Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 6

Abgabe am Dienstag, 16. Mai 2017 am Anfang der Vorlesung.

(24) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) das Auswahlaxiom und

(b) das *starke Partitionsprinzip*: für jede Surjektion $\pi : X \to Y$ existiert eine Injektion $i : Y \to X$ mit $i(\pi(x)) = x$.

(25) Nehmen Sie das Auswahlaxiom an und zeigen Sie das sogenannte *Teichmüller-Tukey-Lemma*: Für eine Menge x wollen wir $\mathrm{Fin}(x)$ für die Menge aller endlichen Teilmengen von x schreiben. Sei X eine Menge mit der Eigenschaft

$$\forall x(x \in X \leftrightarrow \mathrm{Fin}(x) \subseteq X).$$

Dann hat X ein maximales Element, also ein x^*, so daß keine echte Obermenge von x^* ein Element von X ist.

(26) Nehmen Sie das Auswahlaxiom an. Sei X eine unendliche Menge. Zeigen Sie, daß $X \sim \mathrm{Fin}(X)$.

(27) Falls X eine Menge ist, so definieren wir $X!$ als die Menge aller Bijektionen von X nach X.

(a) Zeigen Sie: Falls $X \sim Y$, so $X! \sim Y!$.

Somit können wir eine Operation $\kappa \mapsto \kappa!$ auf Kardinalzahlen definieren.

(b) Zeigen Sie: falls κ unendlich ist, so ist $\kappa! = 2^\kappa$.

(28) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt (die Operationen bezeichnen Ordinalzahloperationen)? (a) $\omega \cdot 2 = 2 \cdot \omega \cdot 2$, (b) $2 \cdot \omega + 3 = 2 \cdot (\omega + 3)$, (c) $(\omega + 1) \cdot (\omega + 1) = \omega \cdot \omega + 1$, (d) $(\omega + 1) \cdot (\omega + 1) = \omega \cdot \omega + \omega + 1$, (e) $\omega \cdot 2 + 3 = \omega \cdot (2 + 3)$, (f) $\omega \cdot (\omega + 1) = \omega \cdot \omega + 1$, (g) $\omega \cdot (\omega + 1) + 1 = \omega \cdot \omega + 1$, (h) $\omega \cdot (1 + \omega) + 1 = \omega \cdot \omega + 1$, (i) $\omega^{\omega_1} + 3 = {\omega_1}^{\omega} + 3$, (j) $\omega^{\omega_1} + 3 = 2^{\omega_1} + 3$, (k) $\omega^{\omega_1} + 3 = (\omega + 1)^{\omega_1} + 2$.