Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Fourier-Analyse aus Mittelwerten auf unstrukturierten Gittern

Thorsten Grahs

Reihe F
Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 6
Juni 1998

Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik

Reihe A	Preprints
Reihe B	Berichte
Reihe C	Mathematische Modelle und Simulation
Reihe D	Elektrische Netzwerke und Bauelemente
Reihe E	Scientific Computing
Reihe F	Computational Fluid Dynamics and Data Analysis

Fourier-Analyse aus Mittelwerten auf unstrukturierten Gittern

Thorsten Grahs
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
e-mail: grahs@math.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dieser Bericht stellt die Entwicklung einer diskreten Fourier-Analyse aus Mittelwerten auf unstrukturierten Gittern dar. Dieses Problem ergibt sich aus der Analyse von Daten auf Diskretisierungen von komplexen Gebieten, die z.B durch Triangulierungen mit unterschiedlichen Zellgrößen entstehen.

Diskrete Datenanalyse ist im allgemeinen nur auf regelmäßigen, cartesischen Gittern vermittels der Diskreten Fourier-Transformation (DFT) und der effizienteren schnellen Fast-Fourier-Transformation (FFT) möglich.

In diesem Bericht werden grundlegende Definitionen und Eigenschaften der Fouriertransformation dargestellt, ihre Anwendung auf strukturierte Daten vermittels der DFT diskutiert. Im folgenden wird dann die Idee der Frequenzanalyse von Werten formuliert, die nur als Mittelwerte auf unstrukturierten Triangulierungen zugänglich sind. Abschliessend werden Testbeispiele präsentiert.

1 Einleitung

Die Entwicklung der Fourier-Analyse bzw. die damit aufs engste verbundene Frage der trigonometrischen Approximation steht seit mehr als 200 Jahren im Rampenlicht der Mathematik und geht einher mit so klingende Namen wie Euler, Lagrange, d'Alembert und Bernoullli. Auf immer verbunden sind diese Fragestellungen jedoch mit Jean Baptiste Fourier, der in seiner 1822 veröffentlichten Arbeit *Theorie analytique de la chaleur* [Fou88] proklamierte, daß jede beliebige Funktion als unendliche Reihe von Sinus- und Cosinustermen dargestellt werden kann. Seitdem ist die Theorie der Fourier-Analyse aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken und findet immer neue Anwendungsgebiete in allen Bereichen von Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften.

Die Motivation zu dieser Arbeit resultiert aus dem Problem der Analyse diskreter Daten, innerhalb des Projektes der *Mehrskalenasymptotik*, basierend auf der 'Low-Mach-number'-Asymptotik von Rupert Klein [Kle95]. Eine mathematische Fundierung der asymtotischen Entwicklung ist von Meister in [Mei97] gegeben worden. Ausgehend von diesen Überlegungen wird zur Zeit ein numerisches Verfahren an der Universität Hamburg entwickelt, in dessen Rahmen sich dieses Arbeit einordnet. Zur Anwendung der Asymptotik bzw. der eigentlichen Steuerung des Verfahrens benötigt man Informationen über die vorhandenen Wellenfelder auf den entsprechenden Skalen. Dazu ist eine Analyse der als Mittelwerte vorliegenden Daten notwendig.

Dabei ist es wünschenswert, die Berechnungen auf unstrukturierten Diskretisierungen vorzunehmen, da sich diese flexibeler an die jeweilige Problemstellung anpassen lassen. Für strukturierte – zumeist cartesische – Zerlegungen existiert seit langem eine entsprechende Überführung der Fourier-Analyse auf diskrete Bereiche: die Diskrete Fourier-Transformation. Für unstrukturierte Gitter sind bisher jedoch erst wenige Ansätze zur Hand, sieht man von einer naiven Interpolation auf Rechteckgitter ab, die den unstrukturierten Fall wieder auf eine äquidistante Analyse zurückführt. Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems soll mit diesem Bericht vorgestellt werden.

Im folgenden Abschnitt wird dazu eine kurze Einführung in die Theorie der Fourier-Transformation gegeben und die wichtigsten Definitionen, Sätze und Regeln vorgestellt. Im dritten Kapitel wird der Übergang von kontinuierlichen zu diskreten Daten vorgenommen und die diskrete Fourier-Transformation anschaulich hergeleitet. Im vierten Kapitel werden dann Ideen zum Übergang auf unstrukturierte Gitter erläutert und diese im folgenden Abschnitt anhand von verschiedenen Testfällen bewertet. In der abschließenden Zusammenfassung werden Ausblicke auf die Ausweitung auf mehrere Dimensionen gegeben.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften der Fourier-Transformation beschrieben werden, die zum Verständnis und zur Übertragung auf den diskreten Fall notwendig bzw. hilfreich sind. Zur Vereinfachung beschränken wir uns in der nachfolgenden Vorgehensweise dabei auf eine Raumdimension. Dies ist jedoch keine grundsätzliche Einschränkung: alle Ergebnisse lassen sich auf mehrere Dimensionen ausweiten. Weitergehende Ausführungen zur Fourier-Transformation, -Reihe und zu Fourier-Integralen findet man z.B. bei Walker [Wal86], Dym und McKean [DM72] sowie Papoulis [Pap62].

2.1 Definitionen und Rechenregeln

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty. \tag{1}$$

Definition 2.1. *Die durch*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \tag{2}$$

definierte Funktion

$$\hat{f}: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

heißt die Fourier-Transformierte von f.

Mit dieser Anmerkung läßt sich dann auch die Umkehrung der Fourier-Transformation beschreiben und wir erhalten folgenden Satz.

Satz 2.1 (Umkehrsatz). *Seien $f, \hat{f} \in L^1$. Dann gilt fast überall*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega. \tag{3}$$

Beweis. Ausgehend von obiger Gleichung setzen wir die Definition der Fourier-Transformation ein,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\omega x} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\omega y} dy \, d\omega.$$

Der Satz von Fubini (siehe Forster [For86]) gewährleistet für Lebesgue-integrierbare Funktionen das Vertauschen der Integrationsreihenfolge und wir schreiben

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega x}d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(x-y)\omega}d\omega\, dy.$$

Das zweite Integral läßt sich als Distribution interpretieren (siehe Papoulis [Pap62]). Dies geschieht folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(x-y)\omega}d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi(x-y)\omega)d\omega \\
&\qquad + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi(x-y)\omega)d\omega \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \cos(2\pi(x-y)\omega)d\omega \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{2\sin(2\pi(x-y)T)}{2\pi(x-y)}
\end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung und Vertauschung der Integration und Grenzwertbildung – hier erlaubt, da es sich um Lebesgue-integrierbare Funktionen handelt – führt auf folgende δ-Distribution [Pap62]:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega x}d\omega &= \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{2\sin(2\pi(x-y)T)}{2\pi(x-y)}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\delta_x(y)dy \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Der Beweis gilt nur für die Punkte, in denen f stetig ist, deshalb auch nur fast überall. Berücksichtigt man jedoch, daß das Integral in (3) an einer Unstetigkeitsstelle x_0 gegen das Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwertes von f konvergiert, also

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right],$$

gilt der Beweis auch dort [DM72]. Mit der eingeführten Definition und dem obigen Satz läßt sich dann die Fourier-Transformation definieren.

Definition 2.2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to L^1(\mathbb{R}),\\ f &\mapsto \hat{f}\end{aligned}$$

mit

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

heißt Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R})$. Die entsprechende Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1}$ wird als inverse Fourier-Transformation bezeichnet.

Die Darstellung 2 muß für $f \in L^2(\mathbb{R})$ nicht existieren. Um zu einer Darstellung der Fourier-Transformation für $f \in L^2(\mathbb{R})$ zu gelangen, wird im allgemeinen die Fourier-Transformierte für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ definiert und dann gezeigt, daß es eine Folge von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die bezüglich der L^2-Norm gegen f konvergiert. Eine genauere Darstellung findet man bei Forster [For86]. Wir presentieren hier nur den wichtigsten Satz auf den das oben beschriebene Vorgehen beruht.

Zur Abhilfe konstruieren wie einen Operator $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}) \to Ł^2(\mathbb{R})$, der jedoch im Gegensatz zur obigen Darstellung eine Äquivalenzklasse von Funktionen representiert. Dazu setzen wir $K_r = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq r\}$ und für $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$g_r(\omega) = \int_{K_r} f(x)e^{-i2\pi\omega x}dx.$$

Satz 2.2. *(i) Für $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt*

$$(\mathcal{F}_2 f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\omega x}dx \qquad \textit{fast überall.}$$

(ii) Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}_2 f = \lim_{r\to\infty} g_r,$$

wobei Konvergenz im Sinne von $\|\cdot\|_{L^2}$ vorliegt.

