Hamburger Beiträge zur Mathematik

Drei Studien zur Struktur der Mathematik

von Ernst Kleinert

Heft 229
Dezember 2005

Vorwort

Die vorliegende kleine Sammlung (deren Stücke in der Reihenfolge ihres Entstehens angeordnet sind) versteht sich als Fortsetzung meiner "Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik" (Leipziger Universitätsverlag 2002), und deren Vorwort ist auch hier vorangestellt zu denken. Ein paar Bemerkungen verdient der Titel, den ich gewählt habe. Mathematik hat zu tun mit Strukturen, aber in welchem Sinne hat sie selbst eine Struktur?

Zunächst natürlich im naheliegenden Sinn eines strukturierten Ganzen. Wenn überhaupt etwas, dann ist die Mathematik ein Denkgebäude, welches sowohl an Ausbreitung wie an Tiefe groß genug ist, um Gliederungen und Arten des Zusammenhangs einzelner Teile erkennen zu lassen. In den "Beiträgen" ist es namentlich die Studie zum (kategorialen) Begriff der Adjunktion, in der solche Zusammenhänge zum Thema werden. Das gleiche Ziel, nämlich die Rolle *eines* strukturbildenden Begriffs in verschiedenen Teilen der Mathematik zu verstehen, verfolgt der Aufsatz über Linearität. Von einer "Architektur" der Mathematik, wie sie einst Bourbaki vorschwebte, ist man damit natürlich noch weit entfernt. Bildlich gesprochen, sind es einzelne Linien einer Fassade, deren Gesamtgestalt wir noch nicht fassen können. Mir scheint, daß die Dinge dafür noch zu sehr im Fluß sind.

Der zweite Gesichtspunkt ergibt sich, wenn wir Mathematik nicht als Resultat, sondern als Tätigkeit fassen und nach leitenden Prinzipien dieser Tätigkeit Ausschau halten. In der Folge führt dies auf die Frage eines mathematischen Stils. Spengler stellte - in manchem fragwürdig, aber wohl doch nicht gänzlich verfehlt - die "faustische" Mathematik des Abendlands der "apollinischen" der Antike gegenüber. Jeder moderne Kenner wird präzisieren können, worin sich jene von ihren antiken und sonstigen Vorstufen unterscheidet - formal das Streben nach Verallgemeinerung und größerer Einheit, gleichzeitig die systematische Art, sich überallhin auszubreiten (womit Kants Forderung an jede Wissenschaft, die größte Mannigfaltigkeit unter die größte Einheit zu fassen, Genüge getan wird), inhaltlich die "Dynamisierung", die Bevorzugung von Funktionen. Die "Beiträge" enthalten hierzu den Aufsatz "Vom Vorrang der Morphismen über die Objekte" (auch "Mathematik und Konstruktion" könnte genannt werden); der vorliegende Text über Strategien des mathematischen Denkens schließt sich dem an. Auch hier ist es für umfassende inhaltliche Charakterisierungen (wenn solche überhaupt je möglich sein sollten) sicher zu früh. Von der paradigmatischen Rolle der Infinitesimalmathematik (die Spengler als besonders "faustisch" erschien) ist nur der genannte Vorrang übriggeblieben; die diskrete und kombinatorische Mathematik hat heute mindestens den gleichen Stellenwert.

Schließlich gibt es einzelne mathematische Objekte und Begriffsbildungen, deren universelle Gegenwärtigkeit zur Frage nach ihrer Rolle und strukturierenden Potenz im mathematischen Gesamtgefüge herausfordert. Den bei jeder binären Komposition auftretenden Begriffen von Assoziativität und Kommutativität habe ich eine von einigen Jahren erschienene Studie gewidmet (Math.Semesterber. 2003). Den vielen

Besonderheiten der Zwei, dieser ersten wirklichen Zahl, und dem möglichen Zusammenhang dieser Besonderheiten nachzugehen, ist eine Aufgabe, die mich seit langem angezogen hat wie Weniges sonst. Durch viele Jahre habe ich der Versuchung widerstanden, sie mit unzureichenden Mitteln und Kennntnissen anzugreifen. Ob der hier vorgelegte Versuch dem Gegenstand gerecht wird, mag der gelehrte Leser selbst beurteilen.

Hamburg, im Dezember 2005.

Inhalt

Über Linearität

1

Jeder Kenner der modernen Mathematik wird der These zustimmen, daß lineare Prinzipien in ihr eine fundamentale Rolle spielen. Andererseits ist es ein berechtigter Stolz eben dieser Mathematik, daß sie die Begrenzungen des Linearen in so vielen Bereichen überwunden hat und zu überwinden fortfährt. Die Synthese des scheinbar Divergenten liegt darin, daß das Nichtlineare - Polynome, Differentialgleichungen, Katastrophen - vermittels des Linearen, durch Linearisierungen auf höheren begrifflichen Ebenen verständlich und beherrschbar gemacht wird [1)]; das Hauptbeispiel dafür ist, etwas schlagwortartig gesagt, die Mathematisierung der Gestalt durch die Zahl [2)]. Will man einen Überblick über die Struktur der heutigen Mathematik gewinnen, will man weiter die Stellung der Mathematik im Ganzen des theoretischen Agierens verstehen (und das ist die Grundaufgabe einer Philosophie der Mathematik), wird es also notwendig erscheinen, die verschiedenen Erscheinungsformen und Wirkungsweisen des Linearen zu sichten und zu ordnen und der Frage nachzugehen, wodurch eigentlich das Lineare seine fundamentale Bedeutung gewinnt. Dieser Aufgabe widmet sich der vorliegende Beitrag. Daß hierbei weder Vollständigkeit noch letzte Worte angestrebt werden können, versteht sich von selbst; eine erschöpfende Behandlung des Themas würde nichts weniger voraussetzen als ein Durcharbeiten der gesamten gegenwärtigen Mathematik.

2

Zunächst zur näheren Bestimmung unseres Begriffs. Der mathematische Begriff des Linearen ist einerseits enger, andererseits weiter als der ursprüngliche und außermathematische. "Linea" bedeutet "Richtschnur", auch die Ziellinie beim Wettkampf [3)], ist also eindimensional und gerade. Im gewöhnlichen, sowohl direkten wie übertragenen Gebrauch müssen "Linien" nicht gerade sein; weder sind dies die Umrißlinien der Berge noch die "Linien des Lebens", von denen Hölderlin spricht. Das Eindimensionale kann näher bestimmt werden als das, was durch Entfernen eines Punktes (lokal) unzusammenhängend wird. Schwieriger ist die Bestimmung des Geraden; spricht man von kürzester Verbindung, macht man sich von einer Metrik abhängig, die von einem rein geometrischen Gesichtspunkt aus keineswegs als primär erscheint. Die Definition Euklids, gerade sei, was "sich zu seinen Teilen gleich verhält", bleibt dunkel [4)]; nicht sehr klar ist auch die von Platon: gerade sei, "dessen Mitte die Enden deckt" oder "dessen Mitte vor beiden Enden davor ist" [5)]. Eine wirkliche Definition ist auf dieser Ebene nur implizit möglich, nämlich in dem Axiom, daß durch je zwei Punkte *genau eine* Gerade gehen soll; explizit erst nach der Algebraisierung der Geometrie, der Einführung von Koordinaten. Daß Geraden kürzeste Verbindungen sind, wird dann ein beweisbarer (und nichttrivialer) Satz. Die Algebraisierung führt auch sofort zur Verallgemeinerung im Hinblick auf die Dimension: linear ist, was sich durch Gleichungen vom ersten Grad beschreiben läßt. Bemerkenswert ist schon die formale Identität dieser Beschreibungen; mit Gleichungen der Form $Ax = b$ (wo A eine Matrix und b ein Vektor aus Konstanten ist) kann man Punkte auf einer Geraden, Punkte oder Geraden in einer Ebene, Punkte, Geraden oder Ebenen im Raum definieren und so fort [6)].

