Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 8

Abgabe am Dienstag, 30. Mai 2017 am Anfang der Vorlesung.

(34) Zeigen Sie für Ordinalzahlen α und β, daß $\alpha \cdot \beta \sim \alpha \times \beta$. [*Hinweis.* Verwenden Sie die Division mit Rest.]

(35) In der Vorlesung hatten wir mit Zuhilfenahme des Auswahlaxioms (in der Form "abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar") gezeigt, daß für jede abzählbare Ordinalzahl ξ gilt, daß ω^ξ abzählbar ist. Zeigen Sie dies ohne Verwendung des Auswahlaxioms. [*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst durch Angabe einer konkreten Bijektion, daß die Menge aller endlichen Folgen von Elementen von ξ abzählbar ist.]

(36) **Hessenberg-Addition.** Seien α und β Ordinalzahlen. Es seien $\alpha = \omega^{\alpha_0} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ und $\beta = \omega^{\beta_0} + \ldots + \omega^{\beta_m}$ die Cantor-Normalformen von α und β und es sei $\gamma_0 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{n+m}$ die absteigende Folge aller in den beiden Cantor-Normalformen auftretenden Exponenten mit korrekter Multiplizität. (Das heißt: wenn γ k-mal in der Cantor-Normalform von α auftaucht und ℓ-mal in der Cantor-Normalform von β, so taucht es $k + \ell$-mal in der Folge der γ_i auf.) Dann sei

$$\alpha \# \beta := \omega^{\gamma_0} + \ldots + \omega^{\gamma_{n+m}}.$$

Zeigen Sie, daß die Operation $\#$ kommutativ ist und daß $\alpha\#\beta \geqslant \max(\alpha+\beta, \beta+\alpha)$. Finden Sie Beispiele für α und β, so daß

(a) $\alpha\#\beta = \alpha + \beta \neq \beta + \alpha$,
(b) $\alpha\#\beta = \beta + \alpha \neq \alpha + \beta$,
(c) $\alpha\#\beta > \max(\alpha + \beta, \beta + \alpha)$.

(37) **Die Gödelsche Paarfunktion.** Falls $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ Ordinalzahlen sind, so definieren wir

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) <^* (\alpha', \beta') :\iff\ & \max(\alpha, \beta) < \max(\alpha', \beta') \text{ oder} \\ & (\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta') \text{ und } \alpha < \alpha') \text{ oder} \\ & (\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta') \text{ und } \alpha = \alpha' \text{ und } \beta < \beta').\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß für jede Ordinalzahl ξ die Struktur $(\xi \times \xi, <^*)$ eine Wohlordnung ist. Wir schreiben $g(\xi)$ für die eindeutig bestimmte zu dieser Struktur isomorphe Ordinalzahl und $G_\xi : \xi \times \xi \to g(\xi)$ für den eindeutig bestimmten Isomorphismus. Zeigen Sie, daß für $\xi < \eta$ und $\alpha, \beta \in \xi$ gilt, daß

$$G_\xi(\alpha, \beta) = G_\eta(\alpha, \beta).$$

Das bedeutet, daß

$$G : (\alpha, \beta) \mapsto G_{\max(\alpha,\beta)+1}(\alpha, \beta)$$

eine Zuordnung von Ordinalzahlen zu Paaren von Ordinalzahlen ist, die sich wie ein Isomorphismus zwischen $(\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}, <^*)$ und $(\mathrm{Ord}, \in)$ verhält. Diese Zuordnung nennt man auch die Gödelsche Paarfunktion.

Zeigen Sie per Induktion, daß für jede Kardinalzahl $\kappa \geqslant \omega$ gilt, daß $g(\kappa) = \kappa$.

[*Hinweis.* Verwenden Sie folgende Überlegung: angenommen, die Behauptung gelte für Kardinalzahlen $\omega \leqslant \lambda < \kappa$. Dann gilt für jede Ordinalzahl $\omega \leqslant \alpha < \kappa$, daß $\alpha \times \alpha \sim \alpha$. (Warum?)]

Geben Sie mit diesen Hilfsmitteln einen Beweis des Satzes von Hessenberg für Ordinalzahlen, welcher das Auswahlaxiom nicht verwendet.