Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 2

Abgabe am Dienstag, 18. April 2017 am Anfang der Vorlesung.

(5) Zeigen Sie:

   (a) Falls x eine transitive Menge ist, so ist auch $x \cup \{x\}$ transitiv.

   (b) Eine Menge x ist genau dann transitiv, wenn ihre Potenzmenge $\wp(x)$ transitiv ist.

(6) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen x: für alle $z \in \mathbb{N}$ gilt $z < S(x)$ genau dann, wenn $z \leqslant x$.

(7) Für eine total geordnete Menge $\mathbf{X} := (X, \leqslant)$ hatten wir gesagt, daß $\mathbf{X}$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls für jede ordnungsinduktive Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt, daß $Z = X$. Wir hatten gesagt, daß $\mathbf{X}$ das *Prinzip des kleinsten Elements erfüllt*, falls jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat.

Hierbei heißt Z *ordnungsinduktiv*, falls für alle $x \in X$ gilt: wenn $\{z \in X\,;\, z < x\} \subseteq Z$, so ist $x \in Z$. Und ein Element $m \in X$ heißt *kleinstes Element von Z* wenn gilt: $m \in Z$ und $\{z \in X\,;\, z < m\} \cap Z = \varnothing$.

Zeigen Sie, daß $\mathbf{X}$ das Prinzip der Ordnungsinduktion genau dann erfüllt, wenn es das Prinzip des kleinsten Elements erfüllt.

(8) Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine reflexive und transitive Relation (also ist (X, R) eine Präordnung). Zeigen Sie, daß die Relation $\equiv$ definiert durch $x \equiv y$ genau dann, wenn $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ eine Äquivalenzrelation ist, und daß R eine *Kongruenz relativ zu* $\equiv$ ist (d.h., falls $x \equiv x'$, $y \equiv y'$ und $x\,R\,y$, so $x'\,R\,y'$).

(9) Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und $\mathcal{F}^*$ die Menge aller nichtkonstanten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^*$.