Beweis. Siehe [Wer95]. □

Durch diesen Satz ist es gerechtfertigt, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2$ miteinander zu identifizieren und schreiben daher im folgenden $\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}_2$.

Nach diesen grundlegenden Aussagen über die Fourier-Transformation sollen nun einige Regeln angegeben werden, die den Umgang mit Fourier-Integralen erleichtern. Im folgenden betrachten wir dabei nur den Ortsbereich, das Vorgehen im Frequenzbereich bzw. bei der inversen Fourier-Transformation erfolgt jedoch vollkommen analog. Vorher geben wir zur Vereinfachung der Notation noch folgende Definition.

Definition 2.3. *Sei $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir folgende Ausdrücke:*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{x_0} f)(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
(\mathcal{F}^a f)(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-i2\pi\omega x} dx.
\end{aligned}
$$

Satz 2.3. *Seien $f, g \in L^2$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten für die Fourier-Transformation folgende Regeln:*

$$
\begin{array}{llcll}
(i) & (\mathcal{F}(\alpha f + \beta g))(\cdot) & = & \alpha \hat{f}(\cdot) + \beta \hat{g}(\cdot), & \textit{(Linearität)} \\
(ii) & (\mathcal{F}_{x_0} f)(\cdot) & = & \hat{f}(\cdot) e^{-i2\pi \cdot x_0} & \textit{(Translation)} \\
(iii) & (\mathcal{F}^a f)(\cdot) & = & \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{\cdot}{a}) & \textit{(Dilatation)} \\
(iv) & (\mathcal{F} f^{(n)})(\cdot) & = & (i2\pi\omega)^n \hat{f}(\cdot) & \textit{(Differentiation)} \\
(v) & (\mathcal{F}(f * g))(\cdot) & = & (\hat{f} \cdot \hat{g})(\cdot) & \textit{(Faltung)}
\end{array}
\qquad (4)
$$

Beweis. Zu (i):

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}(\alpha f + \beta g))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta g(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zu (ii):

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{x_0} f)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\omega(y + x_0)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\omega y} dy \; e^{-i2\pi\omega x_0} \\
&= \hat{f}(\omega) e^{-i2\pi\omega x_0} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zu (iii): Sei $a > 0$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^a f)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi \frac{\omega}{a} y} \frac{dy}{a} \\
&= \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{\omega}{a}) \qquad \forall \omega.
\end{aligned}$$

Für $a < 0$ dreht die Substitution $ax = y$ die Integrationsgrenzen um, d.h. wir erhalten den Faktor $-1/a$ und damit gilt

$$(\mathcal{F}^a f)(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{\omega}{a}).$$

Zu (iv): Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} f')(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f^{'}(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \left[f(x) e^{-i2\pi\omega x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d}{dx} e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= -(-i2\pi\omega) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= (i2\pi\omega) \hat{f}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nach $(n-1)$-facher Wiederholung ergibt sich die Behauptung für n.

Zu (v):

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(f * g))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-i2\pi\omega x} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot (\mathcal{F}_y g)(\omega) dy \\
&\overset{(ii)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\omega y} \hat{g}(\omega) dy \\
&= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Transformation bildet das kontinuierliche Analogon zur Fourier-Reihenentwicklung. Dabei ist jedoch zu beachten, daß Fourier-Reihen nur für periodische Funktionen Sinn machen und ein diskretes Spektrum besitzen, während Fourier-Integrale im allgemeinen für Funktionen definiert werden, die für $x \to \pm\infty$ verschwinden und ein kontinuierliches Spektrum besitzen. Dies läßt sich anhand der folgenden Argumentation verdeutlichen.

Die Funktionen

$$e_n = e^{i2\pi nx/T}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

bilden ein Orthonormalsystem auf dem Raum $L^2(T)$, wobei T die Periode sei, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(e_k, e_j) &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T e_k \bar{e_j} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{i2\pi(k-j)x/T} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \delta_{kj}.
\end{aligned}$$

Dies ist eine Basis auf dem Hilbertraum $L^2(T)$, so daß f die Basisdarstellung

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{i2\pi kx/T}, \tag{5}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx, \tag{6}$$

als Koordinaten besitzt. Nach der Voraussetzung (1) ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx \tag{7}$$

beschränkt. Hält man k fest und läßt $T \to \infty$ streben, so geht mit dieser Begründung die rechte Seite gegen Null. Schreiben wir jedoch (6) als

$$T\, c_k(T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx$$

und streben k und T derart gegen Unendlich, daß

$$k/T \to y_k \qquad y_k \in \mathbb{R}$$

gilt, so führt dies zu

$$T\, c_k(T) \to \phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi xy} dx. \tag{8}$$

Betrachtet man nun die Fourier-Reihe von f, (5),

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{i2\pi kx/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} [T c_k(T)] e^{i2\pi kx/T}$$

und setzt $y_k = k/T$, so daß $\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = 1/T$ ist, dann entspricht die rechte Seite einer Riemann-Summe:

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(y_k) e^{i2\pi xy_k} \Delta y_k.$$

Mit der Voraussetzung $k,\ T \to \infty$ approximiert die Summe das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{2\pi ixy} dy$. Damit haben wir eine Darstellung von f als Integral herbeigeführt,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{2\pi ixy} dy, \tag{9}$$

wobei (8) und (9) den am Anfang dieses Kapitels gegebenen Definitionen der Fourier- und der inversen Fourier-Transformation entsprechen. Aus dieser Form ist ersichtlich, daß das Fourier-Integral im allgemeinen für nichtperiodische Funktionen definiert ist, die ein kontinuierliches Spektrum besitzen. Fourier-Reihen approximieren periodische Funktionen, deren Spektrum durch die diskreten Werte für $k \in \mathbb{Z}$ gegeben ist.

Aus der Reihenentwicklung für f folgt auch sofort, daß eine Funktion durch eine endliche Linearkombination von trigonometrischen Polynomen approximiert werden kann. Die Koeffizienten sind gerade die Fourier-Transformierten. Dies besagt folgender Satz:

Satz 2.4. *Sei $e_n, n \in \mathbb{Z}$ eine Basis des $L^2(T)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das zugehörige Skalarprodukt. Dann gilt für jedes $f \in L^2(T)$*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|, \qquad \forall c_k$$

mit

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^T f \bar{e_k} dx.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 &= \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k + \sum_{k=-n}^{n} [\hat{f}(k) - c_k] e_k \right\|^2 \\
&= \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\|^2 \\
&\quad + 2Re \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k, \sum_{j=-n}^{n} [\hat{f}(j) - c_j] e_j \right\rangle \\
&\quad + \left\| \sum_{k=-n}^{n} [\hat{f}(k) - c_k] e_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Das innere Produkt reduziert sich durch die Ortogonalitätsbedingung zu Termen der Form

$$\left[\langle f, e_j \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \langle e_k, e_j \rangle \right] = \langle f, e_j \rangle - \hat{f}(j) = 0,$$

so daß sich die Gleichung folgendermaßen reduziert:

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\|^2 + \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) - c_k \right|^2}_{\geq 0} .$$

□

Zum Abschluß sei noch ein Satz angegeben, der für die Frage des Übergangs auf unstrukturierte Gitter besonders hilfreich werden wird.

Satz 2.5 (Satz von Plancherel-Parseval). *Seien f, g L^2-Funktionen über $\mathbb{R}$. Dann gelten folgende Beziehungen:*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \quad = \quad \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wieder das Skalarprodukt bezgl. $L^2(\mathbb{R})$. Als Spezialfall ergibt sich dann sofort die Beziehung

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \tag{10}$$

Beweis. Wir gehen aus von einer Faltung im Frequenzbereich, d.h.

$$
\begin{aligned}
(\hat{f} * \hat{g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\xi - \omega) d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi(\xi-\omega)x} dx \right] d\omega \\
&\overset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Fubini}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega \right] g(x) e^{-i2\pi\xi x} dx \qquad (11) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-i2\pi\xi x} dx.
\end{aligned}
$$

Mit $\xi = 0$ gilt

$$
\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{g}(-\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx
$$

und

$$
\hat{g}(-\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{i2\pi(-\omega)x} dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x) e^{i2\pi\omega x}} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{i2\pi\omega x} dx} = \overline{\hat{g}(\omega)}
$$

in (11) eingesetzt folgt sofort

$$
\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{g}(-\omega) d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \\
&= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (10) ergibt sich sofort mit der Wahl $f = g$. $\square$

3 Diskrete Fourier-Analyse auf strukturierten Gittern

Bei der Analyse von Daten und der Anwendung der Fourier-Transformation sind wir bisher davon ausgegangen, ein kontinuierliches Signal in Form einer Funktion $f(x)$ zu betrachten. Dies wird aber bei der Datenanalyse von Ergebnissen aus numerischen Verfahren im allgemeinen nicht der Fall sein. Vielmehr werden Punktwerte oder Zellmittel vorliegen, die in Stützstellen oder auf Intervallen (Zellen) vorgegeben sind. Wir gehen somit in diesem Abschnitt von N diskreten Werten U_i aus, die auf einem Intervall I äquidistant vorgegeben sind.

