Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 7

Abgabe am Dienstag, 23. Mai 2017 am Anfang der Vorlesung.

(29) Zeigen Sie, daß Ordinalzahladdition assoziativ und linksseitig monoton ist:

(a) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\big[(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\big]$ und
(b) $\forall\alpha\forall\gamma\forall\gamma'\big[\gamma\leqslant\gamma'\to\gamma+\alpha\leqslant\gamma'+\alpha\big]$.

(30) Zeigen Sie das rechtsseitige Distributivgesetz für die Ordinalzahladdition und -multiplikation:

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\big[\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\big].$$

Gilt das linksseitige Distributivgesetz auch?

(31) Zeigen Sie die beiden Potenzregeln für die Ordinalzahlexponentiation:

(a) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\big[(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}\big]$ und
(b) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\big[\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}\big]$.

Welche der beiden entspricht dem Distributivgesetz und warum? Die rekursive Definition der Exponentiation aus der Multiplikation ist parallel zur rekursiven Definition der Multiplikation aus der Addition. Aber ist es dann nicht überraschend, daß die Multiplikation assoziativ ist und die Exponentiation nicht? Woran liegt das?

(32) Eine Ordinalzahl γ heißt *Hauptzahl der Addition* oder *Gamma-Zahl*, falls für alle $\alpha,\beta\in\gamma$ gilt, daß $\alpha+\beta\in\gamma$. Eine Ordinalzahl δ heißt *Hauptzahl der Multiplikation* oder *Delta-Zahl*, falls für alle $\alpha,\beta\in\delta$ gilt, daß $\alpha\cdot\beta\in\delta$. Eine Ordinalzahl ε heißt *Hauptzahl der Exponentiation* oder *Epsilon-Zahl*, falls für alle $\alpha,\beta\in\varepsilon$ gilt, daß $\alpha^\beta\in\varepsilon$. Zeigen Sie:

(a) Eine Ordinalzahl $\delta\notin\{0,1\}$ ist eine Delta-Zahl genau dann, wenn ein ξ existiert, so daß $\delta=\omega^{(\omega^\xi)}$.

(b) Für jedes α existiert eine Epsilon-Zahl $\varepsilon>\alpha$.

(33) [Wiederholt von (28).] Welche der folgenden Aussagen ist korrekt (die Operationen bezeichnen Ordinalzahloperationen)? (a) $\omega\cdot2=2\cdot\omega\cdot2$, (b) $2\cdot\omega+3=2\cdot(\omega+3)$, (c) $(\omega+1)\cdot(\omega+1)=\omega\cdot\omega+1$, (d) $(\omega+1)\cdot(\omega+1)=\omega\cdot\omega+\omega+1$, (e) $\omega\cdot2+3=\omega\cdot(2+3)$, (f) $\omega\cdot(\omega+1)=\omega\cdot\omega+1$, (g) $\omega\cdot(\omega+1)+1=\omega\cdot\omega+1$, (h) $\omega\cdot(1+\omega)+1=\omega\cdot\omega+1$, (i) $\omega^{\omega_1}+3={\omega_1}^\omega+3$, (j) $\omega^{\omega_1}+3=2^{\omega_1}+3$, (k) $\omega^{\omega_1}+3=(\omega+1)^{\omega_1}+2$.