

Hamburger Beiträge zur Mathematik

Heft 246

Das kategoriale System und der Ort der Mathematik

Ernst Kleinert

Das kategoriale System und der Ort der Mathematik

von Ernst Kleinert

Zusammenfassung: Ziel dieser Arbeit ist, die Rolle der Mathematik im menschlichen Denken festzustellen. Hierzu wird, in Anknüpfung an Aristoteles und Kant, der Begriff des kategorialen Systems eingeführt und soweit expliziert, wie es für den gesetzten Zweck nötig scheint. Dann wird skizziert, wie mathematische Basisdisziplinen den einzelnen Teilen dieses Systems entspringen.

1. Das Problem des Kategorienbegriffs

1.1. Es war, mit den Worten Kants, ein "eines scharfsinnigen Mannes würdiger Anschlag", als Aristoteles den Gedanken einer philosophischen Kategorienlehre ins Leben rief. Heute müssen wir eingestehen, daß sich die Philosophie im Verfolg dieses Programms festgerannt hat ¹⁾. Die Mängel der aristotelischen Kategorienliste waren immer offenkundig - das Fehlen einer inneren Einheit, einer Systematik, und damit auch eines Kriteriums für die Beurteilung der Vollständigkeit. Einheit und Vollständigkeit glaubte Kant garantieren zu können, indem er seine Kategorien aus einem System möglicher Urteilsfunktionen ableitete. Da dieses (wie er glaubte) dank der Arbeit der Logiker fertig vorlag, schien die Vollständigkeit außer Frage. Die Einheit des Kategoriensystems wird damit zurückgeführt auf die Einheit der Urteilsfunktionen, für welche Kant den kühnen Begriff einer "transzendentalen Einheit der Apperzeption" ersann. Inwieweit die Frage nach der Einheit damit befriedigend beantwortet ist, bleibe dahingestellt; nicht zu übersehen ist aber, daß sich der Begriff der Kategorie durch diese "kopernikanische Wende" verschoben hat. Erscheinen die Kategorien bei Aristoteles als Grundbestimmungen von Dingen, werden sie nun zu Grundbestimmungen unseres Redens von den Dingen, und die von Aristoteles doch offenkundig gemeinte Sachhaltigkeit rückt aus dem Blick; allein die Relationskategorien von Inhärenz und Subsistenz und von Kausalität enthalten einen Reflex von ihr.

1.2. Auf den ersten Blick scheint klar, wie dem zu begegnen sei, nämlich indem man die kantische Kategoriengruppe der Relation einer Neubearbeitung unterzieht, vor allem durch mehrstellige Relationen anreichert, welche zur Wiedergabe der aristotelischen Kategorien geeignet sind; man kann sich vorstellen, daß sich so tatsächlich ein Instrument bilden läßt, dessen Kapazität ausreicht, die gesamte Welterfahrung auf Begriffe zu bringen und theoretisch zu bearbeiten (für den mathematikfähigen Teil der Erfahrung ist dies schon zu großen Teilen geleistet). Aber jetzt erhebt sich die Frage nach dem Sinn des Kategorienbegriffs. Ist es adäquat, die "materialen" Kategorien des Aristoteles unter demselben Titel zu führen wie die "logischen" Kants? Kant hat Kategorien definiert als "Begriffe von einem Gegenstande überhaupt, dadurch dessen Anschauung in Ansehung einer der möglichen logischen Funktionen zu urteilen als bestimmt angesehen wird" ²⁾; wie aus dieser Erklärung hervorgeht und von Kant bei jeder Gelegenheit eingeschärft wird, dürfen Kategorien nur auf Erfahrungsgegenstände angewandt werden, wenn ein "Mißbrauch der Vernunft" vermieden werden soll ³⁾. Aber Quantität und Qualität in

Kants Sinne sind logische Begriffe, die eine *direkte* Anwendung auf Erfahrungsgegenstände gar nicht gestatten; es sind vielmehr die analog bezeichneten, aber *toto coelo* verschiedenen aristotelischen Kategorien des $\pi\omicron\sigma\omicron\nu$ und $\pi\omicron\iota\omicron\nu$, die auf Erfahrung gerichtet sind. Darüber ist Kant sich natürlich im klaren ⁴⁾; er will sagen, daß die gemäß den Kategorien und ihrem Schematismus gebildeten Urteile allein in der Erfahrung ihre ursprüngliche und gründende Bedeutung haben; aber die Urteilsinhalte kommen, wie gesagt, im Kategoriensystem zu kurz. (Kant hat sie natürlich nicht übersehen; er handelt von ihnen im Abschnitt über die „synthetischen Grundsätze des reinen Verstandes“.) In modernen Termini: Kants Tafeln enthalten eine (nichtformale) Vorstufe dessen, was wir heute eine Prädikatenlogik erster Stufe nennen ⁵⁾, und zwar das *allgemeine Schema* einer solchen. Die Sprache, in der wir unsere Erfahrungen ausdrücken, ist aber eine *Spezifikation* dieses Schemas, mit spezifischen undefinierten Prädikats- und Relationsausdrücken von der Art, wie sie Aristoteles aufzählt.

1.3. Einfach zwischen logischen und materialen Kategorien zu unterscheiden, wäre nur dann legitim, wenn es einen gemeinsamen Oberbegriff gäbe; aber es ist schwer zu sehen, wie ein solcher aus der Leere eines allgemeinen "Ausdrucks überhaupt" herauszuheben wäre. Man kann versuchen, die Kategorien gewissermaßen extensional zu definieren, indem man ein Kriterium dafür angibt, wann zwei Ausdrücke zur selben Kategorie gehören sollen. Im allgemeinsten möglichen Rahmen der *ordinary language* scheinen die Bemühungen darum gescheitert zu sein ⁶⁾.

Für das einfachste formale Modell eines Kategoriensystems betrachten wir einen Bereich von Objekten x mit einer Menge von Prädikaten P dieser Objekte (also eine Prädikatenlogik ohne Relations- und Funktionsbegriffe). Ein Kategoriensystem für diese Gegebenheiten besteht dann einfach aus einer Partition der Prädikatenmenge, und eine Kategorie ist eine der partitionierenden Mengen. Demnach kommen Kategorien zunächst nicht Objekten zu, sondern Prädikaten. Man kann dann aber definieren: einem Objekt kommt die Kategorie K zu, wenn ihm wenigstens ein Prädikat zukommt, das zu K gehört; dem Tisch kommt die Kategorie „Farbe“ zu, weil er braun ist. Die Alltagssprache enthält Teilbereiche, auf die sich dieses Modell anwenden läßt, ist aber im Ganzen viel zu komplex für ein so simplistisches Verfahren. Das Hauptproblem ist, daß die meisten Prädikate nicht für alle Objekte definiert und viele Sätze „ x ist P “ nicht falsch, sondern *sinnlos* sind; Sinn und Unsinn zu scheiden, ist geradezu die *raison d' être* des Kategorienbegriffs. Ein weiteres Problem entsteht dadurch, daß Prädikate bei der Anwendung auf verschiedene Objekte ihre Bedeutung verschieben können (wie schon Platon mit dem Begriffspaar „guter Dieb - guter Mensch“ illustriert hat).

Andererseits sind "regionale" Kategorien umso leichter festzustellen, je schärfer gefaßt und umgrenzt die jeweilige Region bereits ist; im Grenzfall liegt eine axiomatische Theorie vor, und dann sind die Kategorien einfach die undefinierten Grundbegriffe. Aber hier ist auch das philosophische Interesse erloschen; wo eine Theorie axiomatisiert wird, ist die eigentliche Denkarbeit schon geleistet, nämlich die Ordnung der Grundbegriffe, und es beginnt die fachwissenschaftliche Ausarbeitung, an der Philosophie kaum Anteil nehmen kann.

So betrachtet wäre eine "axiomatische Kategorienlehre" ein Widersinn. Eine solche kann aber den auch philosophisch wertvollen Zweck haben, eine bestimmte Ordnung von Grundbegriffen als "adäquat" oder "zulässig" zu erweisen, indem durch ihre Entfaltung demonstriert wird, daß sie das Erfahrungsganze darzustellen und zu strukturieren fähig ist. In gewissem Sinne wird in solchen Systemen das Verfahren der (mathematischen) Naturwissenschaft auf die Philosophie übertragen. Der wohl bedeutendste solche

Versuch ist A.N.Whiteheads "Process and Reality". Logisch stringenter, aber in engerem Rahmen gehalten ist R.Chisholms "A Realistic Theory of Categories". Bei allen Einsichten, die solche Theorien enthalten, werden sie dem Philosophen doch keine letzte Befriedigung bieten. Er kann sich nicht damit begnügen, daß ein Begriffssystem "funktioniert", sondern er muß nach Fundierung in der Erfahrung fragen. Siehe auch KrV B 758 über die notwendige Verschiedenheit der philosophischen von der mathematischen Methode.

1.4. Die Frage bleibt, ob es zwischen der Preisgabe des Kategorienbegriffs und seiner Trivialisierung ⁷⁾ einen gangbaren Mittelweg gibt. Einen solchen zu suchen, ist der Mühe wert; der Begriff ist, wie mir immer noch scheint, zu wertvoll, als daß man ihn einem frei vagierenden oder nur noch antiquarischen Gebrauch überlassen sollte. Einen Mittelweg vorzuschlagen, ist erstes Ziel dieser Arbeit. Ist er gangbar, ergibt sich eine natürliche Antwort auf die Haupt- und Grundfrage der Philosophie der Mathematik, nämlich die Frage nach der Stellung der Mathematik im Ganzen des theoretischen Agierens. Das Folgende beansprucht nicht, neue Einsichten vorzutragen (es kommt selten vor, daß auf diesem Gebiet etwas entdeckt wird), sondern versteht sich eher als Vorschlag zur Sprachregelung; es geht um die adäquate Disposition dessen, was jedem vor Augen liegt.

Wer das für eine untergeordnete Aufgabe hält, sei an eine Ausführung von Konfuzius erinnert (Gespräche, Buch XIII): "Wenn die Begriffe nicht richtig sind, so stimmen die Worte nicht; stimmen die Worte nicht, so kommen die Werke nicht zustande; kommen die Werke nicht zustande, so gedeihen Kunst und Moral nicht; gedeihen Kunst und Moral nicht, so treffen die Strafen nicht; treffen die Strafen nicht, so weiß das Volk nicht, wohin Hand und Fuß setzen. Darum Sorge der Edle, daß er seine Begriffe unter allen Umständen zu Worte bringen kann und seine Worte unter allen Umständen zu Taten machen kann. *Der Edle duldet nicht, daß in seinen Worten irgendetwas nicht in Ordnung ist.* Das ist es, worauf alles ankommt." ⁸⁾

2. Vorbemerkungen

Aus dem einleitend Gesagten ergibt sich als Programm, die von Aristoteles angestrebte Sachhaltigkeit im Rahmen einer Transzendentalphilosophie zu entwickeln. Als handlicher Rahmenbegriff dient uns der Begriff des *kategorialen Systems*. Damit bezeichne ich die Gesamtheit der menschlichen Vermögen, Welt zu erfassen, sich begrifflich auf sie zu beziehen und in theoretischer Aktion zu bearbeiten. *Sehr* grob betrachtet, entspricht dies der kantischen Dreiteilung von Anschauungsformen, Verstandesbegriffen mit ihrem Schematismus und regulativen Ideen.

Gegen diese Begriffsbildung kann eingewendet werden, daß das κατηγορεισθαι erst mit den Begriffen anfangt. Es ist klar, daß es viel Erfassen gibt, das nicht zum Begriff gelangt, etwa wenn man schnell reagieren muß, wie beim Kampfsport; man kann aber auch an den Schachspieler denken, der eine Stellung analysiert und nicht mit Begriffen operiert, sondern mit vorgestellten Zügen und Positionen. Andererseits aber auch solches, bei dem die Dinge spontan und reflexionslos zu Worten kommen, etwa wenn man einen Vorgang beobachtet und seine Beobachtungen laufend einem Andern mitteilt, die Welt also gewissermaßen abliest. Die Grenze ist nicht klar; man gestatte mir die Vereinfachung.

Dieses System zu beschreiben (unter welchem Titel auch immer), ist offensichtlich eine Grundaufgabe der Philosophie. Die dabei befolgte Methode kann, besonders bei den Vermögen des Erfassens, keine andere sein als die phänomenologische – schlichtes Achten auf das Begegnende. Für die hier verfolgte Absicht, den „logischen Ort“ der Mathematik zu bestimmen, genügt ein grobes und nur teilweise ausgeführtes Raster.

Wenn wir etwa ohne weitere Qualifikation vom Raum reden, so ist das bereits ein abstractum, welches im realen Erleben als eine Art Überlagerung eines Seh-, eines Tast- und eines Hör-raums erscheint, und das sind bei weitem nicht alle Aspekte der Raumerfahrung⁹⁾. Wir werden unten (17) einige Betrachtungen anstellen über das, was für die Konstitution von Mathematik wenigstens vorderhand vernachlässigt werden kann.

Der Vorwurf der Phänomenologie gegen die wissenschaftliche Weltauffassung ist, daß diese die Daseinsfülle, in welche eingebettet wir leben, auf ein Aggregat von Einzeldingen reduziert. Der primäre phänomenologische actus ist, den Blick für die dabei vernachlässigten Ganzheiten zurückzugewinnen, ihre Eigenart, Gesetzlichkeit und Bedeutung. Nun ist dieses Ganzheitliche nie wirklich aus dem Blick geraten, sondern blieb immer Thema von Literatur und Kunst. Es kam zunächst freilich zu kurz in einem Denken, welches unter der Nötigung der *conditio humana* danach trachten mußte, der Dinge Herr zu werden, und dabei die Entdeckung machte, daß es mit Einzeldingen besser zurechtkommt als mit Ganzheiten; woraus sich die methodisch vernünftige Folgerung ergibt, das Ganze vom Einzelnen her anzugehen. Die Wissenschaft ist angetreten mit dem erklärten Anspruch, alle hinreichend deutlich aufweisbaren Phänomene in ihre Lehrgebäude einzubauen. Daß irgendetwas Wichtiges dabei dauerhaft ausgeschlossen bleiben müsse, ist eine leere Behauptung, denn seit Demokrit hat sie oft genug bewiesen, daß sie zu „Revolutionen der Denkart“ fähig ist, wenn die Sache es verlangt. Die Maxime Goethes: „Man suche nur nichts hinter den Phänomenen, sie selbst sind die Lehre“¹⁰⁾ kann sich nur leisten, wer den Weg der Wissenschaft zu Ende gegangen ist. Vom Ganzen in seiner Fülle muß jede philosophische Selbstvergewisserung ausgehen, aber sie kann nicht dabei stehenbleiben, denn jeder Begriff ist qua Begriff schon eine Aufhebung des Ganzen.

