Möglichkeit hat, sondern für den anderen eine Gewinnposition erzeugen muss. Es gibt keine unentschiedenen Positionen, da man aus solchen ja stets wieder unentschiedene Positionen erzeugen können müsste. Da es am Ende aber kein Unentschieden gibt, ist dies nicht immer wieder möglich.

Aufgabe 7 (8 P.) Die 64 Quadrate eines Schachbretts werden wie folgt nummeriert. Das Feld links oben erhält die Zahl 1, sein rechter Nachbar die 2, sein unterer Nachbar die 3. Die nächsten drei Felder in der (Neben-) Diagonalen enthalten die Zahlen 4, 5 und 6 usw. Jede (Neben-) Diagonale wird also von rechts oben nach links unten aufsteigend nummeriert. So fortfahrend gelangt man schließlich zu der vorletzten Zweierdiagonalen mit den Zahlen 62 und 63 und zu der Zahl 64 rechts unten.

Peter legt nun auf das Brett 8 Steine und zwar so, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Stein zu liegen kommt. Dann verschiebt er jeden Stein auf ein Feld mit einer größeren Zahl. Kann es sein, dass dann immer noch in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Stein liegt?

Lösung Die Zeilen und Spalten seien von oben bzw. links beginnend durchnummeriert. Betrachtet man zu jedem Stein einen Index, der sich als Summe der Zeile und Spalte ergibt, so ist die Gesamtsumme aller dieser Indizes konstant, sofern nach der Bewegung wieder in jeder Zeile und Spalte ein Stein liegt. Wird der Index für einen Stein nach der Bewegung kleiner, so ist auch die Zahl seines Feldes kleiner geworden. Da also kein Index kleiner werden darf und die Summe konstant bleibt, muss auch jeder einzelne Index konstant bleiben, d.h. jeder Stein bleibt auf seiner Diagonalen. Damit die Zahl des Feldes größer wird, muss er dabei nach links unten bewegt werden. Dann kann jedoch kein Stein mehr in der obersten Zeile (bzw. rechtesten Spalte) liegen. Ein solches Verschieben ist also nicht möglich. □

Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.) Auf dem Graphen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten werden zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gewählt. Zeigen Sie, dass die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen muss, wenn diese beiden Punkte einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

LÖSUNG Da die Aufgabe 1 aus der Mittelstufe ein Spezialfall ist, wird diese gleich mitbewiesen. Es sei $f(x)$ das ganzzahlige Polynom und $\big(a, f(a)\big)$ bzw. $\big(b, f(b)\big)$ die beiden Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf dem Graph von $f(x)$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $f(a) - f(b) = c(a - b)$, denn das Polynom $f(x) - f(b)$ hat die Nullstelle $x = b$, ist also durch $(x - b)$ ohne Rest teilbar. Daher gibt es ein Polynom $q(x)$ mit $f(x) - f(b) = q(x)\,(x - b)$. Setzen wir hier $x = a$ ein, so folgt $f(a) - f(b) = q(a)(a - b) = c\,(a - b)$ mit $c := q(a) \in \mathbb{Z}$.

Sei nun $d \in \mathbb{N}$ der (euklidische) Abstand der beiden Punkte $\big(a, f(a)\big)$ bzw. $\big(b, f(b)\big)$. Dann folgt

$$d^2 = \big(f(a) - f(b)\big)^2 + (a - b)^2 = c^2(a - b)^2 + (a - b)^2 = (c^2 + 1)(a - b)^2,$$

so dass auch $c^2 + 1$ eine Quadratzahl ist. Aber die einzigen Quadratzahlen, die sich nur um 1 unterscheiden, sind 0 und 1, so dass sich hieraus $c = 0$ ergibt, also $f(a) = f(b)$. Daher verläuft die Verbindungstrecke in der Tat horizontal. □

Aufgabe 2 (5 P.) Ein Kreis W_1 geht durch den Mittelpunkt eines Kreises W_2. Zeichnen wir von einem Punkt C auf W_1 die Tangenten an W_2, so schneiden sie W_1 ein zweites Mal in den Punkten A bzw. B. Zeigen Sie, dass die Gerade durch AB senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch die beiden Kreismittelpunkte steht.