3

3

Schon Mac Lane erkannte, daß eine rein kategorial ("pfeiltheoretisch") formulierte Axiomatik von Objekten und Morphismen für die Grundoperationen der linearen Algebra ausreicht, vor allem die Beschreibung von Morphismen durch Matrizen. Es ist ein bemerkenswertes Resultat der so entspringenden Theorie der abelschen Kategorien, daß umgekehrt jede solche Kategorie in eine Modulkategorie eingebettet werden kann; die Objekte können also anhand der Struktur des Netzwerks von Morphismen, in das sie eingebettet sind, als lineare erkannt werden, als Moduln über einem Ring. Sieht der erste Blick Linearität in der inneren Ordnung von Gegenstandsbereichen, denen dann lineare Abbildungen als ihre natürlichen Morphismen zugeordnet sind, wird nun diese Reihenfolge umgekehrt. Dies entspricht einer allgemeinen Tendenz der mathematischen Moderne, wonach die Morphismen wichtiger sind als die Objekte, und Kategorien eigentlich nichts weiter als Netze von Bezügen, in denen die Objekte durch ihre Stellung im Netzwerk charakterisiert werden und nicht durch "innere" Eigenschaften [7)]. Wenn man will: der "dynamische" Aspekt dominiert den "statischen".

4

Warum mathematische Betrachtung nach Linearisierung strebt, ist leicht zu erkennen. Alles theoretische Agieren sucht das Komplizierte auf das Einfache, das Unbekannte auf das Bekannte zurückzuführen, und nichts kennen wir in mathematicis besser als das Lineare. Endliche erzeugte abelsche Gruppen beherrschen wir vollständig; Vektorräume (endlicher Dimension) kennen wir so gut wie ihre Skalarbereiche. Vor allem aber gibt es einfache und effiziente Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme; das auf Gauß zurückgehende Grundverfahren darf wohl der erfolgreichste Algorithmus der Mathematik genannt werden. Dahinter steht, algebraisch betrachtet, daß man hierzu nur die beiden *Basis*operationen eines Körpers invertieren muß (und diese sind per Axiom invertierbar), nicht aber *abgeleitete* Operationen (derived operators im Sinne der universellen Algebra) wie Quadratbildung oder allgemeiner Polynomfunktionen von höherem als erstem Grad. Mehr strukturell kann man feststellen, daß die Lösungsmengen linearer Systeme selbst eine lineare (affine) Struktur tragen und insbesondere keine Singularitäten haben können; dahinter wiederum steht die Eigenschaft abelscher Kategorien, daß jeder Morphismus Kern und Cokern hat. Das Einfachste aber ist für uns das Lineare deswegen, weil es ein Erstes ist; wovon unten noch Näheres.

Wir begeben uns nun auf einen Rundgang durch eine hoffentlich repräsentative, aber natürlich nicht vollständige Sammlung von Linearisierungen; die Mehrzahl der Beispiele gehört dabei zu dem schon genannten Hauptbeispiel, der Mathematik der Gestalt, also der Topologie und namentlich der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Ihre Linearisierung beginnt mit der des Raumes selbst, in dem alle Gestalt sich zeigt. Daß man, nach Wahl eines "Nullpunkts", alle Raumstellen durch Angabe von drei Größen bestimmen kann, ist in elementaren Ortsangaben wie "zehn Schritte geradeaus, dann fünf nach rechts" implizit enthalten. Daß man aber die Raumstellen selbst als "Rechenobjekte" betrachten und benutzen kann, und zwar derart, daß algebraische und geometrische Elementaroperationen einander entsprechen, das ist sowenig selbstverständlich, daß es der Arbeit der Jahrhunderte bis auf Fermat herab bedurfte, bis Descartes zur vollen Einsicht kam in das, was heute jeder Oberschüler lernt. Die Linearisierung des Raums ist aber auf die Koordinaten nicht angewiesen, sondern ergibt sich natürlicher, indem man die Punkte als *Operatoren* auffaßt. Je zwei Punkte A,B bestimmen eine Translation T(A,B), die jedem C den Endpunkt der an C angetragenen, zu AB parallelen Strecke zuordnet. Ersichtlich ist dann T(B,A) zu T(A,B) invers, und mit elementaren Argumenten bestätigt man die Regeln

$$T(A,B)(C) = T(A,C)(B) \quad \text{und} \quad T(A,T(A,B)(C))(D) = T(A,B)(T(A,C)(D)) \,.$$

Erklärt man nun irgendein A zum Nullpunkt O, erhält man durch

$$B + C := T(O,B)(C)$$

auf der Menge der Punkte eine Gruppenstruktur, für welche die beiden erwähnten Regeln gerade Kommutativität und Assoziativität aussagen; O ist neutrales Element. Für die volle Vektorraumstruktur fixiert man eine Gerade durch O und darauf einen von O verschiedenen Punkt E und betrachtet die Punkte B auf der von O durch E gehenden Halbgeraden als Proportionen, nämlich der Strecke OB zur "Einheitsstrecke" OE. Ist nun A irgendein weiterer Raumpunkt, kann man mittels des Strahlensatzes einen Punkt X auf der durch O und A gehenden Halbgeraden konstruieren, derart, daß sich die Strecke OX zu OA verhält wie OB zu OE; da OE die Einheitslänge ist, repräsentiert dann X das Produkt von A mit der Proportion B. Damit sind die wesentlichen Konstruktionen genannt, die den Anschauungsraum zum Vektorraum machen; zu höheren Dimensionen hat dann Graßmann den Weg gezeigt [8)]. Mathematisch fruchtbar wird das Rechnen mit den Punkten aber erst durch die elementare, aber doch nicht selbstverständliche Tatsache, daß den geometrischen Grundoperationen des Spiegelns, Drehens und Verschiebens auch algebraische Grundoperationen, eben lineare entsprechen.

Die Mannigfaltigkeiten selbst sind nun zunächst "abstrakt" definiert, durch "Verkleben" von Teilen, die zu offenen Kugeln eines linearen Raumes (damit auch zu diesem selbst) homöomorph sind. Das Verkleben führt in aller Regel aus diesem Koordinatenraum heraus, wofür schon die Kreislinie ein Beispiel ist; nach einem Satz von Whitney aber kann jede n-Mannigfaltigkeit in einen linearen Raum der Dimension 2n+1 eingebettet werden. Die Einbettung führt unmittelbar zur Metrisierbarkeit und zu Normalen und damit zu neuen Ingredientien der Theorie. Vielleicht noch interessanter als der Nutzen dieses Satzes für andere Probleme ist das Problem, das er selbst stellt, nämlich nach einer minimalen Dimension, in welche eingebettet werden kann [9)].

6

Die direkteste Form von Linearisierung ist die durch Approximation [10)], zum ersten Mal systematisch entfaltet in der Exhaustionsmethode der Griechen. Im Unterschied zu modernen Anwendungen war bei Archimedes der Zweck ein theoretischer, nämlich den *genauen* Inhalt krummlinig begrenzter Flächenstücke anzugeben, indem mittels Exhaustion durch geradlinige gezeigt wird, daß er weder größer noch kleiner sein kann als der behauptete Wert, der allerdings vorweg "erraten" werden muß. Der moderne Integralbegriff systematisiert das Verfahren, wobei der "Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" das Raten (meistens) überflüssig macht. Zu nennen sind hier auch die zahlreichen Situationen, in denen die erste, die lineare Approximation einer beliebigen Funktion als ihr "essentieller" Teil erscheint und die ausschlaggebende Rolle spielt (Transformationsformel, Umkehrsatz, implizite Funktionen). Dies tritt rein hervor in der Tatsache, daß ein beliebiger Morphismus von Mannigfaltigkeiten *lineare* Abbildungen der Tangentialräume induziert; was vielleicht nicht immer gebührend hervorgehoben wird, weil es sich so selbstverständlich aus dem Mechanismus des Differentialkalküls ergibt.

Geht es um qualitative Fragen, kann die lineare Approximation ebensogut sein wie das "Original" und hat vor diesem den entscheidenden Vorzug, daß ihre Bestandteile sich einem standardisierten Kalkül bieten. In der Mathematik der Gestalt, der Topologie und insbesondere der Theorie der Mannigfaltigkeiten, wird das "ebensogut" durch "homotopieäquivalent" präzisiert und führt zu der Möglichkeit, eine große Klasse solcher Objekte als Aggregate sehr einfacher Gebilde, Simplices oder Kuben, anzusehen und unter den Morphismen zwischen ihnen nur die stückweise linearen zuzulassen. Die Prinzipien der Aggregatbildung führen damit zu einem förmlichen Kalkül der Gestalten, der tiefliegende Fragen einer elementaren Behandlung zugänglich macht [11)].