Wie die gesamte Tradition betrachten wir hier das kategoriale System so, wie es sich der Reflexion des "normalen" Erwachsenen darbietet. Seine Ontogenese wird nicht herangezogen, obwohl deren Verständnis ohne Zweifel weitere und vielleicht entscheidende Aufschlüsse gewähren würde, vor allem für die Herausbildung der Subjekt-Objekt-Position¹¹⁾. Weiter versteht sich, daß hier immer nur von der gewöhnlichen Wacherfahrung die Rede ist; schon die Traumerfahrung zeigt abweichende Strukturen.

3. Die Erfahrungsformen

3.1. Alles Erfassen und Erfahren vollzieht sich in Raum und Zeit. Aus der Grunderfahrung (mit Heidegger dem "Existential") des In-Seins entspringt jeder reflektierte Begriff von Raum als dem, worin wir uns mit unserer Welt befinden; aus dem Existential des Sich-Vorweg-Seins entspringt jeder reflektierte Begriff von Zeit als dem Medium dieses Vorwegseins. Man könnte die Zeit die "Erlebnisform", den Raum die "Form des Vorhandenseins" und beide gemeinsam die "Formen der Erfahrung" nennen.

Raum und Zeit als "Anschauungsformen" zu bezeichnen, ist schlechte Terminologie. Das Anschauen vollzieht sich in der Zeit, teilt aber diese Eigenschaft mit allem Tun und hat zur Zeitlichkeit kein privilegiertes Verhältnis. Die Anschauung des Raums (besser: der Gegenstände im Raum) durch den Gesichtssinn negiert gerade das Räumliche, indem sie es in ein zweidimensionales Sehfeld übersetzt. In gewissem Grade können wir zwar (durch die Binokularität) "räumlich sehen", aber trotzdem bleibt die Abbildung wesentlich Projektion, wie sich an der simplen Tatsache zeigt, daß ein Gegenstand einen andern verdecken kann.

3.2. Unsere Befindlichkeit im Raum ist eine andere als die in der Zeit, in fundamentaler Asymmetrie, die offenkundige und weniger offenkundige Seiten hat und auf die wir zunächst eingehen wollen. Der Weltprozeß hat, in einem naheliegenden mathematischen Modell, zum Schauplatz eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, nämlich ein triviales (?) Raumbündel über einer eindimensionalen Zeit; ein Weltzustand ist dann realisiert in einer Faser über einem Zeitpunkt, und der eigentliche Prozeß ist das Durchlaufen der Zustände. Diese Beziehung kann nicht umgekehrt werden. Im Raum können wir uns (mehr oder weniger) willkürlich bewegen, auf das Durchlaufen, das Verstreichen der Zeit haben wir keinen Einfluß, so daß wir zu verschiedenen Zeitpunkten an derselben Raumstelle, aber nicht zum selben Zeitpunkt an verschiedenen Stellen sein können. Unsere Wahrnehmung erfährt immer nur einen Ausschnitt aus *einer* Faser; alle unsere Sinne sind zeitlich lokal (sinnlich erfährt wird immer nur, was *jetzt* ist) und damit auf die Erfassung von Zuständen angelegt ¹²⁾.

Was wir wahrnehmen, ist genauer ein „Zustand mit Tendenzen“, mathematisch: partiellen Ableitungen in verschiedenen Richtungen. Räumlich lokal sind nur Tast- und Geschmackssinn; jede "Momentaufnahme" unserer Sinne erfährt durch Geruch und Gehör eine ganze Umgebung der Stelle, an der wir uns befinden, durch das Gesicht einen kegelförmigen Ausschnitt aus dem vor uns liegenden Raum.

Daher geht unser theoretisches Agieren naturgemäß von dem aus, was *ist*, und sucht seinen "internen Zustand" und dessen Veränderung zu begreifen; gewöhnlich beschreiben wir Prozesse als Veränderung von Gegenständen, wobei Veränderung als Aufeinanderfolge von Zuständen gedacht wird.

3.3. Der *ontologische* Aspekt der fundamentalen Asymmetrie tritt hervor, wenn wir hier umzukehren versuchen. Die Wahrnehmung, daß alles, was wir erfahren, sich dauernd verändert (wenn auch in verschiedenen Zeitmaßen) und kein Zustand je ganz unverändert wiederkehrt, scheint die Möglichkeit zu eröffnen, die Gesichtspunkte umzukehren und die Gegenstandsbegriffe aus Prozeßbegriffen zu entwickeln; ja es erscheint dies sogar als die angemessenere Betrachtungsweise. Jedoch wird die erste Option von unserer kategorialen Organisation entschieden bevorzugt, eben infolge der fundamentalen Asymmetrie. Wir nehmen in der Regel wahr, daß Zustände aufeinander folgen und ineinander übergehen; wie der Film demonstriert, können wir eine genügend schnelle Abfolge von Zuständen von einem kontinuierlichen Prozeß nicht unterscheiden ¹³⁾. Seltener ist die „umgekehrte“ Beobachtung, daß sich aus Prozessen des Übergehens Gegenstände hervorgehen, die vorher nicht vorhanden waren (etwa wenn Wolken sich zu Figuren bilden und wieder umbilden); das jedoch wäre der Weg, den eine konsequente "Prozeßontologie" zu beschreiten hätte. In (quasi-) aristotelischen Termini: wir fassen den Prozeß als Akzidens der Substanz, als das, was mit der Substanz geschieht, obwohl das Umgekehrte, rein logisch betrachtet, ebenso möglich ist - Substanzen als Akzidentien der Prozesse, etwa als Durchgangsformen. So suggeriert das kategoriale System die Bevorzugung des Substanzbegriffs, des Schemas "S ist p" für die (elementaren) Urteile, an dem auch Kant festhielt, obwohl er sich über den Relationscharakter aller Erkenntnis vollkommen im klaren war ¹⁴⁾.

Man kann immerhin über das theoretische Agieren von Wesen spekulieren, bei denen die "fundamentale Asymmetrie" sozusagen andersherum vorliegt, die also nicht, wie wir, den Weltprozeß in Schnitten senkrecht zur Zeit erfassen, sondern in Trajektorien. Sie müßten aus dem unmittelbar erlebten Prozeß die

Zustände erschließen, also das, was zeitlich lokalisiert, aber räumlich ausgedehnt *der Fall ist*; wir müssen aus wahrgenommenen Zuständen die Entwicklung erschließen, also das, was räumlich lokalisiert, aber zeitlich ausgedehnt *sich ereignet*. Was wäre wohl die Logik solcher Wesen? - Eine banale, aber fundamentale Tatsache ist in diesem Zusammenhang zu bemerken: das Tempo des Denkens ist viel größer als das der Veränderung unseres Gesamtzustands; wäre das anders, wäre gar kein Vorausdenken möglich, das theoretische Agieren würde den Ereignissen immer hinterherlaufen (was freilich oft genug der Fall ist).

3.4. Der *erkenntnistheoretische* Aspekt der fundamentalen Asymmetrie ist, daß wir Veränderung erst "verstehen" müssen, etwa um in sie einzugreifen oder sie vorausszusagen. Während wir den Zustand "passiv" erfahren, oft genug sogar als einen aufgezwungenen, verlangt uns das Verstehen in aller Regel eine Anstrengung ab, und ihm gilt ein großer Teil des theoretischen Agierens. Fast nie kann ja die "wahre Ordnung der Dinge" aus den Dingen, so wie sie sich geben, einfach abgelesen werden. In wichtigen Fällen müssen Fiktionen wie "Kraft" oder "Trieb" eingeführt werden, die nie selbst in den Phänomenen aufweisbar sind, sondern sich nur durch ihr Potential zur Erfahrungsordnung bewähren ¹⁵⁾. Ein prominentes Beispiel und eines der wichtigsten Mittel, mit dem wir Ordnung herzustellen suchen, ist der Begriff der Kausalität; wovon bekanntlich schon Hume wußte, daß er nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden kann. Kausalität hat darum ebenfalls den Rang des Kategorialen, ist aber in unserer Terminologie keine Kategorie, sondern gehört zu den apriorischen Formen des theoretischen Agierens ¹⁶⁾.

4. Vorschlag eines neuen Begriffs von Kategorie

4.1 Wenn wir unsere momentane Befindlichkeit nach allen denkbaren Hinsichten mustern und katalogisieren wollen, gewahren wir, deutlich unterscheidbar, wenn auch nicht präzise trennbar, einen äußeren und einen inneren Teil. Den äußeren erfassen wir durch Sinnesorgane, den inneren in mehr direkter Art. Wir gehen zunächst auf den äußeren Bereich ein.

4.2. Wenn wir in Worte fassen wollen, was uns die äußeren Sinne, jeder für sich genommen, vermitteln, stoßen wir auf gewisse Grundmerkmale, die *ausnahmslos* allem, was durch den jeweiligen Sinn vermittelt wird, eignen, bezüglich derer alles Vermittelte eine gewisse feste Bestimmung aufweist und die darum für jede *adäquate* Beschreibung des Vermittelten indispensable sind, die aber selbst, innerhalb des Rahmens der Phänomene, nicht auf andere Merkmale zurückgeführt werden können. Ich schlage vor, diese Grundmerkmale Kategorien der äußeren Sinne zu nennen.

Genauer natürlich: die Kategorien sind die Begriffe, mit denen wir diese Merkmale bezeichnen. Es ist zu fragen, ob durch die oben gegebene Definition eine Klasse von Begriffen eindeutig ausgesondert wird; das Problem ist hier die Bedeutung des Ausdrucks „Rückführung im Rahmen der Phänomene“. Siehe auch (7) unten.

In Abwandlung der kantischen Definition läßt sich dann sagen: diese Kategorien sind Begriffe von einem Gegenstand überhaupt (Gegenstand von Erfahrung im Sinne raumzeitlichen Erfassens), wodurch die Erfahrung von ihm hinsichtlich einer der möglichen Weisen des Erfassens bestimmt wird. Sie entsprechen unseren Möglichkeiten, Gegenstände zu erfassen, und bezeichnen die Grundhinsichten, unter denen Erfasstes zu

Begriff kommt und beurteilt werden kann. Jeder Gegenstand der Erfahrung ist demnach in jeder dieser Hinsichten (soweit sie überhaupt in Betracht kommen) bestimmt, die Erfahrung ist, wie man sich ausdrücken könnte, stets "kategorial gesättigt"; wenn auch unsere Aufmerksamkeit stets nur auf einzelne Hinsichten gerichtet sein kann.

Kant gibt als Beispiel für die von ihm postulierte „reine“ Anschauung die Vorstellung eines Körpers, bei der von allen Eigenschaften außer Ausdehnung und Gestalt abstrahiert ist (KrV B 35). Aber in Anschauung oder Vorstellung kann man nicht abstrahieren; der vorgestellte Körper hat immer auch eine Farbe oder wenigstens Helligkeit, durch die er sich vom ebenfalls in der Vorstellung enthaltenen Hintergrund abhebt, und weist Abschattungen auf, die seine Gestalt erst erkennen lassen. Die Abstraktion kann von der Vorstellung ausgehen, aber sie findet nicht in ihr statt.

Am Prinzip der kategorialen Sättigung scheitert auch der „ideal-phänomenologische“ Zugang, den Goethe so beschreibt: „Am wünschenswertesten wäre jedoch, daß man die Sprache, wodurch man die Einzelheiten eines gewissen Kreises bezeichne, aus dem Kreise selbst nähme, die einfachste Erscheinung als Grundformel behandelte und die mannigfaltigern von daher ableitete und entwickelte“ (Zur Farbenlehre, § 755). Auch die einfachste Erscheinung ist nichts kategorial Einfaches; wir sehen keine Farben, sondern farbige Gegenstände, keine Gestalten, sondern gestaltete Gegenstände usw.

Wir gehen nun (wie es Aristoteles im zweiten Buch seiner Schrift über die Seele tut) durch die einzelnen Sinne und versuchen, die Grundmerkmale des durch sie Vermittelten, also die Kategorien festzustellen.

4.2.1. Der Sehsinn vermittelt uns (physische) Gegenstände in bestimmten Anzahlen und Konstellationen. Jeder einzelne Gegenstand hat eine bestimmte Gestalt und bestimmte Ausdehnungen in jeder Richtung (als Länge, Breite, Durchmesser oder ähnlich). Die Gestalt ist, für sich genommen, von Ausdehnung unabhängig, indem sie bei Schrumpfung oder Streckung dieselbe bleibt. Sie wird aber oft bestimmt durch Ausdehnungsverhältnisse (Proportionen) ihrer Teile; so zeichnet man etwa Quadrate unter beliebigen Rechtecken aus. Ausdehnung ist daher eine selbständige Kategorie.

Mathematisch läßt sich sagen: Gestalt ist ein *projektiver* Begriff; jede Einzelgestalt ist Element einer projektiven Mannigfaltigkeit, die lokal durch Funktionenräume zu beschreiben wäre. Es ist grob falsch, Gestalt als Größe anzusehen, wie es Aristoteles De An. 425a17 tut (*μεγεθος γαρ τι το σχημα*); so entgeht ihm diese ganze Kategorie. Die Inder hingegen kannten sie unter dem Namen *rupa* als eins der fünf Seinselemente ^{16a}.

Die Begriffe von Konstellation und von Gestalt lassen sich nicht trennen. Konstellationen von Gegenständen kann man als "höherstufige" Gestalten ansehen (mehr formal als unzusammenhängende Gestalt), so wie die Säulen eines Rundtempels einen Kreis bilden; Gestalt wird oft definiert als bestimmte Konstellation ihrer Teile (wie menschliche Gestalt), aber nicht immer.

Den fließenden Übergang von Gestalt zu Konstellation verdeutlicht das Beispiel eines Sterns: denkt man sich seine Zacken immer schmäler und länger, entsteht zum Schluß ein Büschel von Linien; denkt man sie immer flacher und breiter, entsteht ein Kreis, den man nicht als Konstellation von Teilen begreifen kann. Gestalt wird in dem Maße als "Einheit", als nicht durch Konstellation von Teilen erzeugt wahrgenommen, je "konvexer" sie ist (konvex: mit je zwei Punkten liegt auch die Verbindungsstrecke innerhalb der Gestalt). Ein Maß für die Abweichung von der Konvexität ist das Integral des Abstands von der konvexen Hülle, genommen über gesamte Oberfläche.

Gestalt erscheint so als der allgemeinere Begriff, Konstellation als der phänomenologisch frühere. Weiter zeigt jeder Gegenstand an jeder Stelle eine bestimmte Farbe; jeder Farbton erscheint in einer bestimmten Intensität. Als Kategorien erhalten wir Gestalt (Konstellation), Farbe, Ausdehnung und Anzahl.