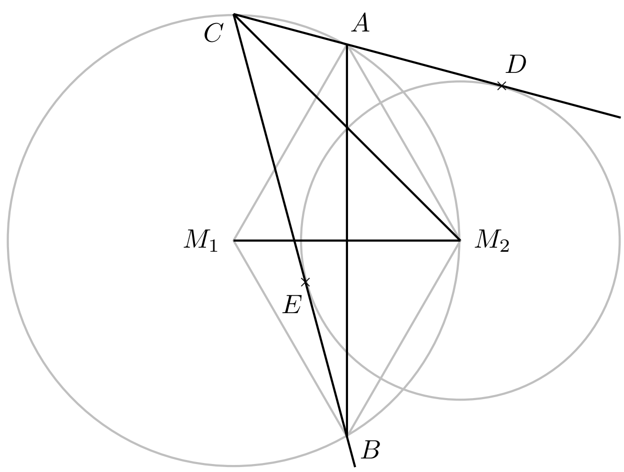

Abbildung 4: Zeichnung zu Lösung 2 der Oberstufe

Lösung Zeichnung siehe Abbildung 4. Seien M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kreise und D, E die Schnittpunkte der Tangenten mit W_2. Aus Symmetriegründen ist

$$\angle DCM_2 = \angle M_2CE = \frac{1}{2}\angle DCE.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist

$$\angle M_2AB = \angle M_2CB = \angle M_2CE = \angle DCM_2 = \angle ACM_2 = \angle ABM_2.$$

Das Dreieck ABM_2 ist daher gleichschenklig. Da A und B auf W_1 liegen, ist auch das Dreieck BAM_1 gleichschenklig. Hieraus folgt die gewünschte Aussage. □

Aufgabe 3 (5 P.) John und James wollen durch ein Spiel die vor ihnen liegenden 25 Münzen zu 1 Cent, 2 Cent, ..., 25 Cent unter sich aufteilen. Bei jedem Schritt wählt einer eine Münze, während der andere bestimmen kann, wer sie bekommt. John beginnt. Immer der, der bereits die meisten Cent erhalten hat, wählt die nächste Münze. Haben beide gleichviel, so wählt der letzte erneut. Kann John so spielen, dass er am Ende mehr Cent erhalten hat als James, oder kann James dies stets verhindern?

Lösung Siehe Lösung 6 der Mittelstufe. □

Aufgabe 4 (6 P.) Gibt es ein quadratisches Polynom $f(x)$, so dass für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$f\big(f(\ldots f(x)\ldots)\big) = 0$$

(„f" erscheint genau n-mal) exakt 2^n verschiedene reelle Nullstellen hat?

Lösung Das Polynom $f(x) := x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Zu jedem Wert $-6 \le a \le 0$ gibt es Werte $x_1 \ne x_2$ mit

$$f(x_1) = f(x_2) = a,$$

nämlich $x_1 = -3 - \sqrt{9+a}$ und $x_2 = -3 + \sqrt{9+a}$. Wegen $-6 \le a \le 0$ ist $\sqrt{3} \le \sqrt{9+a} \le 3$ und somit $-6 \le x_1 < x_2 \le 0$.

Setzt man $f_n(x) := f(f(\cdots(f(x))\cdots))$ (mit n-mal f), so besitzt f_n genau 2^n verschiedene reelle Nullstellen, welche allesamt zwischen -6 und 0 liegen.

Für $n = 1$ ist diese Aussage wahr, da -6 und 0 die Nullstellen von $f_1 = f$ sind. Sei nun $n > 1$ und die Aussage bereits bewiesen für alle f_j mit $j < n$. Seien $a_1, \ldots, a_{2^{n-1}}$ die Nullstellen von f_{n-1}. Wegen $f_n(x) = f_{n-1}(f(x))$ sind die Nullstellen von f_n genau die Werte mit $f(x) = a_i$ für ein $1 \le i \le 2^{n-1}$. Nun gibt es für jedes a_i Werte $-6 \le x_1^{(i)} < x_2^{(i)} \le 0$ mit

$$f(x_1^{(i)}) = f(x_2^{(i)}) = a_i,$$

da nach Induktionsannahme $-6 \le a_i \le 0$ gilt.

