Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 9

Abgabe am Dienstag, 13. Juni 2017 am Anfang der Vorlesung.

(38) Zeigen Sie:

(a) Angenommen, $\{\beta_\xi\,;\,\xi < \gamma\}$ ist eine aufsteigende Folge in einer Limesordinalzahl α ist. Wenn $\bigcup\{\beta_\xi\,;\,\xi < \gamma\} = \alpha$, so ist $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

(b) Für jede Limesordinalzahl α gilt: $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.

(39) Zeigen Sie:

(a) Der kleinste $\aleph$-Fixpunkt hat Konfinalität $\aleph_0$.

(b) Es gibt einen $\aleph$-Fixpunkt mit Konfinalität $\aleph_1$.

(40) Sei I eine beliebige Menge und $\{A_i\,;\,i \in I\}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen. Wir setzen $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ und nehmen eine beliebige Familie von Kardinalzahlen $\{\kappa_a\,;\,a \in A\}$. Zeigen Sie, daß

$$\prod_{a\in A} \kappa_a = \prod_{i\in I}\left(\prod_{j\in A_i} \kappa_j\right).$$

(41) Zeigen Sie:

(a) $\prod_{0<n<\omega} n = 2^{\aleph_0}$.

(b) $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

(c) $\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$.

(42) Zeigen Sie für jede Ordinalzahl α, daß $\aleph_{\alpha+1} < 2^{(2^{\aleph_\alpha})}$.

(43) Zeigen Sie den folgenden Spezialfall des Fundamentalsatzes der Kardinalzahlarithmetik (ohne Verwendung des Fundamentalsatzes): Nehmen Sie an, daß die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH gilt, also $2^\kappa = \kappa^+$ für alle unendlichen Kardinalzahlen κ. Dann gilt:

$$\kappa^\lambda := \begin{cases} \kappa & \text{falls } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^+ & \text{falls } \mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa, \\ \lambda^+ & \text{falls } \kappa \leqslant \lambda. \end{cases}$$