Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 11

Abgabe am Dienstag, 27. Juni 2017 am Anfang der Vorlesung.

(49) Sei X ein perfekter polnischer Raum. In der Vorlesung haben wir gesehen, daß es auf X ein *Cantor-Schema* $\{U_s\,;\, s \in 2^{<\omega}\}$ gibt. Das Cantor-Schema gibt uns eine Injektion $f : 2^\omega \to X$. Wie in der Vorlesung definieren wir für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ einen Baum $T_A \subseteq 2^{<\omega}$, so daß für $s \in T_A$ gilt:

(a) falls $\mathrm{lh}(s) \notin A$, so ist $s^\frown 0 \in T_A$ und $s^\frown 1 \notin T_A$;

(b) falls $\mathrm{lh}(s) \in A$, so ist $s^\frown 0 \in T_A$ und $s^\frown 1 \in T_A$.

Wir definieren $P_A := \{x \in X\,;\, \exists z \in [T_A](x = f(z))\}$. Zeigen Sie:

(i) Falls A unendlich ist, so ist P_A eine perfekte Teilmenge von X.

(ii) Falls $A \neq A'$, so ist $P_A \neq P_{A'}$.

(50) Seien X und Y Mengen. Mit $\mathsf{AC}_X(Y)$ wollen wir das folgende Fragment des Auswahlaxioms bezeichnen: falls $f : X \to \wp(Y)\backslash\{\varnothing\}$ eine Funktion ist, so gibt es eine Auswahlfunktion $g : X \to Y$ mit $g(x) \in f(x)$.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

  (i) das Auswahlaxiom AC und

  (ii) für alle Mengen X und Y gilt $\mathsf{AC}_X(Y)$.

(b) Zeigen Sie: Falls $X \leq X'$ und $Y \leq Y'$, so gilt: $\mathsf{AC}_X(Y)$ impliziert $\mathsf{AC}_{X'}(Y')$.

(51) In Aufgabe (47) haben Sie gezeigt, daß die Menge der G_δ-Mengen eines perfekten polnischen Raums Kardinalität $2^{\aleph_0}$ hat. Dieser Beweis verwendet ein Fragment des Auswahlaxioms. Finden Sie X und Y, so daß $\mathsf{AC}_X(Y)$ für diesen Beweis ausreichend ist.

(52) Wir schreiben RCUC für "die Menge der reellen Zahlen ist eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen". Offensichtlich widerspricht RCUC dem Auswahlaxiom. Zeigen Sie, daß RCUC impliziert, daß jede Menge reeller Zahlen Borel ist.

(53) Sei X eine Menge und κ eine reguläre Kardinalzahl. Wir nennen $\mathcal{K} \subseteq \wp(X)$ eine κ-Algebra auf X, falls gilt:

(a) $\varnothing, X \in \mathcal{K}$,

(b) falls $Z \in \mathcal{K}$, so ist $X\backslash Z \in \mathcal{K}$ und

(c) falls $\alpha < \kappa$ und $\{Z_\beta\,;\, \beta < \alpha\} \subseteq \mathcal{K}$, so gilt $\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta \in \mathcal{K}$.

Für $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ definieren Sie eine Hierarchie über $\mathcal{B}$, die Ihnen die kleinste κ-Algebra, welche $\mathcal{B}$ enthält, gibt. Bestimmen Sie die Höhe dieser Hierarchie.