Insgesamt hat f_n also 2^n verschiedene reelle Nullstellen, da für $i \ne j$ wegen $f(x_1^{(i)}) = a_i \ne a_j = f(x_1^{(j)})$ und entsprechend $f(x_1^{(i)}) \ne f(x_2^{(j)})$ weder $x_1^{(i)} = x_1^{(j)}$ noch $x_1^{(i)} = x_2^{(j)}$ gelten kann. □

Aufgabe 5 (7 P.) Ein Ikosaeder und ein Dodekaeder sind einer Kugel einbeschrieben, d.h. alle Eckpunkte liegen auf einer Kugeloberfläche. Zeigen Sie, dass sie auch ein und dieselbe Kugel umschreiben, d.h. alle Flächen tangieren. (Zur Erinnerung: Ein Ikosaeder hat 20 Flächen, die sämtlich kongruente gleichseitige Dreiecke sind, wobei in jeder Ecke 5 Flächen zusammentreffen und die Winkel, unter denen zwei Dreiecke entlang einer Kante zusammenstoßen, sind überall gleichgroß. Ein Dodekaeder hat 12 Flächen, die sämtlich kongruente regelmäßige Fünfecke sind, wobei in jeder Ecke 3 Flächen zusammentreffen und die Winkel, unter denen zwei Fünfecke entlang einer Kante zusammenstoßen, sind überall gleichgroß.)

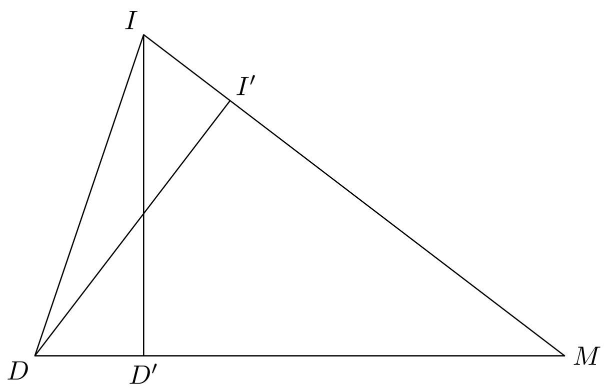

Abbildung 5: Zeichnung zu Lösung 5 der Oberstufe

Lösung Aus Symmetriegründen gilt:

(*) Eine einem regulären Polyeder einbeschriebene Kugel berührt dieses in den Mittelpunkten der Flächen. Die Radien zu den Flächenmittelpunkten sind also orthogonal zu der jeweiligen Fläche.

Da die Flächen eines Ikosaeders Dreiecke sind und sich in jeder Ecke 5 der 20 Flächen treffen, ist $\frac{3 \cdot 20}{5} = 12$ die Anzahl der Ecken eines Ikosaeders.

Der Kugel k sei ein Dodekaeder $\mathcal{D}$ einbeschrieben. M sei der Mittelpunkt von k. Da sich in einer Dodekaederecke jeweils 3 Flächen treffen, bilden deren Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck und die Mittelpunkte der 12 Dodekaederflächen sind folglich die Ecken eines Ikosaeders $\tilde{\mathcal{I}}$.

Ein k einbeschriebenes Ikosaeder $\mathcal{I}$ erhält man daher, indem man die Ecken des Ikosaeders $\tilde{\mathcal{I}}$ mit Projektionszentrum M auf k projiziert.

Man betrachte den Mittelpunkt I' einer Fläche des Dodekaeders $\mathcal{D}$, eine Ecke D derselben Fläche und die Ikosaederecke I, die das Projektionsbild von I' ist (siehe Abbildung 5). Nach (*) sind $\overline{MI}$ und $\overline{I'D}$ orthogonal. Aus Symmetriegründen schneidet der Radius $\overline{MD}$ das Ikosaeder $\mathcal{I}$ im Mittelpunkt D' einer der Ikosaederflächen, die sich in der Ecke I treffen. Nach (*) sind auch $\overline{MD}$ und $\overline{D'I}$ orthogonal. Da $\overline{MD}$ und $\overline{MI}$ Radien von k sind, sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle MDI'$ und $\triangle MD'I$ mit dem gemeinsamen Winkel $\angle DMI$ kongruent. Die Inkugeln von $\mathcal{I}$ und $\mathcal{D}$ haben den gleichen Radius $\left|\overline{MI'}\right| = \left|\overline{MD'}\right|$. □

Aufgabe 6 (7 P.) Es bezeichne A ein Eckquadrat eines Schachbretts und B sein diagonales Nachbarquadrat. Zeigen Sie, dass die Anzahl der in A beginnenden Wege des „lahmen Turms“ größer ist als die Anzahl seiner in B beginnenden Wege. Bei einem Weg besucht der „lahme Turm“ jedes der 64 Quadrat genau einmal, wobei er aber jedes Mal nur zum horizontal oder vertikal benachbarten Quadrat übergehen darf.

LÖSUNG Einen Weg, der jedes Feld genau einmal benutzt und der in A startet, nennen wir A-Weg. Einen entsprechender Weg, der in B startet, nennen wir B-Weg.

