Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fakultät für Mathematik, Informatik
und Naturwissenschaften (MIN)

Fachbereich Mathematik

Differentialgleichungen
und Dynamische Systeme

Jan Henrik Sylvester
Mara Sommerfeld
Philipp Sprüssel

UHH · FB Mathematik · Bundesstraße 55 · 20146 Hamburg

An die
Teilnehmerinnen und Teilnehmer des
Internationalen Städtewettbewerbs
Mathematik

28. September 2017

Tel.: 040 42838-5123 Fax: 040 42838-5117
E-Mail: stw.m.hh@gmail.com

39. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik 2017/2018

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler!

Hiermit laden wir euch herzlich ein, an dem oben genannten Wettbewerb teilzunehmen. Wie ihr sicher wisst, gibt es seit vielen Jahren neben der Mathematik-Olympiade einen mathematischen Wettbewerb zwischen Schülern aus verschiedenen Städten. Hieran nehmen Städte aus etlichen verschiedenen Nationen teil, seit 1989 auch Hamburg. Der Wettbewerb ist geeignet für Schüler ab der 8. Klasse. Eine vorherige Anmeldung ist nicht nötig.

Die Herbstrunde 2017 findet statt am

Dienstag, den 7. November 2017 um 10:15 Uhr
im Hörsaal A der Chemie
Martin-Luther-King-Platz 6, 20146 Hamburg.

Die Treffzeit ist 10:00 Uhr vor dem Hörsaal. Es gibt voraussichtlich sieben Aufgaben, von denen drei innerhalb von 5 Stunden in einer Klausur bearbeitet werden sollen. Für einen kleinen Imbiss ist gesorgt. Bringt bitte Schreibgerät, sowie Zirkel und Lineal mit.

Wir sind sicher, dass eure Schule euch dafür an diesem Tag vom Unterricht befreien wird. Bei Rückfragen stehen wir gerne zur Verfügung.

Wir freuen uns, wenn ihr erneut zahlreich an dem Wettbewerb teilnehmt und wünschen allen Teilnehmern viel Spaß (und Erfolg) bei der Bearbeitung der Aufgaben. Sie sind interessant, aber auch nicht leicht zu bearbeiten. Zur Einstimmung und zur Orientierung über den Schwierigkeitsgrad findet ihr auf `http://www.math.uni-hamburg.de/stw/` Aufgaben und Lösungsvorschläge aus früheren Jahren. Einige dieser Aufgaben sind auch auf der Rückseite dieses Briefes aufgeführt.

Mit freundlichen Grüßen

Jan Henrik Sylvester

Einige Aufgaben zur Einstimmung

1) Auf dem Graphen eines quadratischen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten werden zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gewählt. Zeige, dass die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen muss, wenn diese beiden Punkte einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

2) Eine endliche arithmetische Progression, also $a, a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ bestehe aus lauter ganzen Zahlen. Addiert man alle diese Zahlen auf, so ergibt sich eine Zweierpotenz. Beweise, dass dann auch die Anzahl der Zahlen eine Zweierpotenz sein muss.

3) Wie viele Steine kann man höchstens auf einem 8×8-Dame-Spielbrett (üblicherweise die 32 schwarzen Felder eines Schachbretts) so unterbringen, dass jeder Stein geschlagen werden kann? (Dabei kann im Dame-Spiel bekanntlich ein Stein auf einem Feld y genau dann geschlagen werden, wenn von den diagonal aufeinanderfolgenden Feldern x, y, z genau eines der Nachbarfelder x oder z frei ist.)

4) Ein Billiardtisch hat die Gestalt eines Polygons (nicht notwendig konvex, d.h. es sind auch einspringende Ecken erlaubt), wobei zwei benachbarte Kanten stets aufeinander senkrecht stehen. In jeder Ecke befindet sich ein punktförmiges Loch, in dem die (punktförmige) Billiardkugel verschwindet. In einer Ecke A mit innerem $90°$ Winkel beginnt nun eine Kugel reibungsfrei zu rollen, wobei sie an den Kanten nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Reflexionswinkel“ reflektiert wird. Beweise, dass sie niemals nach A zurückkehrt.

5) John und James wollen durch ein Spiel die vor ihnen liegenden 25 Münzen zu 1 Cent, 2 Cent, ..., 25 Cent unter sich aufteilen. Bei jedem Schritt wählt einer eine Münze, während der andere bestimmen kann, wer sie bekommt. John beginnt. Immer der, der bereits die meisten Cent erhalten hat, wählt die nächste Münze. Haben beide gleich viel, so wählt der letzte erneut. Kann John so spielen, dass er am Ende mehr Cent erhalten hat als James, oder kann James dies stets verhindern?

6) Im Raum seien 200 Punkte gewählt. Je zwei werden durch Strecken verbunden, die sich niemals schneiden. Jede dieser Strecken wird nun mit einer von k gegebenen Farben gefärbt. Nun möchte Peter die 200 Punkte ebenfalls mit einer der gegebenen Farben färben, allerdings so, dass kein Paar genau so wie die sie verbindende Strecke gefärbt wird. Kann Peter dies stets bewerkstelligen, wenn

   (a) $k = 7$ bzw.

   (b) $k = 10$ ist?

7) Die Parabel $y = x^2$ und ein Kreis schneiden sich in genau zwei Punkten A und B. Ferner sei A ein Berührpunkt, d.h. in A stimmen die Tangente an die Parabel und die Tangente an den Kreis überein. Müssen sich dann auch die Parabel und der Kreis in B berühren?