Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 10

Abgabe am Dienstag, 20. Juni 2017 am Anfang der Vorlesung.

(44) Sei X eine Menge und d und d' Metriken auf X. Wir sagen, daß d und d' *äquivalent* sind, falls für jede Menge $Z \subseteq X$ gilt: Z ist d-offen genau dann, wenn Z d'-offen ist. Ist der Begriff der Vollständigkeit unter Äquivalenz abgeschlossen? Also: falls d und d' äquivalente Metriken auf X sind, ist dann (X, d) vollständig genau dann, wenn (X, d') vollständig ist? Geben Sie ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

(45) Sei X eine Menge und d eine Metrik auf X. Die Metrik d heißt *beschränkt*, falls eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x, y \in X$ gilt, daß $d(x, y) < r$.

Zeigen Sie: für jede Metrik d gibt es eine zu d äquivalente beschränkte Metrik (s. (44) für den Begriff der Äquivalenz von Metriken).

(46) Sei X eine Menge und d eine Metrik auf X. Die Metrik d heißt *Ultrametrik*, falls für $x, y, z \in X$ gilt:

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

In der Vorlesung hatten wir die Menge A^ω der Funktionen von ω nach A betrachtet und für $x, y \in A^\omega$ definiert: $d(x, x) := 0$; falls $x \neq y$, so gibt es ein minimales n mit $x(n) \neq y(n)$, dann setze $d(x, y) := 2^{-(n+1)}$.

Zeigen Sie: die Funktion d ist eine Ultrametrik auf A^ω.

(47) Sei (X, d) ein polnischer metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die Menge der G_δ-Mengen in (X, d) Kardinalität $2^{\aleph_0}$ hat.

(48) Sei $\alpha < \omega_1$ eine abzählbare Ordinalzahl. Konstruieren Sie eine abgeschlossene Menge $A \subseteq 2^\omega$, die Cantor-Bendixson-Rang $\alpha + 1$ hat.