3.1 Approximation der Fourier-Transformation

Gegeben ist die äquidistante Partition des Intervalles $I = [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ durch $N = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ Punkte ,so daß

$$-\frac{A}{2} = x_{-\frac{N}{2}+1} < x_{-\frac{N}{2}+2} < \ldots < x_0 < \ldots < x_{\frac{N}{2}} = \frac{A}{2},$$

mit

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \qquad \text{und} \qquad u(x_i) = U_i.$$

Um zu einer Anschauung der *Diskreten Fourier-Transformation* (DFT) zu gelangen, betrachten wir die Approximation der Fourier-Transformation (2) durch numerische Integration vermittels der Trapezregel. Dazu denken wir uns die auf dem Intervall I definierte Funktion u außerhalb dessen mit Null fortgesetzt, d.h. $u(x) = 0$ für $|x| > A/2$. Die Fourier-Transformierte schreibt sich dann als

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i2\pi\omega x}dx = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} u(x)e^{-i2\pi\omega x}dx. \tag{12}$$

Setzen wir den Integranden zu

$$f(x,\omega) = u(x)e^{-i2\pi\omega x}$$

und wenden die Trapezregel auf das Integral (12) an, so erhalten wir die folgende Approximation:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \\
&= \int_{\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x,\omega) dx \\
&\approx \frac{\Delta x}{2} \left[f\left(-\frac{A}{2},\omega\right) + 2 \sum_{n=-\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}-1} f(x_n,\omega) + f\left(\frac{A}{2},\omega\right) \right]
\end{aligned}$$

Hierbei setzen wir voraus, daß $f(-\frac{A}{2}) = f(\frac{A}{2})$ gilt *.

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\omega) &\approx \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n,\omega) = \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u(x_n) e^{-i2\pi\omega x_n} \\
&\approx A \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} U_n e^{-i2\pi\omega x_n}}_{F(\omega)}, \qquad (13)
\end{aligned}$$

und damit gilt als Näherung von $\hat{u}(\omega)$:

$$\hat{u}(\omega) \quad = A\ F(\omega).$$

Hierbei bleibt jedoch noch offen, welche Frequenzen prinzipiell abgetastet, bzw. überhaupt durch die diskreten Werte aufgelöst werden können.

Grundsätzlich können mit der oben vorgestellten Approximation Fourier - Koeffizienten zu jeder beliebigen Frequenz berechnet werden. Es stellt sich jedoch die Frage, welche Frequenzen überhaupt sinnvollerweise untersucht werden sollten. Dieser Betrachtung schließt sich sofort die Frage nach der tiefsten, noch aufzulösenden Frequenz an.

Das Intervall, welches wir im *Ortsbereich* betrachten, hat die Länge A, d.h. die längste Welle, die auf diesem Bereich vollständig dargestellt werden kann,

*Diese Vorgehensweise wird im allgemeinen dadurch erklärt, daß es sich hierbei um die Approximation des Integrals durch eine Fourier-Reihe handelt. Diese konvergiert an Sprungstellen, wie schon erwähnt, gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwerts. Die Fourier-Reihe approximiert periodische Funktionen, interpretiert also die diskreten Werte als periodisch fortgesetzt. Deshalb konvergiert sie an den Endpunkten gegen deren Mittelwert $0.5[f(-\frac{A}{2}) + f(\frac{A}{2})]$. Die Funktionswerte werden dann genau so gesetzt.

hat die Periode A. Diese Welle nennt man im allgemeinen *Fundamentalmode* oder *Einsmode*. Sie hat die Frequenz

$$\omega_{min} = \frac{1}{A},$$

und es ist natürlich, die weiteren abzutastenden Frequenzen als ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz anzusetzen. Da man eventuell auch eine inverse Transformation auszuführen hat, ist es sinnvoll, ebenfalls N Frequenzwerte zu wählen.

Dies führt also auf einen Frequenzbereich, der durch N abgetastete Werte repräsentiert wird, die äquidistant durch $\Delta\omega := \omega_{min}$ unterschieden werden, d.h $\Delta\omega = \omega_i - \omega_{i-1}$. Der untersuchte Bereich im Frequenzraum ist somit durch die Wahl dieser Werte festgelegt und wir bezeichnen das Intervall als $[-\Omega/2, \Omega/2]$. Hierbei gelten offensichtlich die Beziehungen

$$\Omega = N\Delta\omega = \frac{N}{A}$$

bzw.

$$A\Omega = N.$$

Die Relationen im Frequenzbereich sind dadurch direkt mit dem Vorgaben aus dem Ortsbereich verknüpft. Für diese gilt aber, auch durch die Wahl der strukturierten Partitionierung des Intervalles I, die Beziehung $N\Delta x = A$. Mit der Bedingung für die Fundamentalmode $\Delta\omega = 1/A$ lassen sich somit sofort folgende Verhältnisse angeben:

$$\frac{1}{\Delta\omega} = A = N\Delta x$$

bzw.

$$\Delta x \Delta\omega = \frac{1}{N}.$$

Damit ergeben sich folgende Beziehungen, die wir als *Reziprozitätsbedingungen* bezeichnen wollen, nämlich

$$A\Omega = N$$

und

$$\Delta x \Delta\omega = \frac{1}{N}.$$

Die beiden Beziehungen sind nicht unabhängig voneinander, geben jedoch einen guten Einblick in die jeweiligen Relationen der zu untersuchenden Größen. Hält man z.B. die Anzahl der Gitterpunkte N fest, so ergibt sich sofort aus der ersten Beziehung, daß bei Auswahl eines größeren Ortsbereiches das betrachtete Frequenzspektrum kleiner wird. Notwendigerweise und anhand der zweiten Beziehung leicht einzusehen, veringert sich damit auch die Fundamentalmode $\Delta\omega$, da bei obigem Vorgehen die Gitterweite Δx größer wird.

3.2 Die diskrete Fourier-Transformation

Mit den in den vorhergehenden Abschnitten angestellten Überlegungen zur Approximation der Fourier-Transformation und der sinnvoll zu untersuchenden Frequenzen, kann man nun direkt zur Formulierung der *Diskreten Fourier-Transformation* (DFT) übergehen. Dabei berücksichtigen wir, daß sich Gitterpunkte im Ort- und Frequenzbereich als ganzzahlige Vielfache der Abstände der Gitterpunkte schreiben lassen, nämlich $x_n = n\Delta x$ und $\omega_k = k\Delta\omega$. Damit gilt für die zweite Reziprozitätsbedingung:

$$x_n\omega_k = (n\Delta x)(k\Delta\omega) = \frac{nk}{N}.$$

Diese Bedingungen setzt man in (13) ein und erhält umgehend folgende Definition für die diskrete Fourier-Transformation auf strukturierten Gittern und ihrer inversen Transformation.

Definition 3.1. *Die diskrete Fourier-Transformation schreibt sich nach obiger Herleitung als:*

$$\textbf{DFT} \qquad F_k := F(\omega_k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} U_n e^{-i2\pi nk/N}, \quad k = -\frac{N}{2}+1,\ldots,\frac{N}{2}.$$

Die Inverse Diskrete Fourier-Transformation (IDFT) lautet dann analog:

$$\textbf{IDFT} \qquad U_n := u(x_n) = N\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_k e^{i2\pi nk/N}, \quad n = -\frac{N}{2}+1,\ldots,\frac{N}{2}.$$

Es sei dazu angemerkt, daß die Wahl des Intervalles $I = [-A/2, A/2]$ nicht notwendigerweise um den Nullpunkt herum zentriert erfolgen muß, ebensowenig wie die Wahl der Indizes $n = -\frac{N}{2}+1,\ldots,\frac{N}{2}$ zwingend ist. Der Ortsbereich kann auch als $I = [0, A]$ mit $n = 0, \dots, N-1$ gewählt werden. Die DFT schreibt sich dann in der Form

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n e^{-i2\pi nk/N}, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

Der Unterschied besteht nur in der Darstellung bzw. Auswahl der Bereiche; die Auswahl der Zentrierung der Bereiche um den Nullpunkt erscheint uns hier anschaulicher.