7

Eine große und wichtige Klasse von Gestalten, die alles einschließt, was physisch als Gestalt erfahrbar ist, ist die der kompakten Hausdorffräume. Sie wird durch den Gelfandisomorphismus *ohne Rest* in lineare Struktur übersetzt, nämlich die einem Raum X zugeordnete Algebra der stetigen Funktionen X --> $\mathbb{C}$; dabei kann X als Spektrum der Funktionenalgebra aus dieser rekonstruiert werden. Die Beziehung ist funktoriell und stiftet eine Äquivalenz von Kategorien, deren lineare Seite die kommutativen, halbeinfachen C*-Algebren bilden. Führt auch gerade die *vollständige* Entsprechung der Struktur dazu, daß die Funktionenringe nicht so unmittelbare Aufschlüsse gewähren wie etwa Homologiegruppen oder andere Funktoren - die eben genügend viel "vergessen", dafür das Nicht-Vergessene transparent machen - , so bleibt doch bemerkenswert, daß die rein topologisch kodifizierte Gestaltstruktur ein vollwertiges algebraisches Äquivalent hat, dessen "Substrat" eine lineare Struktur ist, nämlich ein Hilbertraum. Eine Hauptrolle übernehmen die Funktionenringe (und zwar für beliebige Räume) in der Maßtheorie; Maße auf X entsprechen linearen Funktionalen auf dem Funktionenring. In reichster Weise demonstriert dann die weitere Entfaltung der Funktionalanalysis, wieviel man über (nichtlineare) Funktionen lernen kann, indem man die linearen Gesamtheiten studiert, zu denen sie gehören.

8

Ein Sonderfall der Linearisierung in der Mathematisierung von Gestalt ist die "spekulative" Substitution des Linearen im Unendlichkleinen, wie man sie in der Theorie der Differentialgleichungen durch Richtungsfelder zu veranschaulichen sucht. Der Gedanke ist im Kern sehr alt und steckt vielleicht schon in der von Aristoteles überlieferten These des Protagoras, daß die Tangente an einen Kreis mit diesem mehr als einen Punkt gemeinsam habe [12)]. Cusanus denkt den Kreis als Unendlicheck mit infinitesimalen geraden Seiten [13)]. Die Begründer des "calculus", der heutigen Analysis, arbeiteten mit Infinitesimalien der Ordnung 2, so daß eine Potenzreihenentwicklung mit infinitesimalem d die Form $f(a + d) = f(a) + f'(a)d$ hat; dabei wurde eine solche Entwickelbarkeit überall vorausgesetzt und der Funktionsbegriff nicht weiter thematisiert. Axiomatisiert man dieses Vorgehen, wobei es genügt, $a = 0$ zu betrachten, gelangt man zum Axiom von Kock-Lawvere: jede Funktion $D \dashrightarrow R$, wo R ein kommutativer Ring mit Eins und $D = \{x \in R \mid x^2 = 0\}$ ist, ist linear, hat also die Form $f(d) = f(0) + bd$ mit eindeutig bestimmtem b. Im Mengenuniversum (mit klassischer Logik) ist hier nur $R = \{0\}$ möglich [14)]; doch existieren nichttriviale Realisierungen in Funktorkategorien (deren interne Logik intuitionistisch ist). Man spricht von "synthetischer Infinitesimalrechnung", da hier die infinitesimale Struktur axiomatisch eingeführt wird, während die Standardtheorie Funktionen konstruiert und ihre Differenzierbarkeit beweist; in Analogie zur alten Unterscheidung von analytischer und synthetischer Geometrie. Auf solche Weise lassen sich die "direkten" Argumente der Klassiker für die "strenge" Wissenschaft retten [15)].

9

Hier erscheint das Infinitesimale als *Teil* der Gestaltobjekte, sozusagen als ihre "subatomare Zone". Die Standardtheorie mathematisiert die infinitesimalen Aspekte auf andere Weise, durch Konstruktion linearer Strukturen, der Vektorbündel, unter denen das Tangentialbündel und die aus ihm ableitbaren Bündel die wichtigsten sind - Familien von Vektorräumen, die mit den Punkten des zugrundeliegenden Raumes stetig variieren und einer Bedingung "lokaler Trivialität" genügen. Auf den ersten Blick scheint paradox, daß diese Bildungen etwas zu unserem Verständnis der Räume beitragen können - muß man denn die Räume nicht schon kennen, um Bündel auf ihnen zu studieren? Die Antwort ist, wie in allen solchen Fällen [16)], daß Eigenschaften von Objekten ihre Eigengesetzlichkeiten haben, deren abstrakte Entfaltung für jeden konkreten Fall unmittelbar neue Informationen liefert. (Genau besehen, beruht hierauf das ganze der Mathematik eigentümliche Verfahren.)

Dasselbe gilt allgemeiner für die Linearisierung durch Betrachtung von Funktoren, deren Werte in abelschen Kategorien liegen. Auch hier bietet die Mathematik der Gestalten die schlagendsten Beispiele, Homologie und Cohomologie, K-Theorie und höhere Homotopiegruppen mit ihren zahlreichen Varianten und Verallgemeinerungen. Wieweit hier die "Approximation" geht, zeigt die Poincaré-Vermutung [17)]. Die genannten

Konstruktionen sind aber nicht auf den topologischen Fall beschränkt, sondern besitzen Analoga in rein algebraischen Kontexten, wie sie die homologische Algebra entwickelt; Hilberts Syzygienmoduln zeigen vielleicht zum erstenmal diese Technik, Informationen über das Nichtlineare (in diesem Fall Polynome) durch lineare Invarianten zu fassen. Auch zu Zahlkörpern gehören Gruppen von Idealklassen und Einheiten, die durch Inklusions- und Normabbildungen miteinander verknüpft sind, so daß ein förmliches Netz linearer Strukturen entsteht, das durch die Operation Galoisscher Gruppen weiter strukturiert wird; es ist nicht zuviel gesagt, daß die tiefsten Einsichten, die man bisher über die höheren Zahlbereiche gewonnen hat, auf dem Studium dieser Informationsgeflechte beruhen.

10

Ein großangelegtes und durch Jahrzehnte verfolgtes, in neuester Zeit kräftig vorangebrachtes Projekt der Linearisiung des Nichtlinearen ist die Theorie der Motive, eine Art universaler Cohomologietheorie, auch sie letztlich hervorgegangen aus dem Bestreben, die schlagkräftigen Methoden der algebraischen Topologie auch in einem rein algebraischen Rahmen zur Geltung zu bringen. Wir können hier nur eine sehr grobe Skizze dieser technisch aufwendigen Theorie geben, die ihre Endform wohl noch nicht gefunden hat [18]. Den Ausgangspunkt bilden die Gruppen der Zyklen; indem man die Morphismen der Varietäten, die polynomialen Abbildungen, zu Korrespondenzen erweitert (die noch einer geeigneten Äquivalenzrelation zu unterwerfen sind), erhält man Morphismenmengen, die a limine eine lineare Struktur tragen. Die eigentlich algebrogeometrischen Beziehungen kehren zurück durch die Verknüpfung der Morphismen mittels Projektionen und Schnittbildung; für $f \subset X\times Y$, $g \subset Y\times Z$ ist

$$g\circ f = p_{XZ}\,(p_{XY}^{-1}f \,.\, p_{YZ}^{-1}g)\ ,$$

wo die p Projektionen von $X\times Y\times Z$ in die durch die Indices bezeichneten Produkte sind und der Punkt Schnittbildung bedeutet [19]. Das ideale Ziel ist eine abelsche Kategorie mit Tensorprodukten (eine Tannaka-Kategorie), die nach allgemeinen Resultaten dann von selbst die Kategorie der Darstellungen einer Gruppe ist, der "motivischen Fundamentalgruppe". Es ist auf dem Grund und Boden dieser Linearisierung, daß die "wahre Einheit" von Arithmetik und Geometrie ihre Verwirklichung findet, wie sie zum erstenmal im späten 19. Jahrhundert in den Blick kam [20] und noch Grothendieck zur Emphase hinriß [21].

