Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 12

Abgabe am Dienstag, 4. Juli 2017 am Anfang der Vorlesung.

(54) Sei (X, d) ein metrischer Raum. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß für $Y \subseteq X$ und beliebiges ξ gilt, daß

$$\mathbf{\Sigma}^0_\xi(Y) = \{A \cap Y\,;\, A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\} \text{ und}$$
$$\mathbf{\Pi}^0_\xi(Y) = \{A \cap Y\,;\, A \in \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)\}.$$

Zeigen Sie, daß dies **nicht** für $\mathbf{\Delta}^0_2$ gilt.

(55) Sei $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in 2^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$(x)_n(m) := x(\beta(n, m)).$$

Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto (x)_n$ stetig auf dem Cantor-Raum ist.

(56) Zeigen Sie, daß es keine universellen Mengen für $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ geben kann.

(57) Sei (X, d) ein polnischer Raum und $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit U_n offen eine G_δ-Menge. Definieren Sie

$$d^*(x, y) := d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n-1}, \left|\frac{1}{d(x, X\backslash U_n)} - \frac{1}{d(y, X\backslash U_n)}\right|\right\}$$

und zeigen Sie, daß

(a) d^* eine vollständige Metrik auf G ist und

(b) d^* und d äquivalent sind (s. (44)).

(58) Seien S und C Mengen. Wir nennen $V : S \to \wp(S)$ eine *Zugangsfunktion* (wir sagen "$s \in S$ hat Zugang zu $t \in S$, wenn $t \in V(s)$") und $\chi : S \to C$ eine *Färbung* (jedes Element von S wird mit einer Farbe in C gefärbt). Ist $S' \subseteq S$ und $\chi' : S' \to C$, so heißt χ' eine *partielle Färbung* und wir schreiben $\mathrm{PF} := \{\chi'\,;\, \chi' \text{ ist eine partielle Färbung}\}$. Eine *Vorhersagefunktion* ist eine Funktion $P : \mathrm{PF} \times S \to C$ (bei Eingabe (χ', t) sagt die Vorhersagefunktion die Farbe von t unter Kenntnis der partiellen Färbung χ' voraus).

Seien nun V eine Zugangsfunktion, χ eine Färbung und P eine Vorhersagefunktion. Wir sagen, daß P die Färbung χ an der Stelle t *korrekt vorhersagt*, falls

$$P(\chi{\restriction}V(t), t) = \chi(t).$$

Zeigen Sie (unter Verwendung des Auswahlaxioms): falls V die Eigenschaft hat, daß für alle $s \in S$, die Menge $V(S)$ koendlich ist, so gibt es eine Vorhersagefunktion P, die für beliebige Färbungen χ die Färbung an allen bis auf endlich vielen Stellen korrekt vorhersagt.

Illustrieren Sie diesen Sachverhalt mit einer Geschichte (z.B. mit einer Menge von Personen S, die farbige Hüte auf ihren Köpfen haben).