OBdA sei A (und damit auch B) weiß. Der Turm bewegt sich stets von einem weißen Feld auf ein schwarzes Feld und umgekehrt. Jeder B-Weg endet somit auf einem schwarzen Feld, insbesondere also nicht in A.

Sei ein beliebiger B-Weg P gegeben. Zu irgendeinem Zeitpunkt erreicht der Turm das Feld A. Da A nicht das Endfeld ist, wurde einer der beiden gemeinsamen Nachbarn von A und B noch nicht benutzt und der Weg wird über dieses Feld C fortgesetzt. Startet der Turm nun in A und durchläuft er zunächst P in umgekehrter Richtung von A bis B, geht von B dann auf das Feld C und zuletzt den Rest von P von C bis zum Ende, so ist dies ein A-Weg.

Zwei A-Wege, die auf diese Weise aus B-Wegen P und Q entstehen, sind verschieden: Wären sie gleich, so stimmen P und Q sowohl zwischen B und A als auch zwischen C und dem Ende überein. Damit wäre jedoch auch $P = Q$. Es gibt daher mindestens so viele A-Wege wie B-Wege.

Jeder A-Weg, der wie oben aus einem B-Weg entsteht, hat zudem bei Erreichen von B erst einen der beiden gemeinsamen Nachbarn von A und B durchlaufen. Der A-Weg aus Abbildung 6 durchläuft hingegen beide gemeinsamen

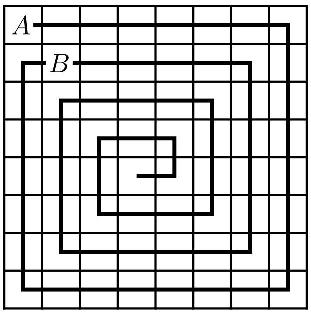

Abbildung 6: Zeichnung zu Lösung 6 der Oberstufe

Nachbarn von A und B bevor B erreicht wird. Damit entsteht dieser Weg nicht aus einem B-Weg und es gibt mehr A-Wege als B-Wege. □

Aufgabe 7 Im Raum seien 200 Punkte gewählt. Je zwei werden durch Strecken verbunden, die sich niemals schneiden. Jede dieser Strecken wird nun mit einer von k gegebenen Farben gefärbt. Nun möchte Peter die 200 Punkte ebenfalls mit einer der gegebenen Farben färben, allerdings so, dass kein Paar genau so wie die sie verbindende Strecke gefärbt wird. Kann Peter dies stets bewerkstelligen, wenn

(a) **(4 P.)** $k = 7$ bzw.

(b) **(4 P.)** $k = 10$ ist?

LÖSUNG (a) Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig und seien 2^r Punkte gegeben, die wie oben paarweise durch Strecken verbunden sind. Dann gibt es eine Färbung der Strecken durch r Farben derart, dass Peter die Punkte nicht mit den gleichen r Farben wie gewünscht färben kann. Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr. Sei nun $r > 1$ und die Aussage bereits bewiesen für $r - 1$ Farben. Man verteile die Punkte auf zwei gleichgroße Mengen (also jeweils 2^{r-1} Punkte pro Menge) und färbe die Strecken innerhalb dieser Mengen derart mit den ersten $r-1$ Farben, dass man die Punkte nicht mit den gleichen $r - 1$ Farben wie gewünscht färben kann. Die Strecken zwischen beiden Teilen färbe man allesamt in der r-ten Farbe. Nun muss bei einer korrekten Färbung der Punkte in beiden Teilen die r-te Farbe auftreten. Die Strecke zwischen zwei solchen Punkten wurde jedoch ebenfalls in der r-ten Farbe gefärbt, Widerspruch.

Wegen $200 > 128 = 2^7$ lassen sich die 200 Punkte nicht gewünscht färben.

(b) Auch mit $k = 10$ Farben ist eine korrekte Färbung nicht immer möglich. Wir konstruieren nun eine Färbung der Strecken derart, dass es unter beliebigen 20 Punkten und zu jeder Farbe stets zwei Punkte gibt, deren Verbindungsstrecke in eben dieser Farbe gefärbt ist. Eine solche Färbung nennen wir „schlecht“. Bei einer beliebigen Färbung der Punkte mit den vorgegebenen Farben gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens eine Farbe, die für mindestens 20 Punkte verwendet wird. Unter diesen Punkten gibt es dann zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke mit der gleichen Farbe gefärbt ist. Daher erfüllt keine Färbung der Punkte die Voraussetzungen.