11

Damit sind wir bei der reinen Algebra angekommen. Eine weit ausgebaute Strategie der Linearisierung ist hier die Darstellungstheorie, welche die Struktur von Algebren (und dadurch mittelbar die von Halbgruppen) in Verbindung bringt mit der ihrer Modulkategorien. Kategorial betrachtet, liegen hier Funktoren vor, deren Argumente Algebren und deren Werte Kategorien sind, so daß Morphismen unter den Algebren Funktoren unter den Modulkategorien erzeugen. Die Zuordnung ist nicht treu, erhält aber wichtige Informationen. Man muß sich erinnern, daß Gruppen ursprünglich als Gruppen von Permutationen und geometrischen Transformationen auftraten; die letzteren stehen von vornherein in einem linearen Kontext, und eine Operation einer Gruppe auf einer Menge ist dasselbe wie ein Permutationsmodul. Die meisten einfachen Gruppen entstehen in "natürlicher Weise" aus linearen Gruppen [22)]. Die Darstellungstheorie macht hier also einfach eine Abstraktion rückgängig, deren Wert natürlich darin liegt, daß verschiedene Operationen als Operationen derselben Gruppe erkannt werden, wodurch ihre innere Verwandtschaft ans Licht tritt. Die Beziehung zwischen den Möglichkeiten, drei Objekte in eine Reihenfolge zu bringen, und den Symmetrien eines Dreiecks läßt sich kaum anders als mittels des abstrakten Gruppenbegriffs ausdrücken.

12

Eine ebenso wirkungsvolle wie erstaunliche Technik der Linearisierung, die vielen der angeführten Beispiele zugrundeliegt, verdient hervorgehoben zu werden: die Bildung freier Moduln. Elemente beliebiger Mengen, die miteinander nichts zu tun haben müssen, können zu Basiselementen eines Moduls gemacht werden, wobei auch der Koeffizientenring beliebig ist. Früher sprach man von "formalen Linearkombinationen", keine glücklich gewählte Bezeichnung, denn in der Mathematik ist alles formal, aber doch das Faktum festhaltend, daß weder die spezifische Natur dieser Elemente noch eine besondere Beziehung zum Koeffizientenring in die Konstruktion eingehen. Auf den ersten Blick scheint sie darum zur Nutzlosigkeit verurteilt; aber natürlich werden jene spezifischen Strukturen durch anschließende weitere Konstruktionen wieder ins Spiel gebracht. In einem Gruppenring bringt die "interne" Multiplikation der Basiselemente eine Algebrenstruktur hervor, in der Inzidenzalgebra einer partiell geordneten Menge ist es die Anordnung, welche das Faltungsprodukt erzeugt. Die Kettenmoduln der (topologischen) Homologietheorie werden durch Randabbildungen in Beziehung gesetzt, in welchen der geometrische Ursprung und Zusammenhang der Simplices kodifiziert ist; Ähnliches gilt, wie oben beschrieben, für die Zyklen der algebraischen Geometrie. Bei der Konstruktion des Tensorprodukts erzeugt die additive Struktur der Basiselemente einen Untermodul und damit die "richtige" Äquivalenzrelation; beim Burnsidering einer Gruppe G leistet dies die Vereinigung von G-Mengen. Ein Permutationsmodul "wiederholt" zunächst nur die gegebene Operation, wird dann aber Ausgangspunkt ihrer Analyse durch eine Kompositionsreihe.

13

Wir haben nun von der Universalität und Durchschlagskraft des Linearen in der Mathematik ein deutlicheres Bild bekommen. Dabei sind verschiedene Strategien der Linearisierung hervorgetreten; eine grobe Einteilung könnte lauten: Einführung linearer Strukturen als "Schauplatz des mathematischen Geschehens", sodann Studium von Objekten durch Einbettung in diese, durch "lineare Approximationen" oder Konstruktion zugeordneter linearer Strukturen, genauer durch Funktoren mit Werten in abelschen Kategorien. Alle Strategien kommen zusammen in der Mathematik von Raum und Gestalt. Wir fragen nun nach der eigentlichen Ursache dieser Erfolge, nach dem, was die lineare Algebra nach einem Wort von Choquet zu einem "Königsweg" macht [23)]. Daß es sich um eine "elementare" Disziplin handelt, ist klar; aber auch im Elementaren kann man

Sinnloses treiben. Das ist die lineare Mathematik sicher nicht: vergleicht man die (relative) Einfachheit ihrer Begriffsbildungen und Beweisführungen mit der Ubiquität und dem fundamentalen Charakter ihrer Anwendungen, kann man die lineare Algebra in der Tat die mathematische Theorie mit dem "größten Wirkungsgrad" nennen. Diese Auskunft bleibt aber formal, solange die Elemente nicht bekannt sind, die der linearen Algebra zugrundeliegen und in ihr mathematisch entfaltet werden. Wir wollen sie näher hervorheben.

14

Der Modulbegriff stellt eine so glatte Synthese mehrerer Grundoperationen des theoretischen Agierens dar, daß der modern geschulte Mathematiker eine Art Archäologie braucht, um sie wieder freizulegen und voneinander zu sondern. Da ist zunächst das Operieren mit Quantitäten derselben Art; Quantität hier im Sinne von Aristoteles verstanden, als etwas, wonach mit "wieviele?" oder "wieviel?" gefragt wird. Die beiden Arten des Fragens weisen auf die beiden Erscheinungsformen der Quantität hin, die diskrete und die kontinuierliche. Die erste Mathematik faßt nur die diskrete, hat also, modultheoretisch gesprochen, als Koeffizientenbereich den Halbring der natürlichen Zahlen (die negativen Größen sind eine späte Erfindung). Addition, das einfache Zusammenfügen, und Multiplikation, das iterierte, sind in Wahrheit gleichursprünglich, da jede Quantität schon Vielfaches einer Einheitsquantität ist. Ein wesentlicher Schritt liegt nun in der Erweiterung der Multiplikation zur Proportionenbildung, die ja beim lebensweltlichen Operieren mit Quantitäten ebenso unumgänglich anfällt. Hierzu muß die Proportion, die zunächst als statisches *Verhältnis* fester Größen erscheint, als *Operator* aufgefaßt werden, der die eine Größe in die andere umwandelt; mit andern Worten es muß die Gleichung $X:Y = r$ als $X = rY$ gelesen werden [24)]. Die Umwandlung nennen wir *Skalarmultiplikation*, um hervorzuheben, daß es sich nicht um ein Produkt von Quantitäten untereinander handelt; mit ihrer Hilfe wird dann auch die Addition zu einer solchen Multiplikation, weil jetzt $X + Y = (r + 1)Y$ ist. Durch diese Auffassung von Proportion als Operator wird nicht nur alles Verrechnen von Quantitäten *einer* Sorte in den Koeffizientenring verlegt (und damit für alle Arten der Quantität einheitlich), sondern auch die Unterscheidung von diskret und kontinuierlich. Proportionen kommensurabler Größen führen zum rationalen Körper, der aber schon für die Elementargeometrie nicht mehr zureicht, wie die Pythagoreer erkennen mußten. Seit dem 19.Jahrhundert besitzen wir ein Standardmodell zur Beschreibung kontinuierlicher Quantität; aber die Mathematik des Kontinuums bleibt eine Herausforderung, von der ein Ende nicht abzusehen ist.