4.2.2. Die Bestimmung des Erfassten in Hinblick auf Ausdehnung, Anzahl und Farbintensität reduziert sich auf die einer einzigen Größe, nach der mit "wie groß" ("wie hoch, lang" usw.), "wieviele" oder "wie sehr" gefragt werden kann. Die Grundhinsicht des "mehr oder weniger", welche, wie sich weiter zeigen wird, alles Erfasste in irgendeiner Form aufweist, nennen wir *Quantität*; der Sehsinn zeigt sie also schon in ihren drei Erscheinungsformen der diskreten, der extensiven und der intensiven Quantität.

Zur Unterscheidung von extensiver und intensiver Quantität siehe KrV B 203f und 208ff. Extensive Quantität ist additiv, intensive jedenfalls nicht im selben Sinn (zwei zusammengehaltene Kerzenflammen ergeben keine höhere Temperatur als eine von ihnen); intensive Quantität wird instantan erfaßt, extensive kann zu ihrer Wahrnehmung einen gewissen Zeitraum erfordern. Mathematisch Maßgebliches enthält ein Aufsatz von Lawvere¹⁷⁾. Typische extensive Quantität wird demnach durch ein Maß auf einem Meßraum gegeben, intensive Quantität durch eine meßbare Funktion auf dem Raum. Extensive Quantität verhält sich kovariant (unter Morphismen von Meßräumen), intensive kontravariant. Siehe auch 12.

Quantität ist also ein abstractum aus verschiedenen Grundmerkmalen von Erfahrung, die auf den ersten Blick miteinander nichts zu tun haben; es ist die Ähnlichkeit ihrer formalen, also mathematisierbaren Eigenschaften, sodann die weitgehende (naturwissenschaftliche, nicht phänomenologische) Rückführbarkeit aller Quantität auf Zahl, die zur Zusammenfassung Anlaß geben. Demnach ist Quantität keine Kategorie im hier vorgeschlagenen Sinn; Kategorien sind lediglich die oben genannten (und die noch folgenden) Instanzen von Quantität.

Vielleicht läßt sich sagen: Gestalt, Farbe und Ausdehnung sind *primäre* Abstraktionen, sie werden vom Gegenstand selbst ausgesagt; Quantität ist eine *sekundäre* Abstraktion und wird vom Gegenstand nur nach Spezifikation einer Kategorie ausgesagt, bezüglich derer die Quantität vorliegt. Man kann sagen: der Tisch ist rund und braun, aber die Quantität 80 cm kommt ihm erst bezüglich einer bestimmten Ausdehnung zu, etwa Höhe.

4.2.3. Der Tastsinn vermittelt zunächst die Erfahrung von Stoff (im engeren Sinn, griechisch $\upsilon\lambda\eta$). Jeder getastete Stoff läßt eine bestimmte Widerständigkeit spüren (mit den Polen "hart" und "durchlässig") und eine bestimmte Temperatur. Es ist nur durch die Widerständigkeit "hindurch", daß wir Stoff tasten (und nicht selten identifizieren). Sie ist darum die eigentliche Kategorie im oben umrissenen Sinn, während "Stoff" ein abstractum ist. Die Widerständigkeit wird aktiv (als Festigkeit) und passiv (als Druck) erfahren, wir treffen auf den Stoff oder er auf uns.

Der getastete Gegenstand weist noch eine bestimmte Beschaffenheit der Oberfläche auf, eine haptische Qualität, die man "Fühligkeit" nennen könnte, mit den Polen "glatt" und "rauh". Es fragt sich, ob hier eine selbständige Kategorie vorliegt; jedenfalls ist der Übergang zur getasteten Gestalt fließend. Die Fühligkeit ist von der Widerständigkeit nicht unabhängig, insofern diese nicht zu klein sein darf, damit wir überhaupt rau und glatt unterscheiden können. Eine Mathematik für "Gestalt im Kleinen und Kleinsten" ist die fraktale Geometrie (deren mathematisches Interesse freilich erst im Aktual-Unendlichen erwacht, also jenseits aller Erfahrbarkeit). Auch die Unterscheidung von Feucht und Trocken ist dem Tastsinn anvertraut (De An. 422 b); auch hier ist mir nicht klar, ob eine eigene Kategorie nötig ist.

Der Tastsinn ist nicht auf die Hände beschränkt, sondern hat seinen Sitz prinzipiell auf der ganzen Körperoberfläche, und sein Organ ist das ausgebreitetste von allen, die Haut. Beide Kategorien, Widerständigkeit und Temperatur, weisen Quantität auf, die nach Kant als intensiv anzusehen ist, weil ihre Empfindung sich nicht aus Teilen zusammensetzt. Die von Temperatur physikalisch zu unterscheidende Wärmemenge dagegen ist extensiv; phänomenologisch sind beide schlecht trennbar, weil jeder Kontakt sofort einen Austauschprozeß in Gang setzt. Analog Kraft, als Druck über Fläche.

Die Wahrnehmung von (äußerer) Temperatur dem Tastsinn zuzuordnen, ist sicher anfechtbar; die Alternative wäre, einen eigenen Sinn einzuräumen. Auch für den Luftdruck (die Zustandsgröße, nicht einzelne Drücke) ist ein Teil der Haut empfänglich, nämlich das Trommelfell. Spürbare Änderungen sind aber hier selten (und wir vertragen nur ganz geringfügige), so daß diese Art Sinneswahrnehmung kaum in Erscheinung tritt.

4.2.4. Für das, was uns Geruchs- und Geschmackssinn vermitteln, haben wir keine andern Allgemeinbegriffe als wiederum „Geruch“ und „Geschmack“. Der Sinn wird also mit der Kategorie selbst bezeichnet, worin zum Ausdruck kommt, daß diese Sinne beim Menschen weniger entwickelt und darum weniger bedeutsam sind. Die Unterscheidung von intensiver und extensiver Quantität ist ähnlich wie bei der Temperatur schlecht ausgeprägt.

4.2.5. Durch den Hörsinn schließlich erfahren wir (idealiter) Töne, ihre Verbindung zu Klängen und, schließlich und meistens, ihre Vermischung und Entartung zum Geräusch, das freilich als Laut größte Bedeutung gewinnen kann. Als Oberbegriff und Kategorie könnte man "Schall" nehmen. Auch hier erfahren wir extensive und intensive Quantität, jene als Lautstärke, diese als Tonhöhe. Der Hörsinn vermittelt auch Räumlichkeit, sogar eindringlicher als der Gesichtssinn, weil der Blick in jedem Moment nur in *eine* Richtung geht, das Hören aber nicht; man kann besser stereophonisch hören als perspektivisch sehen. Dafür läßt das Hören die Richtung, aus welcher das Wahrgenommenen kommt, weniger deutlich erkennen als das Sehen.

Wir haben den Hörsinn zuletzt angeführt, weil das durch ihn Vermittelte zu den Gegenständen einen andern Bezug hat, als dies bei dem durch die andern Sinne Vermittelten der Fall ist. Gestalt, Farbe usw. beziehen wir in der Regel auf einzelne Gegenstände, als deren Eigenschaften. Der Schall aber, der von einem Körper ausgeht, entsteht aus ihm durch eine bestimmte Einwirkung; er ist keine Eigenschaft des Körpers, sondern eine Wirkung des ihn umgebenden Weltbetriebs, der den Körper als Instrument benutzt.

Die Orgelpfeife tönt nur, wenn sie angeblasen wird, aber ihre Farbe zeigt sie immer. Dieser phänomenologische Unterschied ist für unser Dasein bedeutsam, wir leben in der Farbwelt anders als in der Schallwelt (zum Beispiel ist Wegsehen leichter als Weghören). Die Wissenschaft ebnet den Unterschied ein: auch die Farbe sehen wir nur dann, wenn das Tageslicht vom Metall der Pfeife reflektiert wird.

In der Beschallung, der wir durchgehend ausgesetzt sind, verschmelzen Einzelwahrnehmungen, die oft kaum identifizierbar sind, zu einem Grundcharakter von Zuständlichkeit. Wenn etwa auf See der Wind rauscht, können wir kaum einzelne

Gegenstände nennen, von denen das Rauschen ausgeht, sondern das Rauschen umgibt uns wie der Raum. Wir befinden uns ständig in einem "Geräuschraum", der nie ganz leer ist, durch den hindurch wir mit dem physischen Raum in Kontakt stehen (und der zusammen mit dem Tastraum dem Blinden den Sehraum ersetzt).

4.2.6. Bis hierher haben wir nur aufgelistet, was uns die einzelnen Organe in "Momentaufnahmen" geben, genauer in Erfahrungsausschnitten, bei denen zeitliche Gliederung nicht in Betracht kommt (streng "momentanes" Erfassen gibt es natürlich nicht, wie es auch von einem mathematischen Punkt keine Anschauung gibt). Tast- und Hörsinn aber zeigen den andern Sinnen gegenüber die Besonderheit, daß wichtige kategoriale Leistungen erst in mehr oder weniger ausgedehnten, jedenfalls zeitliche Einteilung aufweisenden Zeitabschnitten zustande kommen¹⁸⁾. Erst durch fortgesetztes Tasten können auch Ausdehnung und Gestalt erfaßt werden und mit ihr Räumlichkeit im vollen Sinn; der Tastsinn, nicht der Gesichtssinn erweist sich so als das eigentliche Organ der Gestalt- und Raumerfahrung; einen Kiesel mit der Faust zu umschließen, ist beinahe unsere einzige Möglichkeit, einen Gegenstand in seiner raumerfüllenden Totalität in *einer* Wahrnehmung zu erfassen. Der Tastsinn ist damit auch (da Farbe eine vergleichsweise untergeordnete Bedeutung hat) der kategorial am reichsten ausgestattete unter den Sinnen, hat freilich dem Gesichtssinn gegenüber den entscheidenden Nachteil der Lokalität; so daß dieser der am wenigsten entbehrliche und damit auch der bevorzugte ist, wie schon Aristoteles vermerkte¹⁹⁾. Nichtlokal ist wie der Gesichtssinn auch der Hörsinn, dessen wichtigste Leistungen erst in gegliederten Zeitabschnitten zustandekommen. So wie Gestalt räumliche Ausdehnung voraussetzt, ist alles bedeutungsvolle Hören nur in Zeiträumen möglich; eine Melodie ist das zeitliche Analogon zur räumlichen Gestalt, ein gesprochener Satz eine zeitliche Konstellation von Lauten, wobei Gestalt und Konstellation noch weniger als im Räumlichen getrennt werden können.

4.3. Wir haben nun unsere Vermögen durchmustert, die äußere Welt zu erfahren, und dabei eine Reihe von Kategorien angetroffen; jeder Sinn steuert wenigstens eine nur durch ihn erfahrbare Kategorie bei. Eine umfassende Darstellung des kategorialen Systems darf natürlich die innere Welt nicht vernachlässigen; sie ist ebenso wie die äußere Ursprung von Erfahrung und theoretischem Agieren, und zwischen beiden besteht keine scharfe Grenze. So haben Tast- und Hörsinn auch eine "innere" Seite, Gefühle andererseits erscheinen als nicht notwendig auf den Innenraum eingeschränkt, sondern oft in einer außerleiblichen Erstreckung räumlichen Charakters²⁰⁾. Demnach gibt es weitere Kategorien, erstens für die Wahrnehmung des eigenen Körpers, für Schmerz, Hunger und andere Bedürfnisse oder Zustände, sodann für die Gefühle im engeren Sinne, die Affekte, schließlich für mentale Zustände wie Erwarten und Hoffen.

Das Prinzip der "kategorialen Sättigung" bleibt auch hier in Geltung; unsere Gesamtbefindlichkeit ist stets nach "außen" und nach "innen" durchgängig bestimmt, zu jedem Zeitpunkt befinden wir uns in irgendeiner Stimmung, haben eine bestimmte Körperempfindung und diese oder jene Intentionen. Jedem ist bekannt, wie sehr die Wahrnehmung des Äußeren vom Inneren beeinflusst werden kann, etwa durch bestimmte Erwartungen. Es ist vielleicht der größte Skandal der Philosophie, daß diese

Verschränkung von *res extensa* und *res cogitans*, die wir jederzeit an uns selbst, in unserem Leib wahrnehmen, noch immer nicht adäquat begriffen ist. Wir gehen auf all dies nicht weiter ein, weil uns das kategoriale System hier nur im Hinblick auf die ihm entspringende Logik und Mathematik interessiert, die Kategorien der inneren Sinne aber dafür nichts hergeben.

Übrigens erscheint paradox, daß sich für die inneren Sinne, trotz der unvermittelten Weise ihres Gegebenseins, die für Zweifel oft keinen Raum läßt, noch kein allgemein akzeptiertes Kategoriensystem herausgebildet hat; offenbar ist es gerade diese Distanzlosigkeit, die den Zugriff erschwert.

Schließlich spricht man von "Sinn" oft in weiteren Bedeutungen, die sich, wenn auch nur in komplizierter Weise, durch die "fundamentalen" Sinne definieren lassen, wie Gleichgewichts- und Orientierungssinn. Ganz allgemein: "Einen Sinn für etwas haben" - wie wenn jemand ein besonderes Organ besäße, wo andere theoretisch agieren müssen.

5. Das theoretische Agieren

Das eigentlich theoretische Agieren beginnt mit dem Urteil, dessen Formen und Funktionen die Logik katalogisiert hat (wie wir heute mit besserem Recht behaupten können als zu seiner Zeit Kant) und die wir hier nicht aufzählen müssen. Seine höheren Stufen, die von den elementaren Urteilen ausgehenden Prozesse des Ordnen, Folgerns und Erschließens, vor allem der begrifflichen Konstruktion, entziehen sich, zumindest in ihrer Gesamtheit, dem systematisierenden und klassifizierenden Zugriff, nicht allein wegen der unbeherrschbar werdenden Komplexität, sondern auch wegen der unausweichlich einsetzenden Selbstreferenz. Schon ein sehr bescheidener Vorrat von Grundbegriffen reicht aus, im Verein mit den gewöhnlichen Urteilsformen theoretische Gebäude zu errichten, die in einem präzisierbaren Sinne nicht mehr vollständig beschrieben werden können ²¹⁾. Leitender Gesichtspunkt ist stets, wie Kant in seinen Ausführungen zum "regulativen Gebrauch der Ideen" dargelegt hat, derjenige der Einheit, und zugleich mit der Einheit die größte Mannigfaltigkeit unter ihr; was uns aber als einheitstiftend dienen kann und wie wir dazu gelangen, ist durch Entscheidungen der Geschichte mitbedingt und entzieht sich vollständiger formaler Erfassung. Jedenfalls gehört es zu den Aufgaben des theoretischen Agierens, solche Begriffe bereitzustellen, und mit ihnen natürlich die Erklärung, wie sie die erstrebte Einheit bewirken; einige Grundverfahren dazu werden wir unten besprechen (14 ff; siehe auch 3.4. oben). Die Erklärung kann die Form einer strengen Deduktion haben, wie in der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft; in andern Fällen besteht sie lediglich in einer mehr oder weniger befriedigenden oder brauchbaren Zuordnung von Begriffen und Erfahrungen; und manchmal sind wir froh, wenn wir überhaupt eine - wenn auch noch so vage und unsichere - Orientierung haben, eine Richtung für unsere Aufmerksamkeit.