Es sei noch kurz darauf verwiesen, daß, wie wir im Abschnitt 2.1 gesehen hatten, die Fourier-Reihe auch als beste Approximation einer Funktion (siehe (10)) vermittels eines trigonometrischen Polynoms angesehen werden kann, bei dem die Koeffizienten gerade den Fourier-Koeffizienten entsprechen. Dies führt auf eine alternative Herleitung der DFT. Man setzt

$$\psi_N(x) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \alpha_k e^{i2\pi kx/A}$$

als Approximation der Funktion $u(x_n) = U_n$ an und bildet eine diskrete Bedingung der kleinsten Fehlerquadrate (least square error), d.h. man schreibt den Fehler als

$$E = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} |U_n - \psi_N(x_n)|^2.$$

Dieser Fehlerterm ist eine Funktion der Koeffizienten α_i und als notwendige Bedingung zur Minimierung des Funktionals ergibt sich, daß die partiellen Ableitung nach den Koeffizienten verschwinden müssen:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} E = 0, \qquad \forall i = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Dieser Ansatz führt direkt darauf, daß die Koeffizienten, analog zu Abschnitt 2.1, als

$$\alpha_i = \hat{U}_i = F_i$$

zu wählen sind. Dies entspricht der oben gegebenen Definition der diskreten Fourier-Transformation und ihrer Inversen. Die genauere Art des Vorgehens und eine ausführliche Abhandlung der DFT findet man bei Briggs und Henson [BH95]. Dort wird auch eine Einführung in die schnelle Fourier-Transformation – Fast Fourier Transformation (FFT) – gegeben, welche einen sehr effizienten Algorithmus zur numerischen Auswertung der DFT darstellt, auf dessen Darstellung hier aber verzichtet wurde. Eine ausführliche Diskussion dieser Methode bietet Brigham [Bri95].

3.3 Zusammenhang zwischen diskreter und kontinuierlicher Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie die kontinuierliche Darstellung einer Funktion bzw. ihrer Transformierten mit der Darstellung durch diskrete Daten zusammenhängen und inwiefern sie aus den Punktdaten rekonstruiert werden kann. Diese Fragestellung führt auf das *Abtasttheorem* †. Zur Vorbereitung auf diesen wichtigen Satz der Signaltheorie führen wir die *sinc-Funktion* ein. Sie ist als

$$\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

definiert. Wir betrachten im folgenden besonders die Funktion

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x - x_n}{\Delta x}\right) = \frac{\sin[\pi(x - x_n)/\Delta x]}{[\pi(x - x_n)/\Delta x]} = \Psi_n(x).$$

Die Funktion $\Psi_0(x)$ wird die *Kardinalfunktion* oder *Whittakers Kardinalfunktion* genannt und ist in Abb. 1 zu sehen (siehe auch [VB82]). Sie hat als Fourier-Transformierte die Boxfunktion

$$\hat{\Psi}_0(\omega) = \begin{cases} \Delta x & \text{für } \omega \in [-\frac{1}{2\Delta x}\,,\ \frac{1}{2\Delta x}], \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

und erfüllt zusammen mit den anderen Kardinalfunktionen die Orthogonalitätsbedingung bezüglich des Skalarprodukts aus L^2:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle &= \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathbb{R}} \Psi_n(x)\Psi_m(x)dx \\
&\overset{\text{Satz 2.5}}{=} \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}_n(\omega)\hat{\Psi}_m(-\omega)d\omega \\
&\overset{\text{Satz 2.2}}{=} \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}_0(x)^2 e^{i2\pi(n-m)\omega\Delta x} d\omega \\
&= \Delta x \int_{-\frac{1}{2\Delta x}}^{\frac{1}{2\Delta x}} e^{i2\pi(n-m)\omega\Delta x} d\omega \\
&= \Delta x \frac{\sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\pi} \\
&= \begin{cases} \Delta x & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

† Dieses Theorem wurde von Whittaker [Whi15] als Kardinaltheorem der Interpolationstheorie eingeführt, erlangte seine Bekanntheit jedoch erst in der Signaltheorie durch Nyquist und Shannon [SW49] als Abtasttheorem (*sampling theorem*).

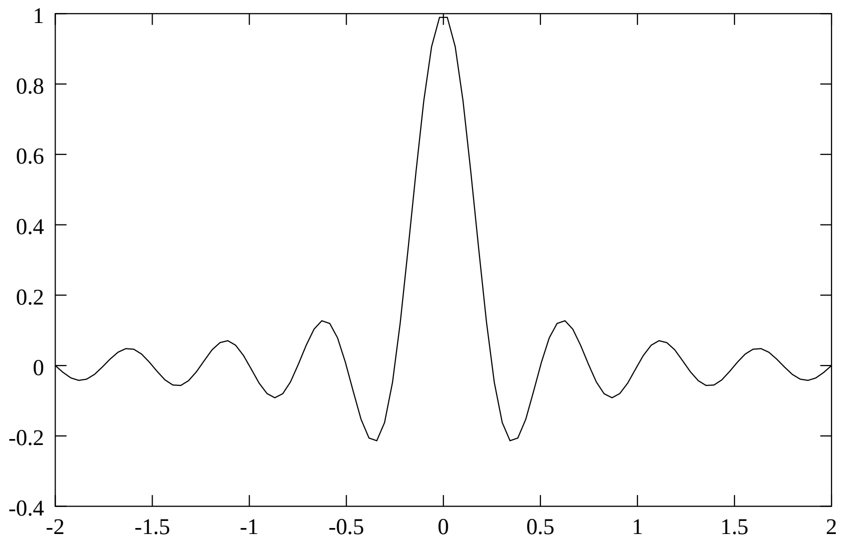

Abbildung 1: sinc-Funktionn $\Psi_0(x)$

Satz 3.1 (Das Abtasttheorem). *Sei u eine bandbeschränkte Funktion, d.h. eine Funktion, deren Fourier-Transformierte außerhalb des Intervals $[-\Omega/2, \Omega/2]$ identisch Null ist. Wird Δx derart gewählt, daß*

$$\Delta x \leq \frac{1}{\Omega}$$

gilt, dann wird u exakt aus den Abtastwerten $U_n = u(n\Delta x) = u(x_n)$ rekonstruiert:

$$\begin{aligned} u(x) \qquad &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \mathrm{sinc}\left(\tfrac{\pi(x-x_n)}{\Delta x}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \frac{\sin(\pi(x-x_n)/\Delta x)}{\pi(x-x_n)/\Delta x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Beweis. Auf Grund der Bandlimitierung von $\hat{u}(\omega)$ ist die inverse Fourier-Transformation

$$u(x) = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{u}(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega$$

und es existiert die Darstellung der abgetasteten Werte

$$U_n = u(n\Delta x) = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{u}(\omega) e^{i2\pi\omega n\Delta x} d\omega. \tag{15}$$

Entwickelt man $\hat{u}(\omega)$ im Intervall $[-\Omega/2, \Omega/2]$ in einer Fourier-Reihe,

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i2\pi\omega n\Delta x}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{\Omega}\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{u}(\omega) e^{i2\pi\omega n\Delta x} dw$$

und setzt mit (15) die Koeffizienten zu

$$c_n = \frac{1}{\Omega} U_n,$$

schreibt sich obige Reihenentwicklung als

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{-i2\pi n\omega\Delta x}.$$

Für die inverse Fourier-Transformation schreiben wir dann

$$\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{u}(\omega) e^{i2\pi\omega x} dw = \frac{1}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} e^{-i2\pi\omega n\Delta x} e^{i2\pi\omega x} d\omega.$$

Das Integral über die Exponentialfunktionen ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} e^{-i2\pi\omega\Delta x} e^{i2\pi\omega x} d\omega &= \left[\frac{\sin[2\pi(x - n\Delta x)\omega]}{2\pi(x - n\Delta x)}\right]_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \\
&= \frac{\sin[\Omega\pi(x - n\Delta x)] - \sin[-\Omega\pi(x - n\Delta x)]}{2\pi(x - n\Delta x)} \\
&= \frac{2\sin[\Omega\pi(x - n\Delta x)]}{2\pi(x - n\Delta x)}.
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $\Delta x = \frac{1}{\Omega}$ — für $\Delta x < \frac{1}{\Omega}$ kommt dann noch eine Konstante C hinzu, d.h. $\Delta x = \frac{C}{\Omega}$ — erhalten wir für die Funktion $u(x)$ die gesuchte Darstellung (14):

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega} U_n \frac{\sin[\Omega\pi(x - x_n)]}{\pi(x - x_n)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta x U_n \frac{\sin[\pi(x - x_n)/\Delta x]}{\pi(x - x_n)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \mathrm{sinc}[(x - x_n)/\Delta x].
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. Die kritische Intervallpartitionierung $\Delta x = 1/\Omega$ heißt *Nyquist-Abtastrate, die Frequenz Ω Nyquist-Frequenz. Sie ist die höchste Frequenz, die aus einen Datensatz mit der Auflösung Δx rekonstruiert werden kann. Alle anderen höheren Frequenzen werden als tiefere Frequenzen aufgelöst. Dies Phänomen nennt man aliasing.*