15

Das Verhältnis von Zusammenfügen und Vervielfachen, namentlich in dem primordialen, eindimensionalen und diskreten Fall verdient eine kleine Abschweifung. Es ist bekannt, wie mittels der Peanoaxiome und des Rekursionssatzes die Addition aus der Nachfolgerabbildung und die Multiplikation aus dieser und der Addition definiert werden können. Hierbei tritt sogleich ein mathematisches Phänomen erster Größenordnung hervor, die Folge der Primzahlen, die aus dem einfachen Eins-nach-dem-Andern nicht zu begreifen ist; obwohl der Übergang so durchsichtig scheint, steht die multiplikative Struktur gleichsam "für sich" neben der additiven. Sie läßt sich zwar durch die additive leicht beschreiben: die multiplikative Halbgruppe ist zunächst die Halbgruppe der Endomorphismen der additiven, wird dann mittels der Primzerlegung explizit, nämlich die abzählbare direkte Summe von Kopien der additiven. Aber diese Beschreibung bleibt abstrakt und gibt nicht preis, was man gern erführe, nämlich wie die Addition der Zahlen oder auch nur die Nachfolgerabbildung in dieser Summe aussehen. Die Schwierigkeit, große nicht prime Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen, ist notorisch; auf ihr beruht die Sicherheit bekannter Verschlüsselungsverfahren. Mit nur geringer Übertreibung kann man sagen, daß alle größeren Schwierigkeiten der Zahlentheorie aus dieser "Inkompatibilität von Addition und Multiplikation" herrühren: die Summe zweier teilerfremder Zahlen ist teilerfremd zu beiden Summanden; oder anders gesagt: wenn man die multiplikative Struktur zweier Zahlen kennt, weiß man (im allgemeinen) noch nichts über die ihrer Summe. Die Effizienz der "lokalen Methode", der Reduktion aller Teilbarkeitsverhältnisse auf *eine* Primzahl, liegt darin begründet, daß sie diese Inkompatibilität gewissermaßen halbiert: wenigstens die kleinere Potenz des Primelements (der Ortsuniformisierenden) steckt in der Summe. In den letzten Jahren hat eine Vermutung an Interesse gewonnen, die eine fundamentale "gegenseitige Begrenzung" von Addition und Primzerlegung aussagt, die abc-Vermutung. Allein der Reichtum an Folgerungen und die (relative) Mühelosigkeit, mit der sich diese ergeben, läßt sie als einen der glücklichsten und kühnsten Griffe erscheinen, welche dem mathematischen Genius seit langem gelungen sind; hier scheint ein einfaches Prinzip getroffen, das in die Disparatheit zahlentheoretischer Probleme und Resultate das Licht eines zuvor ungeahnten Allgemeinen bringt [25)].

Den weiteren Aufbau des Zahlsystems bis herauf zum reellen Körper brauchen wir hier nicht zu beschreiben; einer seiner Aspekte ist, daß die multiplikative Struktur der additiven immer ähnlicher wird, bis sie fast übereinstimmen: Exponentialfunktion und Logarithmus stiften Isomorphismen zwischen der additiven Gruppe aller und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. Durch alle Stufen erhalten (und in der Ringaxiomatik verankert) aber bleibt die fundamentale Asymmetrie der beiden Operationen, die in der Regel $a(b + c) = ab + ac$ der Distributivität zum Ausdruck kommt: die multiplikative Struktur operiert durch Multiplikation auf der additiven, nicht umgekehrt [26)]. Die Bildung von Proportionen ist "kompatibel" mit dem Zusammenfügen.

16

Wir kehren zurück zu unserer Analyse der allgemeinen linearen Struktur. Das zweite Grundmoment, nach dem Operieren mit Quantitäten derselben Art, ist das "formale Zusammendenken", das simultane theoretische Bearbeiten verschiedener Arten von Quantitäten, welche dieselben Proportionen gestatten, zum Beispiel die Ausdehnungen eines Körpers in den verschiedenen Richtungen, die den Raum konstituieren, oder verschiedene quantifizierbare Eigenschaften von Gegenständen, die besorgt werden müssen. Dahinter steckt einerseits die *Produkt*bildung im mathematisch-kategorialen Sinn: eine Menge von Bestimmungen in verschiedenen Hinsichten ist die Bestimmung *eines* Objekts im Produkt der Hinsichten, eines "Vektors". Daß aber dieses

Zusammendenken als Addition geschrieben werden kann, wie am einfachsten in der Gleichung (x,y) = (x,0) + (0,y) zum Ausdruck kommt, setzt die *Coprodukt*eigenschaft desselben Objekts voraus, welche die Abbildung x --> (x,0) erst möglich macht. Bekanntlich genügt nun die Existenz von Biprodukten (im Verein mit Exaktheitseigenschaften) zur Charakterisierung der abelschen Kategorien [27)], die sich so als ein natürlicher Rahmen für das theoretische Agieren erweisen.

Diese beiden für das theoretische Agieren toto coelo verschiedenen Akte der Addition, diejenige innerhalb *einer* Art von Objekten und die "zwischen den Arten", sind in der Addition des Moduls zunächst ungeschieden. Auf diesem Umstand beruht die Universalität der linearen Algebra. Daß diese Gleichbehandlung überhaupt möglich ist, ist a priori nicht selbstverständlich und hat zur Ursache, daß die beiden Arten des Zusammenfügens, die reale und die theoretische, gemeinsamen Gesetzen folgen - sie sind assoziativ und kommutativ und genügen einer Kürzungsregel [28)]. In der Modulsprache können sie durch den fundamentalen Begriff der linearen Unabhängigkeit separiert werden. Zwei Elemente sind unabhängig, wenn sie nicht durch eine Skalarmultiplikation auseinander hervorgehen; eine Addition im Modul involviert "unabhängige" Operationen zwischen den Arten, wenn sie nicht Resultat einer Skalarmultiplikation ist. So ist der Grundbegriff der linearen Algebra, der sie von einer "einfältigen" Größenlehre unterscheidet, derjenige der linearen Unabhängigkeit und, aus ihr entspringend, der Dimension, die maximale Zahl linear unabhängiger Elemente, die genügt, einen Vektorraum (bei festem Grundkörper) bis auf Isomorphie zu bestimmen. Das Herzstück der Theorie aber ist die Lehre von den Eigenwerten; sie weist auf, bis zu welchem Grad eine lineare Transformation bei geeigneter Basiswahl durch Skalarmultiplikationen dargestellt oder "approximiert" werden kann. Sie führt überall, wo sie greift, sogleich zu fundamentalen Aussagen, und sie greift überall - wo lineare Algebra auftritt, treten auch lineare Abbildungen auf und mit ihnen Spur und Determinante oder andere Funktionen der Eigenwerte. Matrixdarstellungen sind durch ihre Spuren ("Charaktere") festgelegt, Normen und Diskriminanten (Produkte von Eigenwerten) sind Hauptinstrumente der höheren Zahlentheorie, die Eigenwerte eines Differentialoperators sind die Frequenzen der Eigenfunktionen, Spuren von Gruppenoperationen auf der Homologie eines Raumes führen zur Lefschetzzahl, bei Varietäten nach Weil zu Aussagen über die Anzahl der rationalen Punkte; um nur ein paar spektakuläre Beispiele zu nennen.

17

Vom mathematisch-kategorialen Begriff des Produkts schlagen wir die Brücke zum philosophischen Ufer, nämlich zur Kategorienlehre von Aristoteles [29)]. Seine Aufzählung der Kategorien kann man in erster Näherung verstehen als eine Aufzählung von Hinsichten, derart daß ein Gegenstand möglicher Erfahrung vollständig beschrieben ist, wenn seine Bestimmungen in allen diesen Hinsichten gegeben sind. Bildet man das cartesische Produkt der Mengen, deren Elemente die möglichen Beschaffenheiten in den einzelnen Hinsichten sind, so ist eine solche Bestimmung nichts anderes als die Festlegung eines Elements im Produkt. Eine der Kategorien ist Quantität, Mathematik geworden in der Zahl. Ein Ziel der neuzeitlichen Wissenschaft ist, jede mögliche Hinsicht (Eigenschaft) so zu fassen, daß die Bestimmung eines Gegenstands in dieser Hinsicht auf die Angabe einer endlichen Folge von Zahlen hinausläuft. Verbindet man beides, so mündet alle wissenschaftliche Weltbeschreibung in die Angabe von Zahlenfolgen und ihrer zeitlichen Veränderung, spielt sich also in einem linearen Raum ab, in dem diese Zahlen als Koordinaten dienen. Die Synthese der Hinsichten, im Verein mit der Quantifizierung aller Hinsichten, schafft den Schauplatz, der vor aller Spezifikation eine lineare Struktur trägt. Die Vielfalt der Welt wird Wissenschaft durch Kombination der Regeln einer "einfältigen" Welt; auf der Ebene lebensweltlichen Planens vertreten durch die Ubiquität linearer Optimierungen, auf einer höheren als Bühne für den "Laplaceschen Dämon", von welcher der vertraute dreidimensionale Raum nur einen kleinen Ausschnitt bildet.