6. Vergleich unseres Kategorienbegriffs mit dem von Aristoteles und Kant

Es ist nun klar (und wurde in der Einleitung schon nahegelegt), wie sich das Verhältnis der Kategorien im hier vorgeschlagenen Sinn zu den Urteilen von dem entsprechenden Verhältnis bei Kant unterscheidet. Während Kant seine Kategorien durch die "metaphysische Deduktion" aus den Urteilsfunktionen hervorgehen läßt, zu denen sie in gewissem Sinn Metabegriffe sind, erscheinen sie hier als Begriffe, mit denen wir die

"Urteilmaterie" beschreiben, und zwar für die Urteile der "ersten Schicht", die Protokollsätze oder Konstatierungen. Offensichtlich ist dies ein Schritt zurück von Kant zu Aristoteles; aber nur so wird Kants Forderung, daß Kategorien (des äußeren Sinns) Begriffe von (empirischen) Gegenständen und Erfahrungen sein sollen, sozusagen direkt erfüllbar. Zugleich tragen wir der kantischen Unterscheidung von Anschauungsformen und Kategorien Rechnung, indem wir (anders als Aristoteles) Raum und Zeit selbst nicht unter die Kategorien rechnen, da sie als "Rahmenbedingungen" der Möglichkeit von Erfahrung diesen gegenüber ein logisches prius aufweisen: man kann sich Raum ohne Gegenstände und Zeit ohne Ereignisse zwar nicht *vorstellen*, wie auch Kant wiederholt hervorhebt, durchaus aber *denken*, zum Beispiel im Rahmen einer mathematischen Theorie, was für die jeweiligen Umkehrungen falsch wird: Ereignisse sind nur in der Zeit denkbar, Gegenstände nur im Raum.

Dieses logische (nicht phänomenologische!) prius schließt nicht aus, daß eine *Wissenschaft* vom Raum der Auffassung von Leibniz folgt: Raum als ordo, als Weise des Beieinander von Gegenständen, nicht als "Behälter", entsprechend Zeit als ordo von Ereignissen; sie wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie bestätigt, in gewisser Weise sogar phänomenologisch, indem subjektive Zeit je nach dem Erlebnisinhalt schneller oder langsamer verstreicht.

Unsere Kategorienliste ist damit von der kantischen disjunkt und enthält von der aristotelischen nur einige konkrete Instanzen des ποιον (Gestalt, wobei der Aspekt von Konstellation eher zum κεισθαι gehört, Farbe, Widerständigkeit, Geruch, Geschmack) und des πασχειν (Druck, Schall und natürlich verschiedene Kategorien des innern Sinns), dabei mehr als Aristoteles zugelassen hätte, dessen Unterscheidung von subjektiven und objektiven (später "primären" und "sekundären") Qualitäten aber im Licht moderner Wissenschaft nicht mehr haltbar ist.

Jedes Erfassen beruht auf irgendeiner physischen Wechselwirkung, die den Gesetzen der Physik unterliegt, so daß der erfaßte Gehalt sich im Prinzip objektivieren läßt; diese Objektivierung ist beim Riechen und Schmecken nur schwieriger als bei Ausdehnung und Gestalt. (Fachleute für Wein oder Gewürze können es aber ähnlich weit bringen wie die Kunstsachverständigen in der Beurteilung von Vasenformen.) Die Unterscheidung von objektiv Erfasstem und subjektiv Empfundeneem geht durch alle Sinne und findet auch bei den "primären" Qualitäten statt. Hinter der alten Unterscheidung steht ein *logischer* Unterschied: Gestalt, Ausdehnung und Festigkeit sind *Eigenschaften* der Körper, Farbe hängt zusätzlich von der Beleuchtung ab; die der erscheinenden Farbe des Körpers entsprechende Eigenschaft ist damit durch ein Dispositionsprädikat auszudrücken, oder mehr mathematisch: die erscheinende Farbe ist eine Funktion von (mindestens) *zwei* Veränderlichen. Das ändert aber nichts daran, daß jede Farberscheinung Erscheinung einer bestimmten, physikalisch durch eine Wellenlänge objektivierbaren Farbe ist. Ähnlich steht es beim Schall, bei Geruch und Geschmack.

Die ουσια schließlich, wie auch immer man diesen schwierigen Begriff interpretiert, ist sicherlich keine Kategorie in unserem Sinn. Den Begriff des "physischen Gegenstands" können wir *definieren*: etwas, das Gestalt, Ausdehnung und Farbe hat. Entität im allgemeinsten Sinne aber ist nur eine Variable, also ein logischer Begriff (auf den Kategorien gemäß unserer Festlegung nicht anwendbar sind).

7. Rechtfertigung des Begriffs des Kategorialen

7.1. Das kategoriale System besteht damit aus den Erfahrungsformen Raum und Zeit, den Kategorien und den Formen des theoretischen Agierens, unter denen die Formen der Urteilsbildung die grundlegenden sind, insofern jede Erkenntnis (also jedes Ziel des theoretischen Agierens) Erkenntnis eines Sachverhalts ist, der durch Urteile ausgedrückt und mitgeteilt wird. In offenkundiger Weise ruhen diese drei "Schichten" des theoretischen Agierens aufeinander auf; alles Erfassen geschieht in Raum und Zeit, und alles theoretische Agieren setzt Erfasstes voraus.

7.2. Wir haben den Begriff der Kategorie sehr eng genommen, dafür dem Begriff des Kategorialen eine recht weites Bedeutungsfeld eingeräumt; hierfür kann eine Erklärung des "quid iuris" wohl verlangt werden. Die Intention bei jedem Kategorienbegriff geht auf *fundamentalialia* des Erfahrbaren, und Fundamentalität hat zwei charakteristische Momente, das des Unausweichlichen, Indispensablen und das des Nicht-Hintergehbaren, Irreduziblen. Was kategorial genannt zu werden verdient, sollte jedenfalls so beschaffen sein, daß wir "nicht darum herum kommen". Was Raum und Zeit betrifft, ist das offensichtlich, denn wir kommen ja aus beiden nicht einmal hinaus. Dasselbe gilt für die Kategorien des innern Sinns; das, was wir unser Ich nennen, bekommen wir ja ohne bestimmte Gefühlslagen, Strebungen oder Gedankeninhalte gar nicht zu fassen. Bei den Kategorien der äußeren Sinne ist die Lage nicht ganz so eindeutig. Ein normal ausgestatteter und unverletzter Mensch wird auf die Länge nicht umhin kommen, Instanzen aller Kategorien in seinen Erfahrungen zu verbuchen; zumal Drücke, Geräusche und Gerüche drängen sich oft unerwünscht auf. Er kann seine Augen verschließen, aber wenn er sie öffnet, wird er zwangsläufig bestimmte Gestalten in bestimmten Ausdehnungen und Farben erblicken; Ähnliches gilt für den Hörsinn. Eine andere Frage ist die nach dem Grad der Entbehrlichkeit (wobei freilich präzisiert werden muß, *wofür* etwas entbehrlich ist oder nicht. Übrigens zeigt die Tierwelt, daß sehr verschiedene kategoriale Ausstattungen lebensfähig sein können). Der Sinn für Farbe ²²⁾, auch für Temperatur kann verloren gehen, auch Blinde und Taube können überleben; man kann sich aber schlecht ein Dasein vorstellen, in dem die Kategorie der Ausdehnung keine Rolle spielt, und noch weniger eines, dem die Erfassung von Stoff zumindest durch die Kategorie der Widerständigkeit fehlt; man stellt sich leicht körperlose Geister vor, aber man versuche nur einen Augenblick, sich alle Konsequenzen klarzumachen ²³⁾. Was das theoretische Agieren betrifft, so kann von Unausweichlichkeit schlechthin gar keine Rede mehr sein, sondern höchstens noch von Unentbehrlichkeit für bestimmte Zwecke. Der Mensch kann unfähig sein oder sich weigern, überhaupt zu denken, und bei günstigen Umständen trotzdem überleben (wobei man sich freilich fragen kann, ob das noch ein menschliches Leben zu nennen ist); ja das Dasein "ohne Sorgen", also ohne die Nötigung zu theoretischem Agieren, erscheint vielen als besonders wünschbar. Im gewöhnlichen Dasein mit seinen gewöhnlichen Zwängen aber ist die Sorge ein Existential und Urteilen und Schließen indispensabel, wenn es auch den meisten Menschen mit der Logik so geht wie Jourdain mit der Prosa.

Wenn man von einem "sorgenfreien" Leben spricht, ist "Sorge" nicht als Existential im Sinne Heideggers verstanden. Das Sich-vorweg-Sein kann aus dem menschlichen Dasein genausowenig weggedacht werden wie das In-sein, allein weil schon jedes Denken ein Sich-vorweg-Sein ist; wer "keine Sorgen" hat, freut

sich auf den nächsten Genuß. Es ist immer nur für Sekunden, daß wir wirklich im Jetzt und Hier aufgehen; von denen wir übrigens nicht wünschen sollten, daß sie verweilten (nur die Lust will Ewigkeit, nicht der Gedanke).

Summa: die Unausweichlichkeit nimmt "nach oben hin" ab, bleibt aber im Ganzen doch stark genug, den Begriff des Kategorialen zu rechtfertigen.

7.3. Der Charakter des Nicht-Hintergehbaren, oder die Irreduzibilität, ist hier rein phänomenologisch gemeint. Auf der theoretischen Ebene gibt es nichts schlechthin Irreduzibles. Alle Theorie, wo sie über die Phänomenologie hinausgeht (oder nur sich über die Theoriebeladenheit der Beobachtungssätze Rechenschaft zu geben sucht), ist notwendig reduktionistisch; sie legt die Erfahrung begrifflich auseinander und setzt sie nach selbstgesetzten Regeln neu zusammen²⁴⁾. Dabei gehört zu ihren Aufgaben, jedes theoretische Gebäude (um es bildlich ausdrücken) so durchzustrukturieren, daß man von verschiedenen Seiten eintreten kann. So ist es Aufgabe der Naturwissenschaft, Erfahrungsgrößen aller Art in Beziehung zueinander zu setzen, wodurch sich Möglichkeiten der Zurückführung ergeben, wie die Definition aller möglichen physikalischen Dimensionen durch eine kleine Zahl von ihnen²⁵⁾, vor allem die vollständige Beschreibung alles Erfahrenen durch das abstractum der Quantität.

Die heutige Wissenschaft scheint erst da sie selbst zu sein, wo sie quantifizieren kann; eine Entwicklung, die schon bei den Milesiern einsetzt. Gründe dafür sind leicht zu erkennen: einmal die Sonderstellung der Quantität als einem alle Kategorien durchsetzenden abstractum, dann die vergleichsweise einfachen Grundgesetze für den Umgang mit Quantitäten²⁶⁾. Ganz zwingend erscheint diese Entwicklung dennoch nicht; so ist in jedem atomistischen Weltbild Kombinatorik der fundamentale Ordnungsfaktor, nicht Quantität.

Auch die mathematische Entfaltung (s.u.) führt zu solchen Zurückführungen; die analytische Geometrie (und ihre moderne Form, die Theorie der Mannigfaltigkeiten) entwickelt Gestaltbegriffe aus dem Zahlbegriff (also letztlich aus diskreter Quantität), und wie Hilbert demonstriert hat, ist auch das Umgekehrte möglich: eine rein geometrische, keinerlei Quantitätsbegriffe enthaltende Axiomatik impliziert den Zahlbegriff²⁷⁾. Überraschende Reduktionen kennt auch die Logik: alle Junktoren können durch einen einzigen ausgedrückt werden, alle Axiome der Aussagenlogik lassen sich zu einem einzigen verdichten²⁸⁾. Es ist in solchen Beziehungen und Reduktionen, wo das "objektive System" der Kategorien zu suchen ist (wofern sich von derlei überhaupt reden läßt).

Die reale Erfahrung wird davon nicht berührt; man kann (für die Zwecke der Physik) Farben durch Wellenlängen ersetzen, aber nicht die Erfahrung von Farben durch eine Erfahrung von Wellenlängen. Daß die oben aufgezählten Bestandstücke des kategorialen Systems nicht bloß phänomenologisch irreduzibel sind, sondern kaum Bezüge untereinander haben, ist leicht zu sehen. Farbe kann man nicht tasten, hören oder schmecken, Gestalt hat keinen Geruch, Temperatur keine Farbe usw. Wir sagten, daß jeder Gegenstand als "kategorial gesättigt" erfaßt wird; alles was Gestalt hat, hat auch eine Farbe, aber die Farbqualität hat mit der Gestaltqualität nichts zu tun, beide nichts mit der Widerständigkeit usw. Nur bei Geruch und Geschmack ist die Absetzung nicht so scharf; immerhin kommt es vor, daß etwas anders schmeckt als riecht.

Man muß hier natürlich den engeren und eigentlichen vom übertragenen Begriffsgebrauch trennen; so kann eine Instrumentation "farbig" sein, eine Farbe "laut", eine Front durch Säulen "rhythmisiert", ein Weinkenner kann von einer "Geschmacksgestalt" reden usw. Das phänomenologische Recht solcher Metaphern ist hier nicht zu erörtern.

8. Der Ort der Mathematik

In allen drei Schichten des kategorialen Systems zeigen sich nun gewisse Strukturen und Gesetzmäßigkeiten; das Bestehen von solchen ist ja eine Voraussetzung dafür, daß wir überhaupt Erfahrungen (im übertragenen Sinn) machen, also aus Erfahrungen (im engeren Sinn) etwas lernen können, und das wiederum ist eine Voraussetzung dafür, daß die unspezialisierte Gattung homo sapiens ²⁹⁾ in einer gegen sie gleichgültigen Welt überhaupt überlebt. *Diese Strukturen und Gesetzmäßigkeiten enthalten alles, was in unserm Erfahren und theoretischen Agieren apriorisch ist.* Der Mathematik fällt die Aufgabe zu, sie in Systemen von Axiomen zu isolieren und konstruktiv-deduktiv zu entfalten. Die Axiomatik (im Sinne von Hilbert ³⁰⁾ zu verstehen) formuliert dabei eine Grundordnung von Begriffen; die Entfaltung zeigt uns deren Konsequenzen, wobei das Schwergewicht auf der Konstruktion liegt, der "richtigen" (einheitstiftenden) Begriffsbildung, während Deduktionen den Zweck haben, die "richtigen" Beziehungen zu bestätigen.

