Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 4

Abgabe am Dienstag, 2. Mai 2017 am Anfang der Vorlesung.

(14) Sei n eine natürliche Zahl und R eine beliebige strikte totale Ordnung auf n. Zeigen Sie, daß $(n, R) \simeq (n, \in)$.

(15) Seien $(X, <)$ eine Wohlordnung und $f : X \to X$ eine $<$-ordnungserhaltende Funktion (also: $x < y$ impliziert $f(x) < f(y)$). Zeigen Sie, daß für alle $x \in X$ gilt, daß $x \leqslant f(x)$.

(16) Die Relation $\lhd$ auf Wohlordnungen ist definiert durch $(X, <) \lhd (Y, <)$ genau dann, wenn es ein $y \in Y$ gibt, so daß $(X, <) \simeq (\mathrm{AS}(y), <)$. Zeigen Sie, daß $\lhd$ irreflexiv ist (d.h., daß keine Wohlordnung zu einem ihrer echten Anfangssegmente isomorph ist).

(17) Sei X eine Menge. Falls $R \subseteq X \times X$, so setzen wir $R^{-1} := \{(y, x)\,;\,(x, y) \in R\}$. Zeigen Sie: falls X eine Menge ist und eine Relation $R \subseteq X \times X$ existiert, so daß sowohl (X, R) als auch (X, R^{-1}) Wohlordnungen sind, dann ist X endlich.

(18) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Theorems von Hartogs: sei X eine beliebige Menge. Dann gibt es eine Wohlordnung $(Z, <)$, so daß Z nicht injektiv in X eingebettet werden kann.