Natürlich sind die zeitlichen Veränderungen, ja schon die Beschreibungen der Zustände im allgemeinen nicht selbst linear; aber wir haben ja gesehen, wie Techniken der Linearisierung früher oder später zu jedem gewünschtem Grad der Beherrschbarkeit führen. Eine Grenze dafür gibt es nicht; es kann nur mehr oder weniger schwierig sein, geeignete Linearisierungen zu finden. In unseren Tagen bemüht sich die "nichtkommutative Geometrie", durch neuartige Konstruktionen von Funktionenringen auch pathologische Räume mit linearen Strukturen in Verbindung zu bringen; auf fast magische Weise zeigt Langlands' Funktorialitäts-Vermutung, wie aus einer (hypothetischen) Korrespondenz zwischen Darstellungen, also Linearisierungen verschiedener Gruppen lange erträumte Gesetze der Zahlentheorie fließen, Nichtlineares par excellence. Hier dürfen wir zuversichtlich sein; denn was die mathematische Moderne sich vorgesetzt hat, das hat sie in der Regel auch erreicht [30)].

Fast vollständig ist der Triumph der linearen Algebra in der Theorie der mikroskopischen Seinsschicht, dem Gegenstand der Quantenmechanik. Die Zustände eines Mikrosystems entsprechen den Elementen eines Hilbertraums; die zeitliche Entwicklung dieser Elemente ist durch die lineare Schrödingergleichung determiniert. Observable werden zu (linearen) Operatoren, deren Eigenwerte die möglichen Meßwerte der Observablen sind; dem Meßvorgang entspricht die Projektion auf einen Eigenraum. Die algebraischen Eigenschaften der Projektoren schließlich bringen die "Quantenlogik" hervor. Der schon besprochene Gedanke von der Linearität des Infinitesimalen erhält hier eine Bestätigung, wie sie seine Urheber nicht voraussehen konnten.

18

Fragen wir nun weiter, was "an Struktur übrigbleibt", wenn die verfügbaren Techniken der Linearisierung ausgeschöpft sind, so zeigt sich eine deutliche Tendenz: topologische und algebraische Strukturen werden auf lineare Gebilde "reduziert", für die nur mehr Fragen dezidiert kombinatorischen Charakters zu lösen sind. Mannigfaltigkeiten entstehen durch Verkleben linearer Teile, und das "Klebedatum", das die stets gleichen lokalen Strukturen zu globaler Spezifikation bringt, ist kombinatorisch. Die algebraische Topologie übersetzt Gestalt in simpliziale oder Zellenkomplexe, endliche Datensätze kombinatorischer Natur; in der Sprache charakteristischer Klassen erscheinen Gesetzmäßigkeiten der Gestalt als ein Spiel von Zahlen und Zahlenfolgen [31)]. Serre spricht vom "meccano des motifs". Die Klassifikation der Lieschen Gruppen und

Algebren läuft hinaus auf diejenige der Wurzelsysteme, endliche Mengen von Vektoren, die gewisse Bedingungen kombinatorischen Charakters erfüllen. Kategorien von Darstellungen tragen eine Graphenstruktur, die seit den Arbeiten von Auslander-Reiten eine zentrale Rolle in der einschlägigen Forschung spielt (und im halbeinfachen Fall trivial ist). Die klassische Idealtheorie der Polynomringe mündet heute in eine Kombinatorik von Monomen, der Theorie der Gröbnerbasen.

Die Formel "Mathematik ist lineare Algebra plus Kombinatorik" wäre natürlich eine allzu grobe Simplifikation, erweckt darüber hinaus den falschen Eindruck, es handle sich um Gegenbegriffe; wie wir gesehen haben und an zahllosen weiteren Beispielen sehen könnten, durchdringen sich beide und sind mitunter gar nicht voneinander zu unterscheiden. Schon die Matrixmultiplikation ist eine Art Amalgamierung des "linearen" Rechnens mit den Koeffizienten einerseits und einer Kombinatorik der Positionen andererseits (den Geheimnissen dieser Verbindung ist die algebraische K-Theorie nachgegangen). Auch die Theorie der Gebäude und die Codierungstheorie können hier genannt werden. Das Kombinatorische ist in der linearen Algebra angelegt, eben im "Zusammendenken" - nichts anderes bedeutet ja "combinare" im theoretischen Agieren - , und eine seiner elementarsten Manifestationen liegt hier in der Matroidstruktur von Mengen von Vektoren. Der abstrakte Begriff des Matroids - seine Protagonisten zogen vor, von "Prägeometrien" zu sprechen [32)] - formalisiert die Regel des "Austauschs von Basiselementen", die hinter der Invarianz der Dimension steckt, dieser für die geometrische Intuition fraglos klaren, aber in abstracto doch nicht trivialen Tatsache, daß man etwa eine Größe, die man durch drei unabhängige Größen beschreiben kann, nicht gleichzeitig durch zwei oder vier solche beschreiben kann. Der Matroidbegriff ist vergleichsweise jung; die Vielfalt seiner Aspekte und Anwendungsmöglichkeiten macht es wahrscheinlich, daß er seinen Platz im mathematischen Gesamtgefüge noch nicht eingenommen hat und weiter hervortreten wird.

Immerhin könnte man den Wahrheitsgehalt unserer Formel durch Metatheoreme prüfen, welche die Stellung der abelschen Kategorien (in Kategorien relevanter Kategorien) beleuchten; solche scheinen (noch) nicht vorzuliegen. Nicht ausgeschlossen erscheint jedenfalls, daß die Mathematik sich anschickt, in ein kombinatorisches Zeitalter einzutreten und damit Leibnizschen Visionen näherzurücken; zumindest ist die Mathematik, die heute am meisten angewandt wird, diskrete Mathematik und damit a limine kombinatorisch. Hier ist allerdings zu bedenken, daß eine befriedigende Begriffsbestimmung von "Kombinatorik" nicht vorliegt, vielmehr nur eine Aufzählung von Problemstellungen, die man als kombinatorisch ansieht, wie Zählen, Ordnen und die Theorie der Konfigurationen [33)]. Solange keine allgemeine Definition gegeben werden kann (und es ist nicht ausgemacht, daß eine solche überhaupt möglich ist), bleibt die Kombinatorik eher ein Sammelplatz für Dinge, die sich von den immer noch dominanten Strukturbegriffen des Bourbakismus aus schlecht systematisieren lassen, und eine Einordnung als "kombinatorisch" sagt nicht mehr aus als eine Ähnlichkeit mit Strukturen, die so zu nennen man sich eben gewöhnt hat. "Wir haben noch nicht begonnen, das Verhältnis von begrifflicher zu kombinatorischer Mathematik zu verstehen", schrieb Dieudonné, womit er zweifellos die Erwartung verband, daß der

"Wildwuchs" der Kombinatorik durch geeignete Strukturbegriffe zu bändigen sei. Daß die herrschende Ordnung der Begriffe nicht mehr adäquat ist, liegt am Tage [34)].

19

Treten wir einen Schritt zurück. Die Conditio Humana nötigt den Menschen zur Einwirkung auf die Welt; seine kategoriale Verfassung eröffnet ihm dazu eine begrenzte Zahl von Möglichkeiten. Mathematik ist die Entfaltung von Gesetzmäßigkeiten, die in dieser Verfassung angelegt sind. Eine der Kategorien oder Grundhinsichten ist Quantität; und Zusammenfügen und Proportionieren sind erste Operationen, die wir mit Quantitäten in realer oder theoretischer Aktion vornehmen. Ihre mathematische Entfaltung, die lineare Mathematik in *einer* Dimension, ist darum eine erste und einfachste; universal wird sie, indem sie das Zusammendenken aufnimmt und die linearen Gesetze für mehrere Arten Quantität gleichzeitig entfaltet. Die Synthese der Hinsichten, mathematisch als kategoriales Produkt oder Coprodukt zu fassen, ist eine Denkfigur, von der alles theoretische Agieren Gebrauch macht. Die Quantifizierung aller Hinsichten ist eine Entwicklung, die man doch wohl als kontingent ansehen muß; schließlich ist Quantität ist nur *eine* der aristotelischen Kategorien. Wie Hilbert demonstriert hat, kann man das Rechnen mit dem Kontinuierlichen auch aus der Mathematik der Gestalt entwickeln, so daß eine Entwicklung denkbar ist, in der nicht analytische Geometrie, sondern geometrische Analysis die Revolution geworden wäre. Hier möchte man mit Heidegger von einem "Denkgeschick" sprechen.