Die Mathematisierung eines Gegenstandsbereichs hat drei Voraussetzungen. Erstens muß dieser Bereich begrifflich genügend scharf faßbar und umgrenzbar sein, zweitens müssen Grundbeziehungen zwischen den Objekten dieses Bereichs mit verlässlicher Regelmäßigkeit statthaben. Dies sind die Voraussetzungen für eine Axiomatisierung. Damit diese sinnvoll ist, muß ein gewisses „konstruktiv-deduktives Potential“ vorhanden sein, Möglichkeiten, aus gegebenen Objekten neue zu bilden, deren Eigenschaften „einfache“ Funktionen der Eigenschaften der gegebenen Objekte sind (etwa Zahlen addieren und multiplizieren, oder zu gegebenem Punkt und Radius einen Kreis ziehen). Erst diese konstruktiven Möglichkeiten öffnen dem kombinierenden Intellekt und der Phantasie die Bahnen.

Die mathematische Entfaltung lehrt die Tragweite der Grundbegriffe kennen und damit ihren "eigentlichen Inhalt" oder das, was man ihr "Wesen" nennen kann. Es ist noch nichts getan, wenn Gegenstände mit ihrem Namen eingeführt werden; erst die Entfaltung möglichst vieler Konsequenzen, die Einbindung in möglichst viele Zusammenhänge zeigt das Ein- und Ausschließende der Begriffe, gleichsam ihr Gesicht. Das „wahre Wesen“ der Primzahlen ist die Summe der wahren Sätze über sie.

Die mathematische Entfaltung des kategorialen Systems wird damit, wie man in Anlehnung an Nicolaus Cusanus sagen könnte, die wahre *explicatio mentis* oder, wenn man so will, der beweisbare Teil der Philosophie ³¹⁾. Die natürliche Aufgabenteilung ist evident: phänomenologische Bestandsaufnahme schafft die Voraussetzung für Mathematisierungen; sie greift gewissermaßen horizontal aus, nimmt das Begegnende begrifflich in Besitz und steckt seine Felder ab; die Mathematik geht ins Vertikale, errichtet hohe Gebäude auf möglichst schmaler axiomatischer Basis. Sie impliziert stets Abstraktion, indem sie bestimmte Merkmale vom Erfahrenen ablöst, wie Anzahl vom Gezählten oder

Gestalt von dem, was Gestalt hat, sowie Idealisierung, indem sie annimmt, daß die Grundbeziehungen ausnahmslos und in „reiner Form“ statthaben.

Schließlich führt die Entfaltung zu Anwendungen, sich bewährenden mathematischen Modellen für außermathematische Sachverhalte und Prozesse. Das kann nicht verwundern, da die Bewährung in der Erfahrung stattfindet und die mathematische Entfaltung nichts anderes entfaltet, als was zu den Bedingungen der Möglichkeit von Erfahrung gehört.

Nur in ganz elementaren Fällen freilich ist Anwendung von Mathematik eine direkte Spezifikation erfahrbarer Gesetze. Das allgemeine Schema von Anwendung ist eine Art Umweg: die Mathematik isoliert Sachverhalte in Axiomensystemen und schafft damit die Voraussetzung für Begriffskonstruktionen, die in der Erfahrung gar kein Pendant haben (klassisches Beispiel: negative Größen). So entstehen mathematische Sachverhalte, die man Sachverhalten und Prozessen der Erfahrung als "Modell" unterlegen kann; man hofft dabei, daß die *logischen* Konsequenzen aus dem mathematischen Sachverhalt, in Erfahrungsbegriffe zurückübersetzt, sich mit den *erfahrenen* Entwicklung des modellierten Sachverhalts decken, wie Heinrich Hertz in bekannter Weise dargelegt hat. Daß das so oft und gut gelingt, ist allerdings des Staunens wert; im Ganzen aber sieht sich die Transzendentalphilosophie hier eher bestätigt als vor ein Problem gestellt ³²⁾.

Wir gehen jetzt daran, Ausgangspunkte und erste Schritte der mathematischen *explicatio* darzustellen, und gehen durch das kategoriale System in der oben vorgelegten Reihenfolge.

9. Mathematik des Raums

Unmittelbarer Erfahrung zeigt sich immer nur ein Ausschnitt aus dem Raum, eine gewisse Umgebung der Stelle p , an der wir uns gerade befinden. Eine solche Umgebung ist ein Raumausschnitt, der nach jeder Richtung eine gewisse (kleine) Verrückung von p gestattet. Hieraus ergeben sich zwei formale Eigenschaften des Umgebungsbegriffs: jeder Raumausschnitt, der eine Umgebung von p enthält, ist selbst eine Umgebung von p ; ebenso ist der Durchschnitt zweier Umgebungen von p eine solche (er gestattet nach jeder Richtung wenigstens die kleinere der beiden durch die einzelnen Umgebungen gestatteten Verrückungen). Eine dritte Eigenschaft ergibt sich aus der folgenden Überlegung: eine Umgebung U von p ist immer auch Umgebung "genügend benachbarter" Stellen, aber nicht notwendig aller Stellen, die sie enthält (denn sie kann Randstellen haben). Denkt man aber U geringfügig geschrumpft, entsteht eine neue Umgebung V von p , für deren sämtliche Stellen U Umgebung ist. (Man kann ein solches V sogar bilden, indem man einfach die Randpunkte aus U wegläßt.) Für eine erste Mathematisierung des Räumlichen repräsentiert man Raum und Umgebungen durch die Mengen der in ihnen enthaltenen Stellen und gelangt zum Begriff des topologischen Raums: eine Menge mit einem System von Teilmengen, welches die oben beschriebenen formalen Eigenschaften der Umgebungen aufweist. Obwohl die Axiomatik sehr schwach ist und gänzlich anschauungsfremde Realisierungen besitzt, weist sie ein beeindruckendes Potential zur Begriffsbildung auf. So wird jeder Teil des Raums ein Raums "eigenen Rechts" (die Umgebungen im Teilraum sind die Durchschnitte des Teils mit Umgebungen im ganzen Raum). Eine Stelle p liegt auf dem *Rand* eines Teils T , wenn jede Umgebung von p sowohl Stellen enthält, die in T , wie solche, die nicht in T liegen. Ein Teil ist

abgeschlossen, wenn alle seine Randstellen zu ihm gehören, *offen*, wenn er mit jedem p eine (kleine) Umgebung von p enthält, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn er keine seiner Randstellen enthält. Die Schreibtischfläche ist abgeschlossen, der Raum über ihr offen. Der "Gesamtraum" hat natürlich keinen Rand, ist also offen: jede Stelle besitzt Umgebungen. Ein Teil ist *zusammenhängend*, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung von Teilen ist, die Umgebungen aller ihrer Stellen sind. Der Tisch ist zusammenhängend, seine Beine, als *ein* Ganzes genommen, sind es nicht. Der Gesamtraum kann als zusammenhängend gedacht werden, genauer: verschiedene Zusammenhangskomponenten wären "Welten für sich" ohne mögliche wechselseitige Einwirkungen. Andere Eigenschaften des Anschauungsraums, die sich in der Sprache der topologischen Räume sofort formulieren lassen, sind die Trennbarkeit verschiedener Stellen durch disjunkte Umgebungen (die "Hausdorff-Eigenschaft"), und die Homogenität: je zwei Stellen besitzen homöomorphe Umgebungen, informell: der Raum ist an allen Stellen "gleich beschaffen".

10. Mathematik der Gestalt

Die erste Mathematik des Räumlichen hatte nicht dieses selbst zum Gegenstand (wie der soeben umrissene Begriff des topologischen Raums), sondern Gestalten im Raum. Über deren Vielfalt und Komplexität Herr zu werden, muß dem ersten (und auch dem zweiten) Blick als hoffnungsloses Unternehmen erscheinen. Mit Gestalten planend und rechnend umzugehen, nötigt uns die kategoriale Organisation; sie läßt aber nicht ohne weiteres erkennen, wo der Hebel anzusetzen ist. "Reine" Gestalten, mit denen eine Art Kalkül und Konstruktion möglich erscheint, sind in der Natur nicht häufig; zeigt ein Hügel oder ein Bachlauf eine ganz gerade Linie, vermuten wir menschlichen Eingriff. Immerhin kann ein ebenmäßig angeschütteter Vulkan oder die glatte Fläche eines Sees darauf hinweisen, daß überall, wo nicht zuviele Kräfte interferieren, einfache Formen vorwalten, die Grundgesetze also "geometrisch" sind. Eher aber sind es *Prozesse*, in denen dies deutlich wird und die reinen Gestalten hervortreten, die Bahn des fallenden Steins, die konzentrisch auf der einmal erregten Wasserfläche sich ausbreitenden Kreise, der Sonnenstrahl, der durch eine kleine Öffnung bricht, vor allem die Bewegungen der Gestirne. Unausweichlich werden die reinen Formen auch beim zweckgerichteten Handeln des Menschen - die gerade Linie als kürzeste Verbindung, der Kreis als die natürliche Gruppierung von Menschen, die sich um einen Mittelpunkt versammeln, die ebene Fläche und der rechte Winkel für das nicht zufällig sich einstellende, sondern planmäßig sichergestellte Zueinanderpassen der Bauteile. Dennoch bedurfte es entschlossener Abstraktion und Idealisierung, um geometrische Grundbegriffe zu schaffen, die mathematische Entfaltung gestatten - erst der Punkt ohne Ausdehnung, die Linie ohne Durchmesser erfüllen das fundamentale Axiom aller Geometrie, daß durch je zwei Punkte genau eine Gerade gehen soll, und bringen damit (und im Verein mit Existenzaussagen, die der Theorie eine sie rechtfertigende Reichhaltigkeit sichern), das konstruktiv-deduktive Sprachspiel der Geometrie in Gang, dessen bloße Konsistenz, von Anwendungen zu schweigen, a priori sowenig evident ist, daß die Griechen, anders als in der Arithmetik, eine axiomatische Fundierung als notwendig erkannten. Von mathematischer Erfassung "wirklicher" Gestalt ist man hier noch weit entfernt, wengleich erste Anwendungen schon möglich sind (etwa den "Satz des Pythagoras" hat

man lange vor diesem zur Konstruktion rechter Winkel benutzt). Jede reale Gestalt (man denke etwa an einen Baumstumpf) zeigt Krümmung in verschiedenen Graden und Dimensionen, sowohl ihrer Flächen wie ihrer Umrißlinien; sie hat konkave und konvexe Außenflächen, sie kann einfach zusammenhängen oder auch nicht; vor allem aber weist sie in der Regel kein durchgehendes, kein einheitliches Bildungsgesetz auf, kann hier krumm, dort gerade sein, hier glatt, dort rau, kann sich "willkürlich" verästeln und so fort. Es ist klar, daß eine synthetische Theorie nach Art der griechischen, die also nur eine sehr kleine Zahl von Gestaltbegriffen zugrundelegt, kaum fähig sein kann, dieser Gesamtheit von Gestaltphänomenen gerecht zu werden³³). Der moderne Gestaltbegriff, nämlich der einer (berandeten) Mannigfaltigkeit, vermag das prinzipiell zu leisten, indem er die Gestalten als Punktmengen faßt (in diesem Sinne ist er analytisch), aber nur lokal eine "Standardstruktur" verlangt (und in diesem Sinne ist er synthetisch - die lokalen "Standardteile" setzen sich zum "globalen" Gebilde zusammen). Wie alle Strukturbegriffe kann er über alle mögliche Erfahrung hinaus verallgemeinert werden (beliebige Dimension, Unabhängigkeit von Einbettungen in einen Raum, ohne Orientierung).

11. Mathematik der Konstellation

Die Kategorie der Gestalt birgt eine weitere Quelle von Mathematik, in ihrem Aspekt der Konstellation, der Lage von Raumstellen oder Gegenständen im Raum zueinander (das aristotelische $\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\alpha\iota$), wie sie durch die Grundrelationen des In, An, Vor, Über, Neben, Zwischen u.a. wiedergegeben wird. Hier zu variieren und zu kombinieren, umzustellen und zu ordnen, sei es spielerisch, sei es zu praktischen Zwecken, ist eine elementare Aktivität, die schnell aus der gegenständlichen in die theoretische Sphäre aufsteigt, wo ihr Leibniz unter dem Titel einer *ars combinatorica* universale Bedeutung zusprach. Als selbständige mathematische Disziplin ist die Kombinatorik vergleichsweise jung, nicht zuletzt wohl deswegen, weil zu ihrer effizienten Bearbeitung die abstrakte Begrifflichkeit von Mengen, Abbildungen und Gruppen kaum entbehrlich scheint. Schon Verfertiger früher Keramik werden sich die Frage vorgelegt haben, auf wieviele Weisen man drei Ornamente hintereinander anordnen kann, aber welche Beziehungen von dort zu den Symmetrien eines Dreiecks bestehen, kann erst mittels des Gruppenbegriffs sachgemäß ausgedrückt werden. Die Operationen des Abzählens, Einteilens, Ordnen, so unproblematisch sie in Alltagssituationen mit kleinen Parametern sein mögen, zeigen durchweg eine mit diesen Parametern rapid ansteigende Komplexität, die sie dem konzeptuell unbewaffneten Denken intraktabel macht. Schon Eulers Offiziersproblem mußte 120 Jahre auf seine Erledigung warten, und für seine modernen Verallgemeinerungen in der Theorie der block designs sind letzte Antworten heute (und vielleicht sogar prinzipiell) außerhalb unserer Reichweite.

12. Mathematik der Quantität

12.1. Das fundamentale abstractum der Quantität nimmt eine Sonderstellung ein, indem es das einzige ist, das sich in irgendeiner seiner drei Formen in allen Kategorien findet; dementsprechend hat die Sprache kategorienspezifische Quantitätsausdrücke in großer Zahl, wie lang, hell, laut, stark und so fort. Ausdehnung, Konstellation, Farbe, Temperatur, Festigkeit, Druck, Schall, Geruch und Geschmack weisen alle irgendein

"mehr oder weniger" auf; sind aber untereinander, wo nicht gänzlich beziehungslos, doch deutlich voneinander absetzbar (wie oben (8.3) umrissen).

Gestalt kann nach "mehr oder weniger" (abgesehen von Ausdehnung, die wir aber als eigene Kategorie ansehen) nur in einzelnen Gestalthinsichten befragt werden, wie Krümmung, Anzahl von Ecken oder Löchern usw. Von einem vollständigen Verständnis der Beziehungen zwischen Gestalt und Quantität, einem Königsthema der Mathematik, sind wir weit entfernt, obwohl Außerordentliches schon geleistet wurde ³⁴⁾.

Den drei Formen gemeinsam sind die Basiseigenschaften einer binären, antisymmetrischen und transitiven Relation, wie sie durch jedes "mehr oder weniger" gestiftet wird. Der korrespondierende mathematische Begriff einer (partiell) geordneten Menge ist ähnlich elementar wie der des topologischen Raums und hat wie dieser Realisierungen, denen man den kategorialen Ursprung nicht mehr ansieht.

Die topologischen und die Ordnungsstrukturen sind eng verwandt. Zu jedem Raum gehört die partiell geordnete Menge seiner offenen Teilmengen; unter einer sehr milden Regularitätsvoraussetzung ("sober") können die Punkte des Raums und seine Topologie aus dieser Menge rekonstruiert werden; so erhält man eine Äquivalenz einer (großen) Kategorie von Räumen mit einer Kategorie von Verbänden ³⁵⁾.