Satz 3.2 (aliasing). *Frequenzen oberhalb der Nyquistfrequenz*

$$\Omega = \frac{1}{\Delta x} \tag{16}$$

werden bei der Rekonstruktion aus diskreten Daten als tiefere Frequenzen aufgelöst, vermittels der Beziehung

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega + n\Omega). \tag{17}$$

Beweis. Wir gehen aus von einer stetigen Funktion $u(x)$ und bilden mit ihrer Hilfe die Darstellung

$$u^*(x) = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta x)\delta(x - n\Delta x),$$

die aus einer Sequenz von äquidistanten Einheitsimpulsen $\delta(x - n\Delta x)$ besteht, welche durch die Funktionswerte von $u(n\Delta x)$ gewichtet sind. Die Fourier-Transformierte ist (siehe [Pap62]):

$$\hat{u}^*(\omega) = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta x)e^{-i2\pi\omega n\Delta x}. \tag{18}$$

Für eine Funktion $f(x)$ und ihre Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ gilt die *Poisson'sche Summenformel* [Wal88]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n\omega_0)e^{i2\pi n\omega_0 x},$$

mit $\omega_0 = 1/\Delta x$. Mit der Erinnerung, daß

$$f(x)e^{-i2\pi\xi x} \leftrightarrow \hat{f}(\omega + \xi)$$

gilt und auf die Summenformel angewandt, folgt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta x)e^{-i2\pi n\Delta x\omega} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega + n\omega_0).$$

Einsetzen in (18) führt sofort auf

$$\hat{u}^*(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega + n\omega_0).$$

$\square$

Die Darstellung verdeutlicht sofort, daß Vielfache der Nyquist-Frequenz $\omega_0 = 1/\Delta x = \Omega$ Beiträge zum Fourier-Koeffizienten $\hat{u}(\Omega)$ liefern, aber selber nicht mehr aufgelöst werden. Die höheren Frequenzen werden als Grundfrequenz abgetastet und dadurch nicht repräsentiert. Sie werden als tiefere Frequenzen interpretiert. Dieses nennt man *aliasing.*

Aus obigen Satz haben wir gesehen, daß sich eine Funktion vermittels der Kardinalfunktion aus ihren diskreten Werten $u(x_n) = U_n$ rekonstruieren läßt, d.h wir schreiben

$$u(x) \approx u^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \Psi_n(x).$$

Die Fourier-Transformierte läßt sich dann als

$$\hat{u}^*(\omega) = \hat{\Psi}_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{-i2\pi\omega\Delta x}$$

schreiben und ist nach dem Abtasttheorem bandbeschränkt auf dem Intervall $I = [-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta x}]$, da gilt:

$$\hat{u}^*(\omega) = \begin{cases} \hat{U}(\omega) & \text{für } \omega \in [-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta x}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wendet man den Satz von Parseval-Plancherl an, folgt

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}^*(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-1/2\Delta x}^{1/2\Delta x} |\hat{U}(\omega)|^2 d\omega. \\ &= \|\hat{U}(\omega)\|_2^2. \end{aligned}$$

Ebenso gilt mit der Orthogonalitätsbedingung (14) die Gleichung

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|_2^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^2 \langle \Psi_n, \Psi_n \rangle + \sum_{n \neq m} U_n U_m \langle \Psi_n, \Psi_m \rangle \\ &= \Delta x \sum_n U_n^2 \\ &= \|U_n\|_2^2 \end{aligned}$$

Damit besteht Gleichheit zwischen $u^*(x)$ in der L^2-Norm und den Daten U_n bezgl. der diskreten l^2-Norm. Gleiches gilt für die jeweiligen Fourier-Transformierten. D.h. die aus den Daten rekonstruierte stetige und bandlimitierte Funktion $u^*(x)$ und U_n enthalten die gleichen Informationen und sind analytisch betrachtet äquivalent.

4 Die diskrete Fourier-Transformation auf unstrukturierten Gittern

Für eine Anwendung einer Datenanalyse auf numerische Verfahren stellt sich nun die natürliche Frage, wie diese auf unstrukturierte Gitter auszuweiten ist. Dieser Übergang ist wünschenswert, da durch unstrukturierte Diskretisierungen Hindernisse oder Ränder besser aufgelöst werden, somit problemrelevant diskretisiert wird. So z.B. derart, daß in Bereichen, in denen die Lösung voraussichtlich wenig variiert, grob, und in Gebieten, in denen starke Änderungen zu erwarten sind, entsprechend feiner diskretisiert wird.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir eine Vorgehensweise für strukturierte Bereiche erläutert, hier soll nun die Verallgemeinerung auf beliebige Partitionierungen diskutiert werden.

4.1 Übergang zu unstrukturierten Gittern

Am Anfang der Betrachtung möchte ich noch einmal vor Augen führen, woran wir eigentlich interessiert sind, wenn wir die diskreten Daten einer Frequenzanalyse unterwerfen. Zu vorgegebenen Werten U_i möchten wir das diskrete Spektrum $\hat{U}$ finden, bzw. zu vorgegebenen Frequenzen ω_j den Fourier-Koeffizienten $\hat{U}(\omega_j)$, der die Amplitude angibt, mit den die Frequenz ω_j bei der Approximation der Daten U_i eingeht.

Gehen wir für einen Moment davon aus, wir kennten die Fourier-Transformierte $\hat{u}(\omega)$ einer – möglicherweise aus den Daten U_i rekonstruierten – Funktion $u(x)$. Wir suchen zu einer bestimmten Frequenz ω_j den entsprechenden Fourier-Koeffizienten. Dazu wählen wir eine Hilfsfunktion $g_j \in L^2(\mathbb{R})$, deren Fourier-Transformierte eine Dichte ist, d.h. wir bestimmen

$$c_j := \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\omega)\hat{g}_j(\omega)\, d\omega. \tag{19}$$

Dies entspricht einer gefensterten Fourier-Transformation, wobei wir als Fensterfunktion $\hat{g}_j$ eine Funktion wählen, die den Wert bei ω_j möglichst gut lokalisiert. D.h. $\hat{g}_j$ soll bei ω_j ein globales Maximum besitzen und für $|\omega| \to \infty$ möglichst schnell gegen Null abfallen. Geeignet scheint hierfür eine stark lokalisierte Gaußsche Glockenkurve oder eine charakteristische Funktion mit dem Integral $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}_j(\omega)d\omega = 1$. Somit läßt sich (19) auch als ein durch g_j gewichtetes Mittel von $\hat{u}$ interpretieren.

Mit Hilfe des Satzes von Plancherel aus Abschnitt 2.1 läßt sich (19) nun vollständig durch Funktionen aus dem Ortsbereich darstellen, d.h. es kommen keine Fourier-Transformierten mehr vor:

$$c_j := \int_{\mathbb{R}} u(x) g_j(x) dx. \tag{20}$$

Somit ist das Problem der Koeffizientenbestimmung auf bekannte Funktionen im Ortsbereich zurückgeführt: die Fourier-Transformierte einer Gaußkurve ist wieder eine Gaußkurve, entsprechend ihrer Verschiebung und Dehnung moduliert und gestreckt nach den Regeln aus Satz 2.3. Weiterhin besteht jedoch das Problem, daß die Funktion $u(x)$ nur als Mittelwert U_k auf der jeweiligen Zelle z_k bekannt ist.

Die Werte der U_k's stehen uns somit nur als Zellmittelwerte

$$U_k = \frac{1}{\Delta x_k} \int_{z_k} u(x) dx$$

zur Verfügung, wobei Δx_k der Fläche der Zelle entspricht — im eindimensionalen Fall also wie bisher $x_k - x_{k-1}$ — und z_k die k-te Zelle repräsentiert, über die integriert wird. Daraus folgt, daß die Koeffizienten c_j nicht exakt aus (20) berechnet werden können, sondern approximativ bestimmt werden müssen. Dazu wird die Funktion g_j durch Treppenfunktionen angenähert und man erhält als Approximation der Funktion g_j:

$$\tilde{g}_j = \sum_k g_{jk} \chi_{z_k},$$

wobei χ_{z_k} die charakteristische Funktion für die Zelle z_k ist, $g_{jk}\chi_{z_k}$ also die Restriktion von $\tilde{g}_j$ auf z_k beschreibt. Die g_{jk} sind dabei Koeffizienten, bzw. die Werte der Treppenfunktion auf der Zelle, die noch genauer zu bestimmen sind. Die Näherung $\tilde{c}_j$ der Koeffizienten (20) schreibt sich dann als

$$\tilde{c}_j = \sum_k U_k g_{jk}.$$

Die Güte der Approximation der c_j hängt dabei entscheidet von dem Grad der Näherung von g_j ab. Dies besagt folgender Satz:

Satz 4.1. *Seien $\tilde{c_j}$ die nach oben vorgenommene Approximation an (20), dann ergibt sich folgende Abschätzung:*

$$|c_j - \tilde{c_j}| \leq \varepsilon_j ||u||_2 = \varepsilon_j ||\hat{u}||_2$$

mit

$$\varepsilon_j = ||g_j - \tilde{g_j}||_2.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|c_j - \tilde{c_j}| &= \left| \int_I u(x) g_j(x) dx - \sum_k U_k g_{jk} \right| \\
&= \left| \int_I u(x) g_j(x) dx - \sum_k \frac{1}{\Delta x_k} \int_I u(x) \chi_{z_k} g_{jk} dx \right| \\
&= \left| \int_I u(x) (g_j(x) - \sum_k \frac{1}{\Delta x_k} g_{jk} \chi_{z_k}) dx \right| \\
&\leq \left| \int_I (g_j(x) - \sum_k \frac{1}{\Delta x} g_{jk} \chi_{z_k})^2 dx \right|^{1/2} \left| \int_I u(x)^2 dx \right|^{1/2} \\
&= \|g_j - \underbrace{\sum_k \frac{g_{jk}}{(\Delta x)^{1/2}} \frac{\chi_{z_k}}{(\Delta x)^{1/2}}}_{\tilde{g_j}} \|_2 \, \|u\|_2
\end{aligned}$$

□

Mit der obigen Wahl der g_{jk} entspricht dies genau der Abschätzung im obigen Satz und die Güte der Approximation hängt von $\varepsilon_j = \|g_j - \tilde{g_j}\|$ ab, also letztendlich von der Genauigkeit der Approximation der Funktion $g_j(x)$ durch die Treppenfunktion der Koeffizienten

$$g_{jk} = \int_{z_k} g_j(x) dx.$$

Hierbei zeigt sich auch die Wahl der g_{jk} als natürlich, da sie, mit dem Faktor $1/\Delta x$, einer Mittelung über der Zelle z_k entsprechen.

4.2 Numerische Ergebnisse

Hier sollen einige numerische Testbeispiele vorgestellt werden, die vermittels der diskreten Fourier-Transformation auf unstrukturierten Gittern berechnet wurden.

Ausgehen von einem Anfangssignal wird die Fourier-Transformierte berechnet und als Vergleich die diskrete Fourier-Transformation auf strukturierten Gittern angegeben. Dazu wird die die Differenz beider Funktionen angegeben, um daran die Güte der Approximation abschätzen zu können.

Die Ergebnisse hängen dabei in ihrer Skalierung erheblich von der Abtastfunktion ab. Für diese Beispiele wurde eine stark lokalisierter Rechteckimpuls $\Pi_h(x)$ gewählt, für den gilt:

$$\Pi_h(x) := \begin{cases} h, & \text{für } x \in [-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} \Pi_h(x) dx = 1.$$

Die Fourier-Transformierte ist die sinc-Funktion aus Abschnitt 3.3.

4.2.1 Äquidistante Approximation

Im folgenden werden einfache Funktionen auf einer äquidistanten Partitionierung betrachtet. Als Intervall wurde im Ortsbereich das Intervall $[-51.0,\ 51.0]$ gewählt, mit $\Delta x = 0.25$. Daraus resultiert als zu untersuchender Bereich im Frequenzraum das Intervall $[-2.0,\ 2.0]$.

cos-Funktion

Als erstes einfaches Beispiel geben wir eine Cosinusfunktion vor.

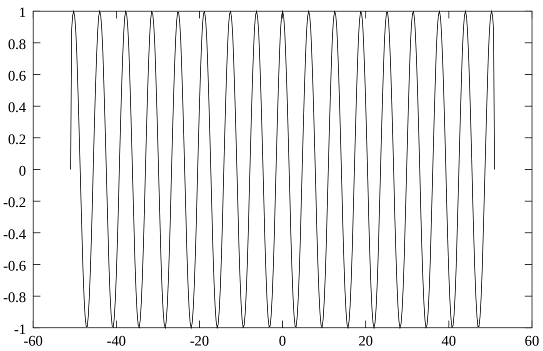

Abbildung 2: cos(x) als Ausgangssignal

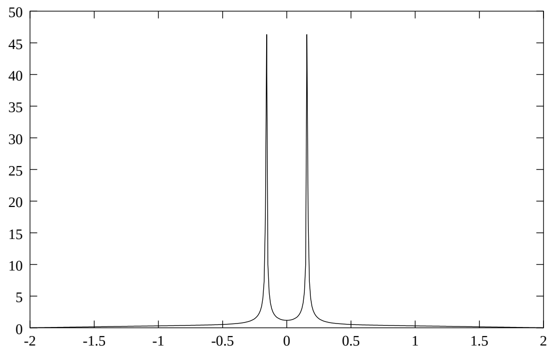

Abbildung 3: DFT-Transformation

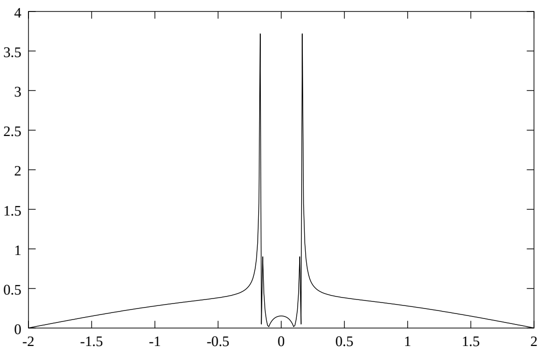

Abbildung 4: Differenz zwischen DFT und Approximation

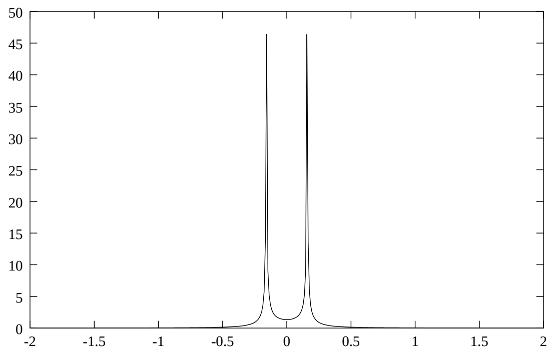

Abbildung 5: Approximation

sinc-Funktion

Als nächstes geben wir die sinc-Funktion vor:

$$u(x) = \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \tag{21}$$

Die Fourier-Transformierte entspricht der Rechteckfunktion:

$$\hat{u}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

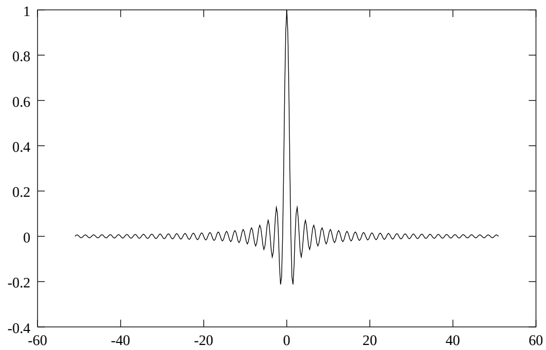

Abbildung 6: sinc(x) als Ausgangssignal

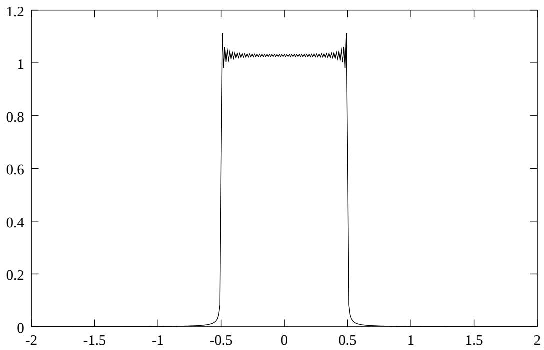

Abbildung 7: DFT-Transformation

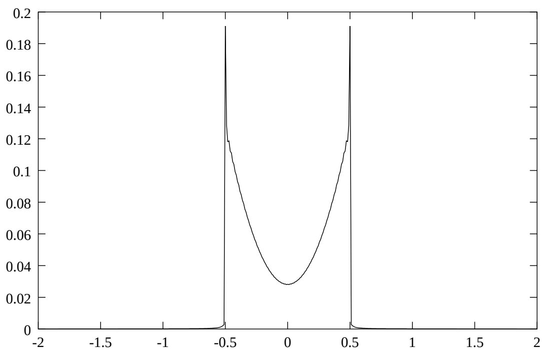

Abbildung 8: Differenz zwischen DFT und Approximation

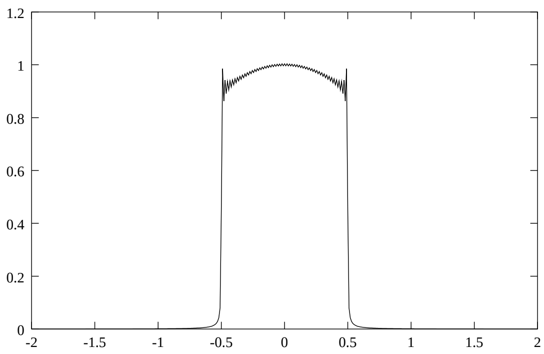

Abbildung 9: Approximation

Moduliertes Signal

Als nächstes geben wir ein moduliertes Signal aus den Asymptotikverfahren vor, zu dessen Berechnung diese Methode entwickelt wird [Kle95]. Es handelt sich dabei um eine langwellige Druckänderung, der eine hochfrequente Störung überlagert wird.