Wenn der oben angedeutete Gedanke eines mathematischen Paradigmenwechsels Gehalt hat, mag es zum Schluß erlaubt sein, eine Theorie vergleichend heranzuziehen, die mir eine gewisse Analogie aufzuweisen scheint, nämlich die Vilem Flussers vom Epochenwechsel in der menschlichen Kommunikation. Nach Flusser wurde das Zeitalter der Bilderschrift abgelöst von demjenigen der alphabetisch geschriebenen, also linear zu lesenden Texten, dem eigentlich historischen Zeitalter, welches nun übergeht in das "nachhistorische" der "Technobilder". Technobilder sind "Flächen mit Symbolen für lineare Texte", sind Bilder, "die nicht Szenen bedeuten, sondern Begriffe" [35)], sich also zu linearen Texten verhalten wie diese zu den voraufgegangenen Bildern. Technobilder werden nicht gelesen, sondern "erfaßt" [36)], sie deuten einen Übergang an von einer "prozessualen" zu einer "strukturalen" Weltsicht [37)]. Die Dominanz des kombinatorischen Aspekts bei diesem Begriff ist evident, daß es in der Mathematik verwandte Tendenzen gibt, wohl kaum zu leugnen. Die gesamte mathematische Symbolik fällt unter Flussers Begriff, denn sie besteht aus Zeichen, die formal betrachtet Abkürzungen für Texte sind, in ihrer praktischen Funktion aber die Rolle von Bildern übernehmen, mit denen Objekte und Sachverhalte assoziiert werden und durch die sie auch in gewissem Umfang dargestellt werden können. Am deutlichsten zeigen dies graphische und diagrammatische Darstellungsweisen, die sich längst von ihrem ursprünglichen Bereich geometrischer Figürlichkeit in alle mathematischen Kontexte ausgebreitet haben. Nicht nur einzelne Sachverhalte, sondern ganze Theoriekomplexe können auf solch kombinatorische Weise anschaubar und damit überschaubar gemacht werden [38)].

Solange freilich die Mathematik in dem Sinne, in dem wir sie kennen, fortbesteht, wird es kaum möglich sein, sie ohne weiteres der von Flusser behaupteten Entwicklung zu subsumieren. Nach Flusser findet eine solche Ablösung der Codes jedesmal dann statt, wenn die "alten Texte" unverständlich zu werden beginnen; in der Mathematik aber werden sie dies keineswegs, sondern werden im Gegenteil immer besser verstanden, so sehr auch die mathematischen Denk- und Schreibweisen sich ändern. Aber vielleicht macht sich auch hier nur die epistemische Sonderstellung der Mathematik geltend, so daß die Entwicklung der mathematischen Codes nicht völlig denselben Gesetzen unterworfen ist und man es vielmehr mit verschiedenen Aspekten desselben Prozesses zu tun hat, dessen eigentliche Beschaffenheit sich noch offenbaren muß.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Dies wäre den Betrachtungen von Atiyah (The Evolution of Mathematics in the 20th. Century, Amer.Math.Monthly 2001, 654-666) hinzuzufügen, der das Lineare und das Nichtlineare allzu unvermittelt gegenüberstellt.

(2) Das scheint paradox, ist doch "Linie", nicht "Zahl" ein Gestaltbegriff. Wo wir heute von Linearisierung sprechen, meinen wir algebraische, also letztlich durch Zahl erfüllte Linearität; vgl. die folgenden Abschnitte.

(3) In diesem Sinne z.B. Horazens "mors ultima linea rerum" (ep.I,16,79). Zum griechischen Ursprung siehe den Kommentar zur Stelle von Kießling/Heinze (Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, Berlin 1958).

(4) Elemente I, Def.4: ευθεια γραμμη εστιν ητισ εξ ισου τοισ εαυτοισ σημειοισ κει ται. Analog Def.7 (Ebene). Für eine ausführliche Diskussion siehe die Ausgabe von T.L.Heath, Cambridge 1908, vol.1. Heute hören wir hier eine Homogenitätsforderung heraus, die in dieser Allgemeinheit natürlich viel zu schwach ist.

(5) Parmenides 137d: και μην ευθυ γε, ου αν το μεσον αμφουν τοιν εσχατοιν επιπρ οσθεν η. Siehe hierzu die Diskussion bei Heath (Anm.4). Bemerkenswert ist, daß hier Geradheit als Relation zu einem Betrachter gefaßt wird. Wir würden etwa sagen: eine Linie ist gerade, wenn es eine Projektion gibt, unter der ihr Bild ein Punkt ist.

(6) Es überrascht, daß Grassmann, der doch zu den Wegbereitern der modernen linearen Algebra gehört, nirgends eine nähere Erklärung von "linear" versucht; ja es taucht dieser Begriff in dem ganzen Buch, das den Titel "Lineale [sic] Ausdehnungslehre" trägt, praktisch nicht mehr auf. Ferner beschränkt er sich, obwohl er in den ersten Abschnitten eine sehr allgemeine Theorie binärer Verknüpfungen entwirft, dann doch auf reelle Koeffizienten; hierzu nötigte ihn freilich sein philosophischer Ausgangspunkt, nach welchem Ausdehnung durch einen stetigen Prozeß erzeugt wird. Anscheinend bemerkte er nicht (oder hielt es nicht für bemerkenswert), daß die meisten seiner Entwicklungen über beliebigen Körpern möglich sind. Als gravierendstes Defizit erscheint vom modernen Standpunkt aus, daß er keinen Begriff von linearer Abbildung hat (also nur die

Objekte, nicht die Morphismen der Kategorie betrachtet).

(7) Diese Aussage kann präzisiert und in relevanten Fällen bewiesen werden; siehe Freyd, Abelian Categories, New York etc. 1964, p. 28 ss. Für Allgemeineres siehe meinen Aufsatz "Vom Vorrang der Morphismen über die Objekte", in: E.Kleinert, Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik, Leipzig 2002.

(8) Ausdehnungslehre (1844), §§ 31,32.

(9) Näheres bei T. tom Dieck, Topologie, Berlin 2000, S.315 ff. Siehe auch Anm. 31.

(10) Zur Approximation beliebiger Funktionen eignen sich freilich nicht nur lineare; die Eigenschaften, die eine approximierende Funktionenklasse aufweisen muß, sind im Satz von Stone-Weierstraß formalisiert und sehr verschiedener Spezialisierungen fähig.

(11) Siehe etwa C.P.Rourke/B.J.Sanderson, Introduction to Piecewise Linear Topology, Berlin etc. 1972.

(12) Met. B 998.

(13) Freilich ist Gleichheit symmetrisch und die Coincidentia Oppositorum auch in der andern Richtung lesbar: die Gerade als Kreis von unendlichem Radius. Vgl. die Ausführungen bei P.Schanz, Der Kardinal Nikolaus von Cues als Mathematiker (1872).

(14) Wie eine ganz einfache Überlegung zeigt, die ich dem Leser zur Übung lasse (man zeige erst $D = \{0\}$ und benutze dann die Eindeutigkeitsaussage des Axioms).

(15) Siehe das Standardwerk "Models of Smooth Infinitesimal Analysis" von I.Moerdijk und G.E.Reyes, Berlin etc. 1991. Anwendungen findet man bei J.L.Bell, A Primer of Infinitesimal Analysis, Cambridge 1998.

(16) So der Theorie von Galois, der entgegengehalten wurde, man müsse die Wurzeln der Gleichungen doch schon "haben", bevor man ihre Permutationen studieren könne.