Die ursprünglichen Quantitäten bilden stets totale Ordnungen (je zwei quanta derselben Kategorie sind miteinander vergleichbar); extensive und intensive Quantität weisen ferner eine Eigenschaft der Kontinuität auf, die schon Aristoteles begrifflich zu fassen versucht hat, die aber doch eine fortgeschrittenere Mathematik fordert, als die erste, nur scheinbar "klare und deutliche" Anschauung erwarten läßt. Die Dreiheit der Quantitäten entsteht also durch eine zweifache Dichotomie, kontinuierlich und diskret, sodann der kontinuierlichen in intensive und extensive. Diskrete Quantität ist "absolut", insofern sie, anders als kontinuierliche, ohne Vergleich bestimmt werden kann; sie "trägt ihr Maß in sich selbst".

12.2. Die am meisten elementare Verbindung von Quantität und Raum liegt im Begriff des Abstands zweier Punkte, dessen Grundeigenschaften im Begriff des "metrischen Raums" kodifiziert werden. Wir können nun das Apriori unserer Raumerfahrung resümieren: der Anschauungsraum stellt sich dar als homogener metrischer Raum von drei Dimensionen, der lokal zusammenhängend und 2-zusammenhängend ist (jede Kreislinie und jede Kugeloberfläche kann stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden; informell: der Raum hat "keine Löcher").

Der Dimensionsbegriff kann hier rein topologisch genommen werden (Hausdorff-Dimension); näher liegen natürlich elementargeometrische Charakterisierungen der Dreidimensionalität. Die Metrisierbarkeit enthält die Hausdorff-Eigenschaft. Der Zusatz "lokal" bedeutet: jeder Punkt im Raum hat eine Umgebung mit der jeweiligen Eigenschaft. Soweit es uns Irdische betrifft, kann diese sehr groß gedacht werden. Vom Gesamtraum haben wir keine Anschauung; die Standardtheorie vom Universum ("Urknall") scheint zu implizieren, daß der von diesem eingenommene Raum sternförmig und damit nullhomotop ist. Nach der Euklidizität kann der Anschauungsraum gar nicht sinnvoll befragt werden, da deren Feststellung eine *absolute* Genauigkeit in der Messung von Längen und Winkeln erfordern würde. Der lokale Zusammenhang schließlich enthält die Kontinuität ("Kein Teil ist der kleinste", so Kant; der Mathematik genügt das nicht, denn auch der nicht kontinuierliche rationale Zahlkörper hat diese Eigenschaft.)

Wir heben den apriorischen Charakter hervor: der Anschauungsraum ist nicht einfach so beschaffen und könnte "im Prinzip" auch anders beschaffen sein, sondern einen Raum, dem eine der genannten Eigenschaften abgeht, könnten wir schlechterdings nicht apperzipieren; wenn wir versuchen, uns ein „Loch im Raum“ vorzustellen, dann enthält dieses Loch nur einen „dünnere“ Raum. Natürlich findet man leicht Beispiele für topologische Räume, denen einzelne von ihnen fehlen, aber wir können diese (wenn überhaupt) nicht anders vorstellen als eingebettet in den Anschauungsraum, der sie hat.

12.3 Extensive und diskrete Quantitäten gestatten die Operationen des Zusammenfügens und der Proportionenbildung. Die Gesetze für das Zusammenfügen sind Assoziativität und Kommutativität, die zum Grundbegriff einer kommutativen Halbgruppe, im Verein mit der Anordnung zum Begriff einer angeordneten Halbgruppe führen. Jedes einzelne Quantum aus einer solchen Halbgruppe erzeugt, durch fortgesetzte Addition zu sich selbst, das ganze Reich der diskreten Quantität ³⁶⁾.

Mit intensiven Quantitäten ist schlecht rechnen; sie können eher "gesteigert" als "vermehrt" werden, haben eher einen "Grad" als eine "Größe", und ihre Skalierung kann entsprechend der Empfindung nichtlinear sein; nach Fechner ist die Intensität der Empfindung proportional zum Logarithmus der Reizstärke (eindrucksvolle Bestätigungen dieses Gesetzes bieten die Preise für Luxusgüter). Das Thermometer ist ein einfaches Beispiel für die Übersetzung intensiver in extensive Quantität.

Auch hier liegt Verallgemeinerung auf der Hand: man kann von der Anordnung, auch von der Kommutativität absehen ³⁷⁾ und gelangt zum sehr allgemeinen Begriff der Halbgruppe, der auch in der Mathematik des theoretischen Agierens eine große Rolle spielt: überall, wo Handlungen im Hintereinanderausführen fester Einzelhandlungen bestehen, liegt mathematisch betrachtet eine Halbgruppe zugrunde, in der wir uns "zurechtfinden" müssen, das heißt: wir müssen imstande sein, ein angestrebtes Ergebnis als Ergebnis einer geeigneten Folge von Einzelhandlungen zu erhalten (gruppentheoretisch: ein gegebenes Element als Produkt fester Erzeuger zu schreiben). Auch die Proportionenbildung weist eine Reihe mehr oder weniger einfacher Gesetzmäßigkeiten auf, wie sie schon die griechische Mathematik entfaltet hat; merkwürdigerweise gelang ihr nicht die Synthese mit der Addition, obwohl sie nicht schwer zu bewerkstelligen ist. Der einschlägige moderne Strukturbegriff ist der eines Moduls über einem Ring, der Grundbegriff der linearen Mathematik ³⁸⁾.

13. Mathematik des theoretischen Agierens

13.1. Wir haben damit die Sphäre des theoretischen Agierens erreicht, wo natürlich an erster Stelle die logischen Prinzipien zu nennen sind, die Gesetze für die Bildung von (formal) korrekten Urteilen und diejenigen des (richtigen) Schließens. Deren Mathematisierung in der formalen (oder mathematischen) Logik dient freilich, anders als die Mathematik der "Zahlen und Figuren", weniger der *Entfaltung* durch begriffliche Konstruktionen als der exakten *Beschreibung* der logischen Prozesse mit dem Ziel, ihre prinzipielle Reichweite festzustellen. Des Aristoteles (halbformale) Aufzählung der gültigen Syllogismen kann als das erste Resultat dieser Logik gelten. Während die Zahlenlehre, selbst wenn sie sich (letztlich) nur für die ersten, die natürlichen Zahlen interessiert, ebenso hochgetürmte wie weitläufige Begriffsgebäude errichten muß (wobei dann freilich die Mittel sich zu Zwecken wandeln), wogegen die Zahlen selbst in

fragloser Gegebenheit sind, war für die Logik jene bloße Beschreibung ein lange Zeit unbewältigtes Problem; erst Frege, Russell und ihren Nachfolgern gelang es, den Umgang mit Quantoren und mehrstelligen Relationen in die heute selbstverständlich gewordene Form zu bringen. Wie jede mathematische Theorie, enthält auch die Logik Idealisierungen (z.B. indem sie nur wahrheitsdefinite Aussagen betrachtet); sie enthält aber nicht die "idealen Elemente" (Cassirer), durch welche in andern Disziplinen das mathematische Gebäude an Höhe gewinnt. Die Logik kann nicht anstreben, über eine Präzisierung des gewöhnlichen Sprechens und Denkens hinaus gänzlich neue Logiksysteme zu erfinden, etwa nach Alternativen zum modus ponens zu suchen; selbst wo sie "nichtklassische" (konstruktive, modale, deontische, ja sogar parakonsistente) Logiken betrachtet, liegt ein Ausschnitt realer menschlicher Denktätigkeit zugrunde, während andere mathematische Disziplinen, wie schon erwähnt, alle Erfahrbarkeit schnell hinter sich lassen.

13.2. Nun besteht das theoretische Agieren aber nicht allein im Urteilen und Schließen, und wenn auch (wie oben schon erwähnt wurde) die darüber hinausgehende Geistestätigkeit nicht völlig unter Regeln gebracht werden kann, so enthält ihr Repertoire doch Stücke vom Rang des Kategorialen, die mathematische Formulierung und Entfaltung gestatten. Zu ihren Hauptaufgaben gehört zweifellos die "richtige" Begriffsbildung, diejenige, durch welche ein Gegenstandsbereich geordnet und begriffen werden kann (in einem zweifachen Sinn, nämlich "angepackt" und "verstanden"), so daß wir (wenn es sich um physische Gegenstände handelt) auf ihn mit voraussagbarem Erfolg einwirken können. Die Ordnung besteht in besonderen Verhältnissen der Gegenstände untereinander oder zum neuen Begriff. Mathematikfähig sind sowohl die Bildung des Neuen selbst wie die Verhältnisse.

14. Mathematik der Extensionen

14.1. Jedes theoretische Agieren beginnt damit, daß ein bestimmter Bereich von Gegenständen, Sachverhalten oder Prozessen aus dem Erfahrungsganzen herausgehoben und zum Objekt der Betrachtung gemacht wird; dabei fällt stets Mengenbildung an. Cantor hat sie beschrieben als "Zusammenfassung wohlunterschiedener Gegenstände unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen". Der Ubiquität dieser Denkhandlung hat die Sprache Rechnung getragen, indem sie für verschiedene Klassen von Gegenständen und Arten des Zusammenfassens spezifische Begriffe geprägt hat, wie eine "Ladung", ein "Haufen", ein "Strauß" und so fort. Das Ganze kann dabei ein Objekt sui generis sein ("mehr als seine Teile"); es kann aber ein solches auch nur formal sein, indem es nur um seine Mitglieder geht, nicht um die Art ihres Zusammengefaßtseins oder das "Mehr" in der Ganzheit, etwa um sie zu zählen (wobei sich übrigens zeigt, daß der Mengenbegriff dem Zahlbegriff logisch vorgeordnet ist). Die meisten im theoretischen Agieren auftretenden Mengen sind Extensionen von Begriffen ("die Gegenstände auf dem Schreibtisch"); aber eine Menge kann auch durch Aufzählung ihrer Elemente gegeben werden, etwa wenn ein Kabinett vorgestellt wird. Hierauf gründet das Extensionalitätsprinzip: Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

14.2. Nicht nur der Mengenbegriff selbst, auch verschiedene Konstruktionen von neuen Mengen aus gegebenen sind so ubiquitär, daß sie sich aus der theoretischen Aktivität kaum herausheben. Aus jeder Menge kann die Teilmenge derjenigen Elemente ausgesondert werden, die ein bestimmtes Merkmal tragen ("Alle Bürger, die älter sind als 21 Jahre"). Ist jedem Element einer Menge ein bestimmtes Objekt zugeordnet, kann man von der Menge der zugeordneten Objekte sprechen ("Die Fingerabdrücke aller Bürger"). Jede Menge von Mengen kann zu einer Gesamtmenge vereinigt werden; etwa wenn die Traubenpflücker ihre Kiepen in die Kelter entleeren. Mit jeder Menge sind alle Möglichkeiten mitgegeben, Teilmengen auszusondern, und damit die Menge dieser Teilmengen; solche Mengen stehen oft bei kombinatorischen Fragen im Hintergrund, wenn aus einem großen Bestand eine kleine Auswahl zu treffen ist, wenn ich etwa überlege, welche Bücher ich mit auf die Reise nehmen soll. Schließlich kann aus jeder Menge von Mengen eine Menge von Vertretern gebildet werden; so enthält ein Parlament einen Abgeordneten aus jedem Wahlkreis. Die genannten Konstruktionen bilden, geeignet präzisiert und im Verein mit der Extensionalität und einem Existenzaxiom, ein Axiomensystem für die Standardtheorie der Mengen. Die Mathematisierung dieser alltäglichen und scheinbar banalen Operationen zeigt ein unerwartetes Potential, gestattet sie doch den Aufbau des mathematischen Gesamtgebäudes. Schon formallogisch ist das bemerkenswert, denn die Sprache der Mengentheorie ist, mit einer einzigen undefinierten Relation, eben der Elementrelation, die kleinstmögliche Erweiterung einer reinen Identitätslogik. Freilich ist das wohlbekannt; aber man sollte doch einmal darüber staunen.

15. Mathematik der Relationen

Schon Hume erkannte den Primat der Relationen vor den Relata, der Beziehungen vor den Objekten, die sich unserer Erfahrung bei genauerem Hinsehen nie in wirklicher Substanzhaftigkeit, in solidem An-sich zeigen, sondern immer nur als Netzwerke von Bezügen. "Dagegen sind die inneren Bestimmungen einer substantia phaenomenon im Raume nichts als Verhältnisse, und sie selbst ganz und gar ein Inbegriff von lauter Relationen", so drückt Kant sich aus (KrV B 321). Die Mathematik kennt verschiedene Weisen, solche Netzwerke zu beschreiben, am einfachsten und direktesten als Graphen; impliziert der Bezug eine Hierarchie, liegt eine partiell geordnete Menge vor. Mit beiden eng verwandt ³⁹⁾, aber von einem systematischen Standpunkt aus wichtiger ist der Begriff der mathematischen Kategorie. In Kategorien wird der Bezug als gerichteter Übergang dargestellt ("Pfeil"), mit dem Basisaxiom der assoziativen Verknüpfbarkeit; wo diese nicht "von Hause aus" vorliegt ⁴⁰⁾, läßt sie sich in aller Regel leicht herstellen, wobei die Assoziativität, die Gleichung $(fg)h = f(gh)$ zwischen Morphismen, einfach eine Freiheit des Einteilens bedeutet, die sich das theoretische Agieren in vielen Kontexten ganz selbstverständlich nimmt. Oft werden Objekten andere Objekte zugeordnet, derart, daß die Beziehungen zwischen den Objekten in solche zwischen den zugeordneten Objekten übergehen; diese logische Konstellation oder Denkfigur wird im kategorialen Begriff des Funktors faßbar. Der Begriff der natürlichen Transformation beschreibt Situationen, in denen zwischen verschiedenen zugeordneten Objekten regelhafte Beziehungen bestehen. Besonders effizient sind die kategorialen Begriffe, wo Objekte, gemäß der Hume-Kantschen Einsicht, durch ihre Stellung im Netzwerk charakterisiert werden können (also

nicht durch "innere Eigenschaften"); man spricht von "universellen Objekten", wie sie die Kategorientheorie mit den Begriffen der Limiten und der adjungierten Funktoren darstellt. Der einfachste Typus, Anfangs- oder Endobjekte, repräsentiert eine bekannte Figur des theoretischen Agierens - jedes Objekt steht in einer eindeutigen Relation zum universellen Objekt (woraus leicht folgt, daß dieses eindeutig bestimmt ist; das gilt für alle Arten universeller Objekte). Allgemeiner ist das Ideenprinzip im Sinne Platons: jeder möglichen Hinsicht entspricht ein universelles Objekt, und jeder Bestimmung eines Objekts in irgendeiner Hinsicht entspricht eine Beziehung des Objekts ("Teilhabe") zu dem dieser Hinsicht entsprechenden universellen Objekt; eine Denkfigur, die dem kategorialen Adjunktionsbegriff nahesteht ⁴¹⁾. Hat die Logik es zu tun mit dem Urteilen und Schließen, beschäftigt sich die mathematische Kategorientheorie mit möglichen Relationsstrukturen innerhalb der beurteilten Objektbereiche; so verwirklicht sie einen Teil von Leibnizens kühner Idee der *logica inventiois*.