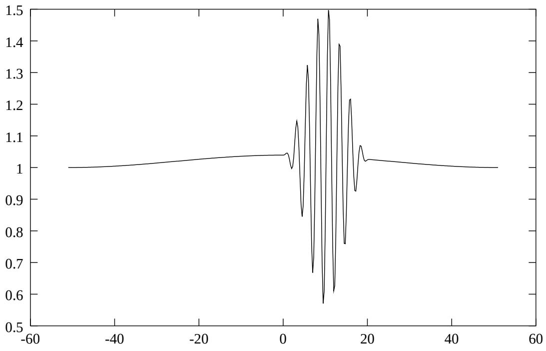

Abbildung 10: Ausgangssignal

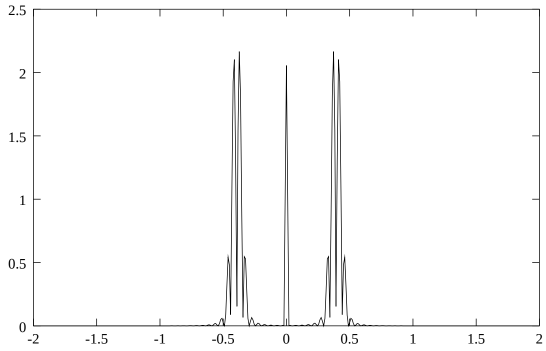

Abbildung 11: DFT-Transformation

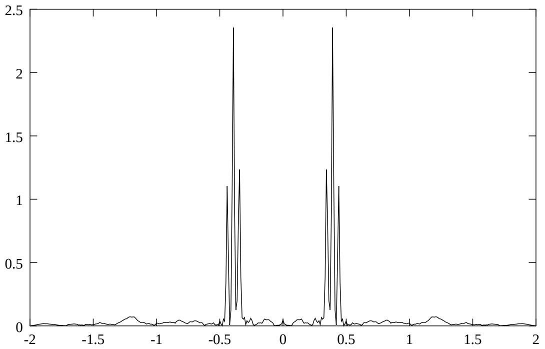

Abbildung 12: Differenz zwischen DFT und Approximation

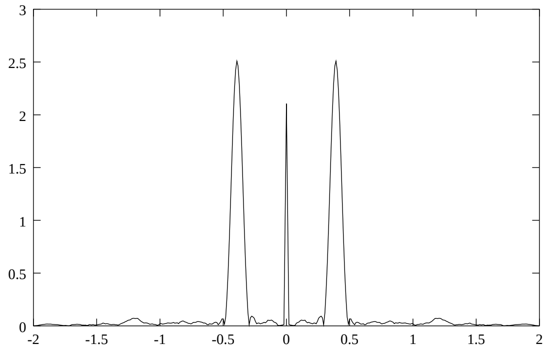

Abbildung 13: Approximation

4.2.2 Unstrukturierte Approximation

In diesem Abschnitt gehen wir zu einem unstrukturierten Gitter über. Die Intervallgrenzen sind die gleichen wie bei den vorhergehenden Testfälllen, jedoch werden jetzt die Zellränder per Zufallsgenerator um bis zu 0.05 Einheiten gegenüber der äquidistanten Partitionierung mit $\Delta x = 0.25$ verschoben. Die Testbeispiele bleiben die gleichen:

cos-Funktion

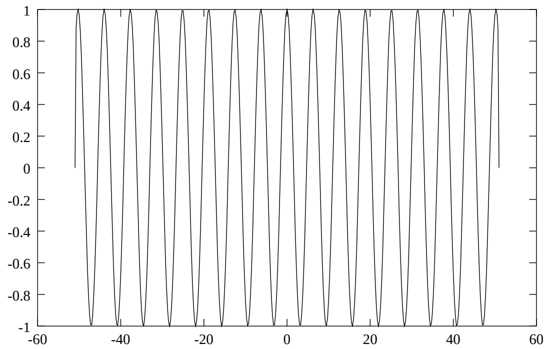

Abbildung 14: cos(x) als Ausgangssignal

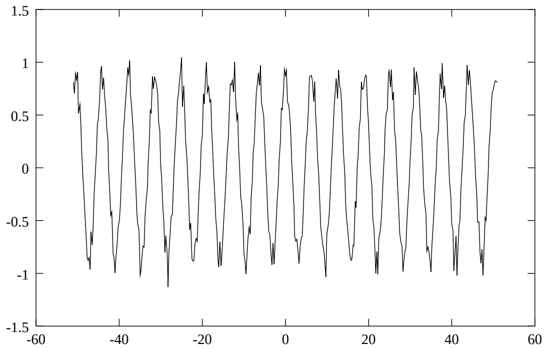

Abbildung 15: Rücktransformation des approximierten Frequenzganges

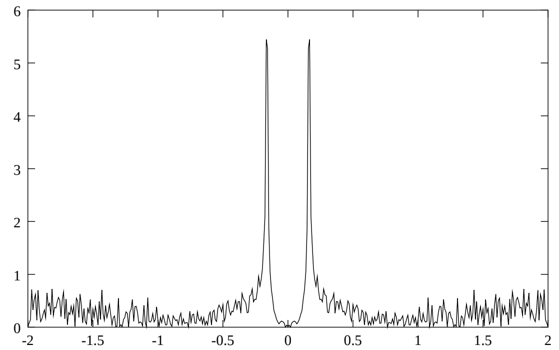

Abbildung 16: Differenz zwischen DFT und Approximation

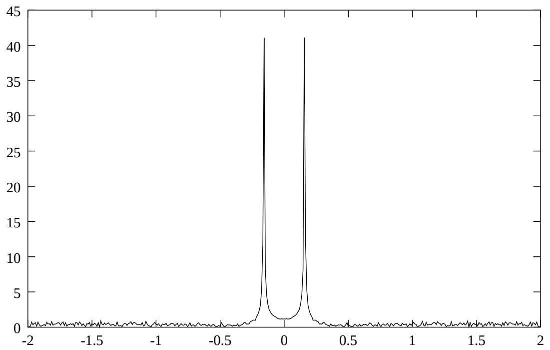

Abbildung 17: Approximation

sinc-Funktion

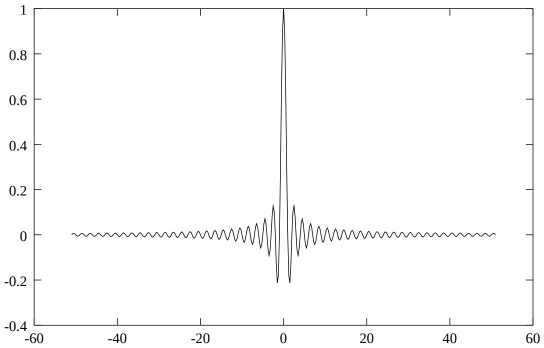

Abbildung 18: sinc(x) als Ausgangssignal

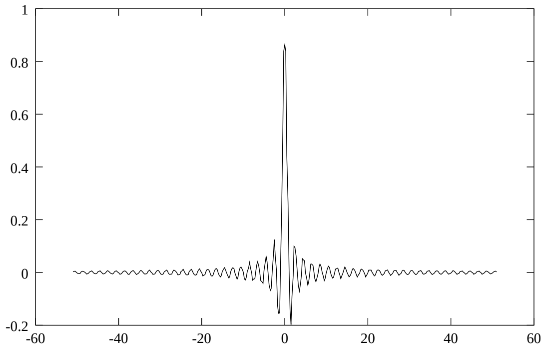

Abbildung 19: Rücktransformation des approximierten Frequenzganges

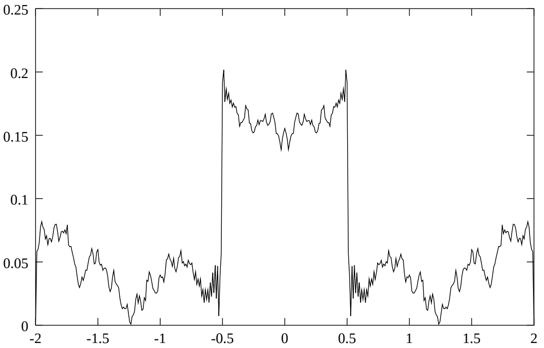

Abbildung 20: Differenz zwischen DFT und Approximation

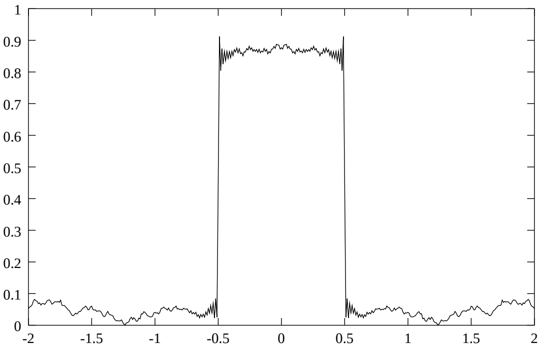

Abbildung 21: Approximation

Moduliertes Signal

Hier betrachten wir wieder das modulierte Ausgangssignal. Da es sich gezeigt hat, daß auf unstrukturierten Gitter die Lösung – in diesem Fall die Approximation der Fourier-Transformation – zu starken unnatürlichen Oszillationen neigt, sofern ein ausgeprägter konstanter Anteil vorhanden ist, wurde dieser aus dem Signal herausgenommen.

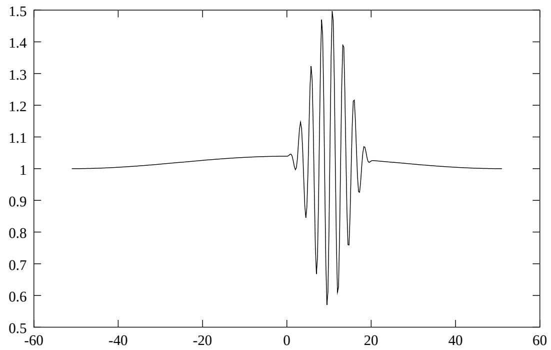

Abbildung 22: Ausgangssignal

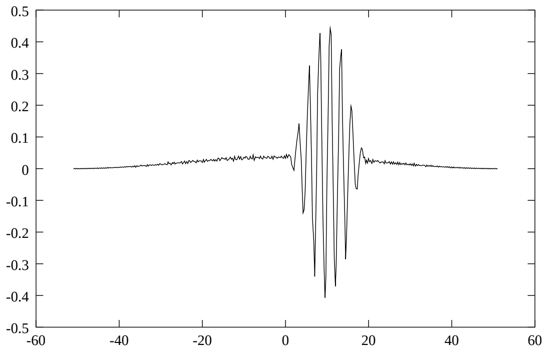

Abbildung 23: Rücktransformation des approximierten Frequenzganges

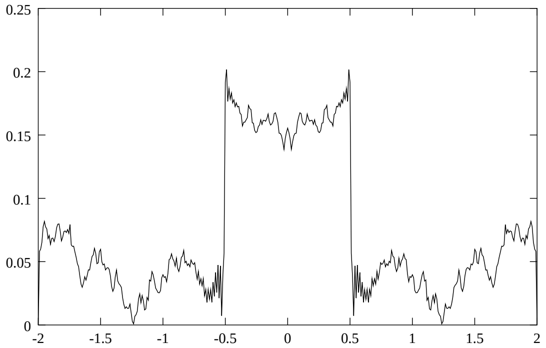

Abbildung 24: Differenz zwischen DFT und Approximation

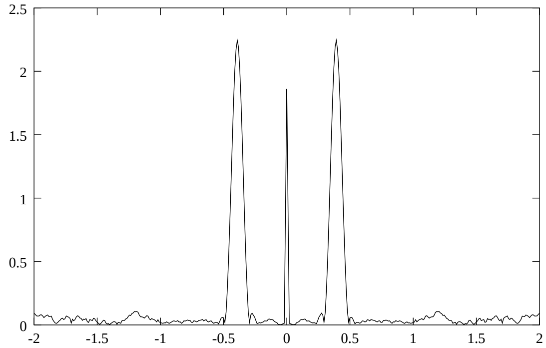

Abbildung 25: Approximation

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht haben wir einige grundlegende Sätze und Definitionen der Fourier-Reihen und -Intgrale angegeben und ihre Anwendung auf diskrete Daten vorgestellt.

Aus dieser Theorie wurde eine neue Berechnungsmethode der diskreten Fourier-Analyse aus Mittelwerten auf unstrukturierten Gittern angegeben, wie sie z.B. als Anwendung in der numerischen Strömungsmechanik auftreten. Die Ergebnisse der Testfälle sind gut, die Abweichungen zur äquidistanten diskreten Fourier-Transformation klein bzw. ergeben, wie im Fall des Testbeispiels des modulierten Signals, ein kontinuierliches Signal, wohingegen die DFT-Transformation deutlich ihren diskreten Charakter zeigt. Auf unstrukturierten Gittern stellt sich ein 'Rauschen' ein, da die Mittelwerte durch die stark variierenden Zellgrößen unterschiedlich gewichtet werden. Die Rücktransformation des aproximierten Frequemzganges ist jedoch im allgemeinen noch gut.

Als nächster Schritt ist die hier vorgestellte eindimensionale Methode konsequent in zwei Raumdimensionen zu übertragen und in das Verfahren der asymptotischen Entwicklung ([Kle95, Mei97]) zu integrieren, für das es entwickelt wurde. Weiterhin sollte eine Rekonstruktion der Daten aus den Mittelwerten angestrebt werden, um die Güte der Approximation zu erhöhen und die Schwankungen durch die unterschiedlichen Zellgrößen zu eliminieren. Dabei bietet sich die Theorie der radialen Basisfunktionen an ([Pow90, Wen96]), die von Sonar [Son97] erstmal im Rahmen der optimalen Rekonstruktion in den Themenkreis mehrdimensionaler numerischer Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen eingeführt wurden und sehr gute Ergebnisse lieferten.

Danksagung

Ganz herzlich Dank sagen möchte ich Dr. Wolfgang Ripken für die Motivation zu diesem Entwurf und für fruchtbare Diskussionen.

Prof. Dr. Thomas Sonar sei bedankt für die Betreuung der Promotion in deren Rahmen dieser Bericht entstandt, der Integration in das Projekt der Mehrskalenanalyse und seine 'Visionen', die mir die Fourier-Analyse näherbrachten und fortwährend motivierten.

Besonderer Dank gilt Dr. Andreas Meister und Lars Hoffmann für Diskussionen, mentale Unterstützung und motivierende Kaffeepausen.

Diese Arbeit entstandt im Rahmen eines Graduiertenstipendiums der Universität Hamburg.

Literatur

[BH95] W.L. Briggs and V.E. Henson. *The DFT – An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform.* SIAM, 1995.

[Bri95] E.O. Brigham. *FFT – Schnelle Fourier-Transformation.* Oldenbourg, 1995.

[DM72] H. Dym and H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, 1972.

[For86] Forster. *Analysis III.* Vieweg, Braunschweig, 1986.

[Fou88] J.B. Fourier. *Œuveres de Fourier:Thèorie de la chaleur.* Vol. 1, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1888.

[Kle95] R. Klein. Semi-implicit extension of a godunov-type scheme based on low mach number asymptotics i: One dimensional flow. *Journal of Computational Physics*, 121:213–237, 1995.

[Mei97] A. Meister. *Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen.* Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe F: Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 1, 1997.

[Pap62] A. Papoulis. *The Fourier Integral and its Applications.* McGraw-Hill, 1962.

[Pow90] M.J.D. Powell. The theory of radial basis function approximation in 1990. In W. Leight, editor, *Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions*, volume II of *Advances in Numerical Analysis.* Oxford Science Publication, 1990.

[Son97] Th. Sonar. *Mehrdimensionale ENO-Verfahren.* Advances in Numerical Mathematics. B.G.Teubner Stuttgart, 1997.

[SW49] C.E. Shannon und W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication.* University of Illinois Press, 1949.

[VB82] R. Vichnevetsky und J.R. Bowles. *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations.* SIAM, 1982.

[Wal86] P.L. Walker. *The Theory of Fourier Series and Integrals.* John Wiley & Sons Ltd., 1986.

[Wal88] J.S. Walker. *Fourier Analysis.* Oxford University Press, 1988.

[Wen96] H. Wendland. *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger.* PhD thesis, Georg-August-Universität zu Göttingen, 1996.

[Wer95] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, 1995.

[Whi15] E.T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansions of interpolation theory. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 49:169–176, 1915.