Die besagte Färbung der Kanten wird wie folgt konstruiert. Zur l-ten Farbe verteilt man die Punkte auf 19 Mengen A^l_m, $m = 0, 1, \ldots, 18$. Nun werden die Strecken, deren Endpunkte in der gleichen Menge A^l_m liegen, in der l-ten Farbe gefärbt. Hierbei ist darauf zu achten, dass $A^l_m \cap A^{l'}_{m'}$ für $l \neq l'$ höchstens einen Punkt enthält, da ansonsten die Verbindungsstrecke zweier Punkte in diesem Schnitt sowohl in der l-ten als auch in der l'-ten Farbe gefärbt werden müsste. Gelingt eine solche Verteilung auf Mengen A^l_m, so gibt es zu beliebigen 20 Punkten und jeder Farbe l ein m derart, dass A^l_m zwei von diesen Punkten enthält. Damit ist die Verbindungsstrecke dieser Punkte in der l-ten Farbe gefärbt und die Färbung ist schlecht. (Hierbei wird nicht jeder Strecke eine Farbe zugeordnet, die übrigen Strecken können beliebig gefärbt werden.)

Nun muss also die Verteilung auf die A^l_m konstruiert werden. Hierzu nummeriere man die Farben von 0 bis 9 und die Punkte als

$$\begin{array}{lll}
v_{0,1},\ldots,v_{0,11}, & v_{1,1},\ldots,v_{1,11}, & v_{2,1},\ldots,v_{2,11},\\
v_{3,1},\ldots,v_{3,11}, & v_{4,1},\ldots,v_{4,11}, & v_{5,1},\ldots,v_{5,11},\\
v_{6,1},\ldots,v_{6,11}, & v_{7,1},\ldots,v_{7,11}, & v_{8,1},\ldots,v_{8,11},\\
v_{9,1},\ldots,v_{9,11}, & v_{10,1},\ldots,v_{10,10}, & v_{11,1},\ldots,v_{11,10},\\
v_{12,1},\ldots,v_{12,10}, & v_{13,1},\ldots,v_{13,10}, & v_{14,1},\ldots,v_{14,10},\\
v_{15,1},\ldots,v_{15,10}, & v_{16,1},\ldots,v_{16,10}, & v_{17,1},\ldots,v_{17,10},\\
v_{18,1},\ldots,v_{18,10}. & &
\end{array}$$

Für jedes $l \in \{0,\ldots,9\}$ und jedes $m \in \{0,\ldots,18\}$ setze man nun

$$A_m^l := \{v_{m,1}, v_{m+l,2}, v_{m+2l,3}, \ldots, v_{m+9l,10}, v_{m+10l,11}\}.$$

Hierbei rechne man in der ersten Komponente stets modulo 19. Falls $v_{m+10l,11}$ nicht existiert (wenn $m + 10l \geq 10$), so lasse man dieses Glied in der Definition weg. Für ein festes l ist offensichtlich jeder Punkt in genau einem A_m^l enthalten. Nun ist nur noch zu überprüfen, ob es $A_m^l, A_{m'}^{l'}$ gibt, deren Schnitt mehr als einen Punkt enthält. Angenommen, es gäbe $v_{i,j}, v_{i',j'}$ im Schnitt zweier solcher Mengen. Dann ist (jeweils modulo 19 gerechnet)

$$\begin{array}{lclcl}
i = m + (j-1)l & \wedge & i' = m + (j'-1)l & \Rightarrow & i - i' = (j-j')l\\
i = m' + (j-1)l' & \wedge & i' = m' + (j'-1)l' & \Rightarrow & i - i' = (j-j')l'
\end{array}$$

Insgesamt folgt hieraus $0 = (j-j')(l-l')$ (modulo 19!). Da sich die Elemente jedes A_m^l im zweiten Index paarweise unterscheiden, ist $j - j' \neq 0$. Da 19 eine Primzahl ist, muss $l = l'$ gelten und somit auch $m = m'$. (Hätten wir z.B. modulo 18 gerechnet, hätten wir dies nicht folgern können. Denn für $j-j' = 2$ und $l-l' = 9$ gilt [modulo 18] $(j-j')(l-l') = 0$.)

Wir haben also eine schlechte Färbung konstruiert. Zu dieser ist keine korrekte Färbung der Punkte möglich. □

Fragen und Anmerkungen Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Lilian Matthiesen, Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.