16. Extension vs Relation

16.1. Zusammenfassen und In-Beziehung-Setzen sind in gewisser Weise komplementäre Funktionen des theoretischen Agierens, die sich zugleich vielfältig durchdringen. Beziehungen geben Anlaß zu Zusammenfassungen (zum Beispiel von Objekten, die auf dieselbe Weise bezogen sind); der Zweck des Zusammenfassens ist die Herstellung neuer Beziehungen, sei es unter den zusammengefaßten Objekten, sei es zwischen dem neuen Ganzen und andern Ganzheiten, die dafür wiederum zusammengefaßt werden müssen. Das Zusammenfassen hat stets dieselbe Form; das In-Beziehung-Setzen ist der Oberbegriff für die ganze Welt möglicher Beziehungen, also letztlich für den Gehalt aller möglichen Erkenntnis. Die Mathematik kann hier nicht klassifizieren, sondern nur besondere Beziehungsformen, die sich anhand formaler Eigenschaften axiomatisieren lassen, auf ihre Weise entfalten.

16.2. Die mathematische Kategorientheorie entstand ursprünglich als eine Metatheorie zum Standarddiskurs; als nämlich die Beziehungen zwischen den Objekten, die man studierte, so kompliziert geworden waren, daß man eine Theorie der Beziehungen benötigte. Von dieser Hilfsfunktion hat die Kategorienlehre sich längst emanzipiert; auch hier hat die Mathematik, gemäß dem oben schon angetroffenen Prinzip der wechselseitigen Rückführbarkeit von Grundbegriffen aufeinander vermöge mathematischer Durchdringung, zu einer gewissen Austauschbarkeit geführt ⁴²⁾. Gewöhnlich denkt man sich das Mengenuniversum durch Klassen erweitert, unter denen sich die Kategorien ansiedeln lassen; es läßt sich aber ein Mengenbegriff auch rein kategorial formulieren und in Kategorien mit "genügend vielen guten Eigenschaften" tatsächlich bilden ⁴³⁾. Daß die Mathematik von "Zahlen und Figuren" sich einmal diese Form geben wird, erscheint unwahrscheinlich, obwohl die Diskussion darüber schon im Gang ist ⁴⁴⁾; unbestreitbar aber gibt es Kontexte (wie die in (15) angeführten), denen die „pfeiltheoretische“ Beschreibung angemessener ist. Unbestreitbar aber ist die Kategorientheorie dem Mengenbegriff als selbständiger Grundbegriff zur Seite getreten.

17. Verschiedenes mathematisches Potential von Teilen des kategorialen Systems

17.1. Die einzelnen Bestandteile des kategorialen Systems sind, wie schon zur Sprache kam, verschieden wichtig (teilweise sicher wegen verschiedener Ausbildung und Differenzierung der Organe); einzelne treten daher als Quelle von Mathematik wenig oder gar nicht in Erscheinung. Die Mathematik der Farben bleibt eine bescheidene Kombinatorik weniger Grundfarben; sie weist gewissermaßen nicht über sich hinaus, vor allem führt von ihr kein Weg ins Unendliche; man könnte sagen, daß ihr das konstruktiv-deduktive Potential fehlt^{44a)}. Ähnliches gilt auch für den Geschmack mit seinen vier Grundtypen, wohl auch für den Geruch.

Den dreien gemeinsam ist die Vektorstruktur: Mischung (=Addition) von Grundtypen mit verschiedenen Intensitäten. Durch Abstraktion von der Intensität der Gesamtmischung entsteht ein Ausschnitt aus einem projektiven Raum, ähnlich wie bei den Gestalten.

Die Empfindungen von Temperatur und Druck weisen gar keine "innere Struktur" auf und reduzieren sich auf eine einzige intensive Quantität. Mehr versprechen die Geräusche, deren zahllose Spielarten (man denke nur an die Vielzahl von Geräuschbegriffen) vielleicht eine Systematik verbergen, eine noch nicht erschlossene Quelle einer "ersten" Mathematik kombinatorischen Charakters, die sich zur Musik verhielte wie die Geometrie zur Plastik und von der die Arithmetik der Akkorde und Tonarten nur ein Teil ist. Hier verdient ein Unterschied zwischen Farben und Klängen erwähnt zu werden: dieselbe Farbe kann in verschiedenen Weisen aus den Grundfarben gemischt werden; ein Analogon für Klänge besteht aber nicht.

17.2. Am meisten wird aufgefallen sein, daß die Erlebnisform der Zeit nicht in Betracht gezogen wurde. Auch die Zeit zeigt kontinuierliche Quantität als Dauer, diskrete in Form des Eins-nach-dem-Andern, in der Lebenswelt vielfältig realisiert; hinzu kommt die dreifache Gliederung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft (mathematisch eine Art "mitlaufender Orientierung"). Prima facie wird man in dieser für die Zeit spezifischen und schwer zu fassenden Verschränkung von Strukturen⁴⁵⁾ eine reiche Quelle von Mathematik vermuten. Wenn das zutrifft, ist die Quelle noch nicht erschlossen. Aber es lassen sich Gründe angeben: der quantitative Aspekt der Zeit wird erst faßbar, wenn ihr Charakteristisches, nämlich ihr Verstreichen negiert wird. Die Zwei wird erst dadurch die Zwei, daß die Eins festgehalten, damit vom eigentlich Zeitlichen abgesehen wird; unwillkürlich bildet sich die Vorstellung von der "Erstreckung" der Zeit auf einer Geraden und damit ihre Verräumlichung; die Mathematik der Zeit wird dieselbe wie die eines eindimensionalen Raums. Das eigentlich Zeitliche aber, ihr beständiges Sich-Entziehen, der immer fliehende, nie festzuhaltende Moment des "Jetzt", ist mathematisch betrachtet das Strukturlose schlechthin, ja geradezu die Negation von Vielfalt überhaupt und damit auch von Struktur.

Ich kann mich nicht enthalten, hier eine (wenngleich dunkle) Beziehung zu der Tatsache zu vermuten, daß von allen Bestimmtheiten unserer Befindlichkeit die Zeitlichkeit diejenige ist, der wir am wenigsten entgehen können, der gegenüber wir nicht einmal eine rudimentäre Selbständigkeit besitzen. Die Tore der Sinne können wir schließen, unsern Ort im Raum können wir ändern, ja unser "In-Sein" selbst in unserer Vorstellung zur Monade schrumpfen lassen, aus dem Lauf der Zeit aber können wir uns auf keine Weise "hinausvorstellen". Wenn wir uns vorzustellen suchen, daß die Zeit stehenbleibt, bildet sich unwillkürlich

die Vorstellung von einer "übergreifenden" Zeit, die unbeeindruckt weiterläuft, dieweil das Universum seine Uhr anhält; dasselbe gilt für die „ewige Wiederkehr“.

17.3. Diejenigen des inneren Sinnes schließlich sind teils zu diffus und zu wenig trennbar, teils zeigen auch sie nur ein einfaches "mehr oder weniger", das zudem kaum quantifizierbar ist; sie erfüllen damit nicht die in (8) genannten Kriterien für sinnvolle Mathematisierbarkeit. Von gänzlicher Regellosigkeit zu sprechen, wäre sicher falsch; aber von einer "Logik der Gefühle" etwa kann doch nur in einem sehr losen Sinne die Rede sein, und was in einem Roman überzeugt, ist noch lange kein allgemeines Gesetz. Immerhin wird man sagen können: wo ein ein Kunstwerk „überzeugt“, hat sein Urheber etwas Wahres getroffen, liegt also etwas Gesetzesartiges irgendwie zugrunde. Aber dieses Wahre bleibt im Kunstwerk ebenso verborgen wie im Leben, und der Grund für das Überzeugtsein muß erst ans Licht gebracht werden; oft ist nicht klar, auf welcher begrifflichen Ebene dieses Überzeugende gesucht werden muß, auf einer Tiefenschicht von „Urszenen“ oder dem Empfinden einfacher Harmonie. Dementsprechend ist ja auch das Überzeugtsein vielgestaltig und reicht von seelischer Erschütterung über ein ungeklärtes Gefühl des Stimmig- oder Zwingendseins bis zur kühlen Anerkenntnis einer technischen Leistung.

18. Zur Systematik und Vollständigkeit

18.1. Zum Schluß müssen wir zur Sprache bringen, was wir dem Leser bisher schuldig geblieben sind, obgleich die gesamte Kategoriendiskussion ihren Ausgang davon nahm, nämlich die beiden Fragen nach der Systematik und der Vollständigkeit. Wir sind das kategoriale System "von unten nach oben" durchgegangen, haben dabei die Kategorien kaum weniger "rhapsodisch aufgerafft" als Aristoteles und über das Systematische in ihnen nur Weniges bemerkt. Aber eine zusammenfassende, auf der Höhe der Forschung stehende Diskussion des menschlichen Sinnesapparats, der spezifischen Leistungen der einzelnen Organe und der Beziehungen zwischen ihnen kann nicht Aufgabe dieses Aufsatzes sein, in dem es, wie schon einleitend gesagt, eher um Dispositionen geht als um systematische Ausführung. Was das theoretische Agieren betrifft, wurde schon bemerkt, daß eine umfassende Systematisierung eine unsinnige, ja demonstrierbar unlösbare Aufgabe wäre; die oben angedeuteten (mathematisch-) kategorialen Ansätze sind in verschiedenen Richtungen ausgearbeitet ⁴⁶⁾, was näher darzustellen hier ebenfalls nicht unsere Aufgabe ist.

18.2. Vollständigkeit kann auf keiner Ebene garantiert werden. Zu allen Zeiten hat mystische Erfahrung das Wissen davon wachgehalten, daß dem Menschen noch andere Grundbefindlichkeiten zugänglich sind als die in Raum und Zeit. (Unsere Gegenwart hat, zu ihrem Schaden, hierin einen Tiefpunkt erreicht.) Solange es für diese Befindlichkeiten keine gängige und allgemein verstandene Begrifflichkeit (außer im Sinne einer "negativen Theologie") gibt, können sie natürlich nicht Gegenstand einer philosophischen Kategorienlehre sein, aber das könnte sich ja ändern.

Soweit mystisches Erleben Worte gefunden hat, weisen sie hin auf eine in diesem Erleben stattfindende Veränderung des kategorialen Systems, mit der Tendenz eines Verschwindens von Vielfalt und Besonderung ("Nirwana" bedeutet - soweit ich es verstehe - nicht Nichts im mathematischen Sinn einer

leeren Menge, sondern "Nichts Bestimmtes"). Man wird also eine gut entwickelte und gesicherte Theorie des kategorialen Systems benötigen, um dieser Sphäre begrifflich näherzutreten, sofern das überhaupt möglich ist. .

Die Kategorien sind wenigstens teilweise abhängig von der Entwicklung von Sinnesorganen, und ein System, das sich entwickelt hat, kann sich prinzipiell auch weiter (oder zurück-) entwickeln; im Hinblick auf kaum bestreitbare Leistungen "paranormaler" Wahrnehmung haben wir Grund zur Annahme, daß der gewöhnliche Wachzustand des modernen Menschen gewisse Quellen verschüttet hält ⁴⁷⁾. Vollends was das theoretische Agieren betrifft, müssen wir jederzeit mit der Herausbildung neuer Prinzipien der Begriffsbildung und der Ordnung von Begriffen rechnen. Es sollte zu denken geben, daß das Schlußprinzip der vollständigen ("mathematischen") Induktion, heute ein Basisaxiom der Lehre von den natürlichen Zahlen, nicht vor dem 17.Jahrhundert nachweisbar ist. Überhaupt scheint es ein Gesetz nicht nur der mathematischen Entwicklung zu sein, daß Elementarbegriffe (alle modernen Basisstrukturen, topologischer Raum, Graph, Halbgruppe, geordnete Menge, vor allem Menge selbst und Kategorie) sehr spät kommen, wenn das Gebäude schon recht prächtig dasteht, das dann mit ihrer Hilfe neu errichtet (und dabei erweitert) wird ⁴⁸⁾.

Andererseits kann Vollständigkeit (oder besser: die Möglichkeit der Vervollständigung) auch nicht ausgeschlossen werden. Jedes Wörterbuch enthält alle Kategorien; man muß sie nur herauspräparieren. Möglicherweise hat die Mathematik, alles Elementare und alle elementaren Begriffsverbindungen systematisch musternd und erforschend, in der Ausbildung der Grundbegriffe tatsächlich einen gewissen Abschluß erreicht; jedenfalls haben diese sich bisher als fähig erwiesen, alles, was wir überhaupt mit mathematisierbarer Regelmäßigkeit erfahren, auch zu Mathematik zu machen, und mathematische Modellbildung ist geradezu eine selbständige Disziplin geworden. Aber wohin wir auch kommen, werden wir auf dem Boden einer Kontingenz stehen, eines letzten "So-und-so-beschaffen-Seins", über dessen Grund oder Zweck wir nur spekulieren können und das wir hinnehmen müssen, wie es ist ⁴⁹⁾.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Die Kategorienlehre gehört nicht zu den prominenten agenda der Gegenwartsphilosophie; ich verweise auf die einschlägigen Artikel im Historischen Wörterbuch der Philosophie (ed. J.Ritter, Basel 1971ff), im Handbuch philosophischer Grundbegriffe (ed. H.Krings, München 1973ff), auf den historischen Teil in K.Oehlers Ausgabe der aristotelischen Kategorienschrift (Darmstadt 1984) sowie auf die Festschrift für K.Hartmann, Kategorie und Kategorialität (eds. D.Koch,K.Bort, Würzburg 1990). Resümiert man diese Überblicke, kommen Zweifel daran auf, ob selbst unter denen, die am Kategorienbegriff festhalten, ein Minimalkonsens darüber besteht, was unter ihn fallen soll. Nicht einmal über die (in dem hier vorgelegten Entwurf nicht auftretende) Dichotomie von "Seinskategorien" und "Erkenntniskategorien" scheint Einigkeit zu herrschen. - Der (für mich) bemerkenswerteste Versuch, dem Kategorienbegriff durch Zusammenführung von Transzendentalphilosophie und Phänomenologie neue Dignität zu verleihen, stammt von H.Krings (Tanszendente Logik, München 1964). Krings gewinnt

seinen Begriff von Kategorie durch eine sorgfältige Analyse des "transzendentalen Aktus". - Die Peircesche Kategorienlehre und ihre Beziehung zu hier umrissenen verdient eine gesonderte Betrachtung; ihre ganz andere Organisation wird sie als Ergänzung erscheinen lassen.

(2) Kritik der reinen Vernunft, B 128.

(3) "Die Kategorie hat keinen andern Gebrauch zum Erkenntnis der Dinge, als ihre Anwendung auf Gegenstände der Erfahrung." So der Titel von §22 der "Transzendentalen Deduktion"; diese Ermahnung findet sich aber in der Vernunftkritik passim.

(4) Siehe dazu B 305. Dennoch bleibt merkwürdig, daß er über den Unterschied zu den aristotelischen Kategorien kein Wort verliert.

(5) Siehe dazu meinen Aufsatz "Categories in Philosophy and Mathematics", in: M.Rahnfeld (Hrsg.), Gibt es sicheres Wissen?, Leipziger Universitätsverlag 2006.

(6) Siehe dazu die Berichte in den oben zitierten Artikeln, besonders den Artikel von H.M.Baumgartner im "Handbuch".

(7) Die Gefahr der Trivialisierung besteht auch überall da, wo der Kategorienbegriff zu weit genommen und als Folge davon die Möglichkeit vollständiger Erfassung bestritten wird, wie bei N.Hartmann, aber auch bei H.Krings (Anm. 1). Wenn jedes Prinzip der Synthesis im Sinne transzendentaler Einheitsstiftung als Kategorie gelten soll, wird dieser Begriff entbehrlich (so wie wenn jeder ein Hofrat ist). Außerdem kann man dann immer noch nach "Basiskategorien" fragen, aus denen alle andern sich konstruieren oder ableiten lassen (und das werden dann die "eigentlichen" Kategorien sein).

(8) Zitiert aus: Kungfutse, Gespräche, übers. von R.Wilhelm, Diederichs, Köln 1955 (Hervorhebung von mir).

(9) A. Gosztonyi (Der Raum, München 1976, Bd.1, Einleitung) findet sogar 29 Arten von Raum; das mag übertrieben sein.

(10) Maximen und Reflexionen, Nr. 488 in der Hamburger Ausgabe, München 1978, Bd. 12.

(11) Besonders vielversprechend scheint mir hier die auf Ansätze von A.Lorenzer zurückgehende Auffassung vom "Primat der Szene";vgl. D.Niedecken, Zur Selbstreferenz des Bewußtseins, Psyche LVI (2002), Heft 9. Die Entwicklung ist aber noch im Fluß.

(12) Zur Sprachregelung: die Physik spricht auch von einem „Bewegungszustand“ und meint damit, daß ein Bewegungsgesetz in diesem Zustand konstant bleibt, natürlich nicht der Ort des Bewegten. Ähnlich „Gesundheitszustand“.

(13) Übrigens kann man gar nicht sinnvoll fragen, ob ein Naturvorgang im mathematisch

strengem Sinne kontinuierlich ist, sondern nur, ob zu seiner mathematischen Behandlung ein kontinuierliches oder ein diskretes Modell angemessen ist. Im Mikroskopischen führt die Quantenmechanik schon zu einer Diskretisierung, allerdings mit einem kontinuierlichen Hintergrund.

(14) "Veränderung kann daher nur an Substanzen wahrgenommen werden" (B 231) und: "Der Verstand verlangt zuerst, daß etwas gegeben sei (wenigstens im Begriffe), um es auf gewisse Art bestimmen zu können. Daher geht im Begriffe des reinen Verstandes die Materie der Form vor" (B 322/323). Formallogisch kann dieser Primat der Substanz allerdings aufgehoben werden, wie Schönfinkel gezeigt hat (Math. Ann. 92, 305-316)

(15) Vaihinger hat die Ubiquität dieser Denkfigur in seiner "Philosophie des Als-Ob" ausgebreitet; freilich in unsinniger Übertreibung, indem er die Fiktionen für widersprüchlich erklärte. Widersprüche treten aber erst dann auf, wenn man die Fiktionen mit Realitäten verwechselt.

(16) Formal ist Kausalität eine zweistellige Relation vom Ordnungstyp auf einer Menge von Ereignissen (wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß die Ereignisse genügend deutlich voneinander trennbar sind). Die eindringendste Mathematisierung von „absoluter“ Kausalität, nämlich Determiniertheit, geschieht durch Differentialgleichungen, welche die Veränderung einer Größe als Funktion ihres Zustands beschreiben.

(16a) Siehe H. Zimmer, Philosophie und Religion Indiens, Suhrkamp 1973, S.481.

(17) Categories of Space and of Quantity, in: The Space of Mathematics, eds. Echeverria/Ibarra/Mormann, de Gruyter 1992.

(18) Wenn man bei einem Gegenstand "zweimal hinschauen" muß, um ihn zu erfassen, ist das ein anderer Vorgang (im Prinzip hätte auch der erste Blick genügen können). Es kommt selten vor, daß *prinzipiell* erst zeitlich gegliedertes Hinsehen die Möglichkeit bietet, einen Gegenstand als den, der er ist, zu erfassen; der Hauptfall ist das Betrachten eines Gegenstands von verschiedenen Seiten. Hier steht dem instantanen Erfassen aber nur die Organisation unserer Sinne entgegen; eine auf einen Moment zusammengedrückte Melodie dagegen würde gar nicht mehr vorhanden sein.

(19) In 421 a findet sich die interessante Behauptung, daß der Mensch deswegen das klügste Lebewesen sei, weil bei ihm der Tastsinn am meisten ausgebildet ist. Zur Bevorzugung des Gesichtssinns: Met. I 980 a. "Mit eigenen Augen gesehen haben" verleiht dem Überzeugtsein immer eine besondere Qualität. Daß die Erde eine Kugel ist, konnte schon lange vor dem Aufkommen von Raumfahrt nicht mehr bezweifelt werden; die Anschauung davon, die wir jetzt haben, gibt der Gewißheit sozusagen den Schlußstein. Erschlossenes und Angeschautes kommen zur Deckung.

(20) Vor allem H. Schmitz hat darauf nachdrücklich hingewiesen; siehe sein „System der Philosophie“, Bonn 1969.

(21) Man denke an die Unentscheidbarkeits- und Unvollständigkeitssätze der Logik seit Gödel. Aber auch ohne tiefe Sätze läßt sich einsehen, daß z.B. nicht alle Funktionen zwischen ganzen Zahlen rekursiv sind.

(22) Die Farbe wird am leichtesten entbehrt (man gewöhnt sich schnell an Schwarzweiß) und erscheint als eine Art Zugabe zur kategorialen Ausstattung. Fragt man darwinistisch nach ihrem Zweck, wird man diesen vielleicht weniger in Signalfunktionen zu suchen haben als im Einfluß auf die Stimmung.

(23) De Anima, 413 b, 435 a: "Alle Lebewesen scheinen den Tastsinn zu haben". Der Tastsinn ist derjenige, den man am wenigsten "deaktivieren" kann; der gänzliche Verlust des Tastsinns bedeutet den Tod des Lebewesens (435 b).

(24) Vgl. Faust I, Geisterchor 1607-1626: „Du hast sie zerstört, die schöne Welt ... Prächtiger baue sie wieder, in deinem Busen baue sie auf.“

(25) Das universell verbreitete cgs-System reduziert alles auf Ausdehnung, Schwere und Zeit. Aber prinzipiell sind viele andere Basissysteme möglich.

(26) Siehe dazu meine „Mathematik für Philosophen“, Leipzig 2005, Kap.5.

(27) Eine affine Ebene, die den Satz von Pappus-Pascal erfüllt, ist eine Koordinatenebene über einem Körper; gibt es in ihr die Relation des "zwischen", ist dieser Körper angeordnet und enthält daher eine Kopie des rationalen Körpers.

(28) Der Junktor "weder p noch q" ("Sheffer-Stroke") erzeugt alle andern. Zur Axiomatik der Aussagenlogik siehe etwa E.Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, New York 1979.

(29) Die philosophische Anthropologie hat für diese Unspezifiziertheit die Bezeichnung "Mängelwesen" aufgebracht, ein grotesker terminologischer Mißgriff. Natürlich wird der Mensch in *einzelnen* Sinnes- oder Körperleistungen von bestimmten Tierarten weit übertroffen. Aber es gibt keine Tierart, die eine auch nur annähernd so reichhaltige kategoriale Ausstattung besitzt wie der Mensch.

(30) D.h. Grundsätze, von denen man ausgeht, ohne sie im Rahmen der Theorie zu hinterfragen; die Theorie hat nur die Aufgabe, ihre Konsequenzen zu entfalten. In der älteren philosophischen Diskussion sind Axiome evident wahre und fundamentale Sätze (wie „Jedes Ding ist sich selbst gleich“). Siehe auch meinen Aufsatz „Über das axiomatische Denken in der Mathematik“, Mitt. Math.Ges.Hamburg, 1993.

(31) Die Charakterisierung der Mathematik als einer explicatio mentis findet sich (soweit ich sehe) bei Cusanus nicht, aber er äußert sich gelegentlich in diesem Sinne; z.B. de coniecturis I, cap. 2: Nec est aliud numerus quam ratio explicata. Für seine allgemeine Schätzung der Mathematik siehe vor allem de docta ignorantia I, cap. 11 ff. (Ich danke Herrn H.G.Senger (Köln) für seine Hinweise.)

(32) Siehe auch meinen Aufsatz "Mathematik und Anwendung", in: "Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik", Leipziger Universitätsverlag 2003.

(33) Die griechische Geometrie erfaßte, in modernen Termini, im wesentlichen algebraische Mengen von kleinen Graden und Dimensionen.

(34) Siehe meinen Aufsatz „Von Zahlen und Figuren“, Hamburger Beiträge zur Mathematik, 2006.

(35) Siehe dazu Mac Lane/Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer-Verlag 1992.

(36) Genauer: ein Modell der Peanoaxiome. Gewöhnlich konstruiert man ein solches allerdings im Rahmen eines Mengenuniversums.

(37) Die Assoziativität ist die weniger auffallende (weil nur im theoretischen Agieren dingfest zu machende), aber stärkere Eigenschaft. Über nichtassoziative binäre Strukturen ist wenig bekannt; alle Ausnahmen (vor allem Strukturen vom Lie-Typ) besitzen eine "assoziative Umgebung", wie Algebren verschiedenen Typs. Siehe meinen Aufsatz "Über Assoziativität und Kommutativität", Math.Sem.Ber. 2003.

(38) Die Elemente des Moduls sind Quanta, die des operierenden Rings deren Proportionen; die Gleichung $X:Y = p$ muß als $X = pY$ gelesen werden. Quanta verschiedener Art, die nicht "eigentlich" addiert, aber sehr wohl "formal zusammengedacht werden können", sind dann linear unabhängig. Für Näheres siehe meinen Aufsatz "Über Linearität", in: Drei Studien zur Struktur der Mathematik, Hamburger Beiträge zur Mathematik, Nr.229, 2005.

(39) Jede partiell geordnete Menge läßt sich als Kategorie auffassen, zwischen (kleinen) Kategorien und (orientierten Multi-) Graphen besteht eine Äquivalenz; siehe dazu S.MacLane, Categories for the working Mathematician, Springer-Verlag 1971.

(40) Wie in allen Kategorien vom Typus "Menge plus Struktur", wo man nur prüfen muß, daß die Verknüpfung wieder ein Morphismus ist.

(41) Die Rolle der Kategorientheorie als einer mathematischen Theorie der Universalien ist Gegenstand eines Aufsatzes von D.P.Ellerman, Categories and Concrete Universals, Erkenntnis 28 (1988) 409-429. Für die Adjunktion als Denkfigur siehe den so betitelten Aufsatz in meinen "Beiträge[n] zu einer Philosophie der Mathematik", Leipzig 2003.

(42) Ein erster Hinweis auf die selbständige Rolle der Kategorientheorie war die Erkenntnis von Mac Lane, daß lineare Mathematik sich durch ihre "pfeiltheoretischen" Eigenschaften charakterisieren läßt, nämlich im Begriff der abelschen Kategorie. Den endgültigen Schritt vollzog im wesentlichen F.W.Lawvere. Das (große) mathematische Publikum hat das noch immer nicht zur Kenntnis genommen. (Aufgabe der Wissenschaft ist heute in der Tat nicht mehr das Denken, sondern das Machen.)

(43) Ein boolescher Topos mit Auswahlaxiom und einem "natural numbers object" läßt sich als ein Mengenuniversum auffassen. Näheres dazu bei Mac Lane/Moerdijk (Anm. 33).

(44) Siehe z.B. C. MacLarty in *Philosophia Mathematica* III vol.13 (1) (2005).

(44a) Die zahllosen bisher entstandenen Farbenlehren zielen vor allem auf eine Gliederung des Farbenreichs, also auf Deskription, wobei Komplementärbildung der fundamentale Ordnungsfaktor ist; das einzige konstruktive Moment ist die Mischung, die aber auch aus dem gegebenen (und nicht erweiterbaren) Bereich nicht hinausführt. Einen guten Überblick bietet die verdienstvolle Dissertation von A.Schwarz, die Lehren von der Farbenharmonie, Göttingen/Zürich 1998.

(45) In der einschlägigen Diskussion als "A- und B-Reihe" bekannt; siehe z.B. P.Bieri, *Zeit und Zeiterfahrung*, Frankfurt/M 1972.

(46) Z.B. in der System- und der Automatentheorie; siehe etwa Barr/Wells, *Category Theory for Computing Science*, Prentice Hall 1990; Ehrig/Pfender, *Kategorien und Automaten*, Berlin 1972. Weit entwickelt ist auch eine "kategoriale" Logik, die eine Verallgemeinerung der klassischen ist in demselben Sinn, in dem die Topostheorie eine Verallgemeinerung der Mengentheorie ist. Kategoriales in Sprache und Logik haben G.E.Reyes und andere in einer Reihe von Arbeiten untersucht; ich nenne nur La Palme-Reyes/Macnamara/Reyes/Zolfaghari, *Count Nouns, Mass Nouns and their Transformations: a Unified Category-theoretic Approach*, in "Language, Logic and Conceptual Representation", ed. Jackendoff/Bloom/Wynn, MIT Press. Eine Zusammenfassung bietet O. Runge, *Kategoriale Strukturen in Sprache und Logik/ die Theorie der Arten*, Diplomarbeit am FB Mathematik, Hamburg 2005.

(47) Siehe etwa R.Otto, *Das Heilige*, München 1979.

(48) Vergleiche dazu des Aristoteles Bemerkungen über das „für uns Frühere“ und das „von sich aus Frühere“.

(49) So daß ein "rhapsodisches" Moment in einer philosophischen Kategorienlehre letztlich nicht vermieden werden kann und diese immer „work in progress“ bleiben muß. Der Anschein des Systematischen ist freilich in der Logik leichter herzustellen als in der Lebenswelt.