(17) Sie besagt, daß eine einfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit, welche dieselbe Homologie wie die Sphäre hat, zu dieser homöomorph ist. Der Beweis steht noch aus für die Dimension 3 (und nur für diese hat sie Poincaré ursprünglich ausgesprochen).

(18) Siehe neuere Arbeiten von Voevodsky, Suslin und anderen (Voevodsky/Suslin/Friedlander, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, Princeton UP 2000; auch den Übersichtsartikel von M.Levine im Bull.AMS, Vol.34 (1997), p.293-312). Nach diesen Erfolgen darf man hoffen, daß in naher Zukunft von berufener Seite einmal ein Überblick über dieses noch unaufgeräumte Schlachtfeld mathematischen Denkens gegeben wird.

(19) Man mache sich klar, daß diese Formel im allereinfachsten Fall, nämlich der Hintereinanderausführung von Mengenabbildungen, korrekt ist; ein Beispiel für Verallgemeinerung durch "richtiges" Umformulieren.

(20) Zuerst in der großen Arbeit Kroneckers "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen" Crelle 1882 (Ges.Werke, ed. K.Hensel, Bd.2, S.237-387); siehe dazu J.Dieudonné, Cours de Géométrie Algébrique 1, Presses Universitaires de France, 1974, S.59.

(21) "Parmi toutes les choses mathématiques que j'avais eu le privilege de découvrir et d'amener au jour, cette réalité des motifs m'apparait encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystere - au coeur meme de l'identité profonde entre la 'géométrie' e l' 'arithmétique'". Aus "Récoltes et Semailles", Montpellier 1985. Zitiert nach J.-P.Serre, Motifs, Astérisque 198-199-200 (1991), 333-346 (Oeuvres Vol.IV, Berlin 2000, S.223-239). Siehe auch die weiteren dort angeführten Stellen.

(22) Wo ein solcher Ursprung nicht offensichtlich ist (einige der sporadischen Gruppen wurden durch "gruppentheoretische Spekulation" gefunden), sucht man eben im Nachhinein nach der geometrischen Interpretation, dem eigentlichen "geistigen Band".

(23) G.Choquet, Neue Elementargeometrie, Braunschweig 1970, S.3.

(24) Ein Schritt, den die griechische Mathematik nie vollzogen hat, wodurch sie sich um die Möglichkeit brachte, die eudoxische Proportionenlehre zur Grundlage einer effektiven Naturbeschreibung zu machen. Euklids Darstellung im Buch V der "Elemente" zeigt das Ringen um die wahren Beziehungen zwischen Zusammenfügung und Proportion, das doch nicht zur Ring- und Modulaxiomatik vordringt, weil die Proportionen nicht als selbständige mathematische Entitäten gesehen werden; als Folge bleiben diskrete und kontinuierliche Quantität mathematisch unvereint. Bekanntlich blieb es Galilei vorbehalten, die Naturlehre in mathematischer Sprache zu entwickeln. Was die Griechen daran und an dem oben beschriebenen elementaren Rechnen mit Punkten hinderte, ist schwer zu sagen. Ich finde hier Spenglers Gegenüberstellung von "apollinischer" und "faustischer" Mathematik erhellend: für die "Dynamisierung", die in der Auffassung von Punkten und Proportionen als Operatoren liegt, ist in der antiken θεωρια kein Raum.

(25) Für ganze Zahlen a sei rad(a) das Produkt der Primteiler von a. Die Vermutung sagt: für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert ein $k = k(\varepsilon)$, derart daß für alle ganzen a,b,c mit a und b teilerfremd, $a + b = c$, die Ungleichung

$$c \leq k\,(\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}$$

erfüllt ist. Siehe den Übersichtsartikel von A.Nitaj, Ens.Math. 42 (1996), S. 3-24. - Das bei der Definition der Multiplikation benutzte rekursive Schema

$$f_{i+1}(m, 1) = m\ , \quad f_{i+1}(m, s(n)) = f_i(f_{i+1}(m,n), m)\ ,$$

bei dem f_0 die Addition und s die Nachfolgerabbildung bedeutet, kann beliebig iteriert werden und führt im nächsten Schritt zur Potenzbildung. Während aber der erste Schritt zu einer Struktur mit "deduktivem Potential" führt (eine Halbgruppe), scheint das für die Potenzbildung und a fortiori für die höheren Stufen (die kaum je in die Betrachtung treten) nicht der Fall zu sein. Für die Potenzstruktur gibt es anscheinend keine Gesetzmäßigkeiten, die algebraische Entfaltung zulassen; die üblichen Regeln involvieren Addition und Multiplikation und laufen darauf hinaus, daß der Halbring $\mathbb{N}$ auf der multiplikativen Halbgruppe operiert. - Das Phänomen, daß ein Konstruktionsschema nur zu Anfang "interessante Struktur" liefert und dann sozusagen leerläuft, findet sich auch beim Cayley-Dickson-Prozeß, mittels dessen aus den reellen die komplexen Zahlen, sodann die Quaternionen und Oktaven als die reell-linearen Räume mit nichttrivialer Multiplikation entstehen, wobei nacheinander die Anordnung, die Kommutativität und die Assoziativität verlorengehen, im folgenden dann auch die Nullteilerfreiheit und die Produktformel für die Norm. Siehe dazu J.Baez, The Octonions (Preprint 2001). Hier hat man Metatheoreme (Sätze von Frobenius, Kervaire-Milnor), die im arithmetischen Fall noch fehlen.

(26) Wenn zusätzlich die dazu "duale" Regel $a + bc = (a + b)(a + c)$ gilt, gelangt man zu Booleschen Ringen (alle Elemente sind idempotent). Genügt weiter die Addition der Kürzungsregel, sind alle Produkte Null (daher die Schulregel "Mal bindet stärker als Plus"). Allerdings operiert auch die additive Halbgruppe auf der multiplikativen, aber durch Potenzbildung und nicht durch Addition.

(27) Siehe H.Herrlich/G.E.Strecker, Category Theory, Berlin 1979, § 41. Es ist möglich (sogar üblich), eine noch abstraktere Kennzeichnung durch Kerne und Cokerne zu geben (siehe z.B. das in Anm.7 zitierte Buch von Freyd), doch ist es mir nicht gelungen, für diese eine Interpretation im theoretischen Agieren zu finden.

(28) Über Assoziativität und Kommutativität siehe meinen Aufsatz in den Mathem. Sem.-Ber. (2003).

(29) Der mathematische Begriff entstand mit nicht ganz ernstem Seitenblick auf Kant und Aristoteles; siehe dazu die Bemerkungen in S.Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Berlin etc. 1971, S.29. Zum groben Überblick: kantisch gesprochen, ist die mathematische Kategorientheorie eine (partielle) Mathematisierung der Kategoriengruppe der Relation. Aristotelisch wäre sie eher eine Art Metatheorie zu einem Kategoriensystem. Für das Folgende beachte man auch, daß kantische Quantität nicht dasselbe ist wie aristotelische.

(30) Oder aber durch Erkenntnis von Unlösbarkeit einen sogar noch höher zu wertenden Fortschritt erzielt, nämlich auf der Metaebene. Man sehe die eindrucksvolle Bilanz in "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems", Proc.Symp.Pure Math., vol.XXVIII, AMS 1979.

(31) Besonders sichtbar bei der Einbettungsdimension der reellprojektiven Räume; siehe J.Milnor/J.Stasheff, Characteristic Classes, Princeton 1974, S.49.

(32) H.H.Crapo/G-C.Rota, On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometry, M.I.T. 1970. Eine neuere Monographie ist J.G.Oxley, Matroid Theory, Oxford 1992; hier findet man eine Reihe verschiedener Definitionen des Begriffs.

(33) Siehe M.Aigner, Combinatorial Theory, New York 1979, Einleitung.

(34) Was allmählich auch Konsequenzen für das Curriculum zeitigen sollte. Zum Beispiel scheint mir im Hinblick auf die theoretische wie praktische Entwicklung der Mathematik die Dominanz der Infinitesimalrechnung in der Grundausbildung nicht mehr vertretbar. Daß nach dem "Jahrhundert der Topologie" ein topologischer Kursus noch immer nicht zum Standard gehört, grenzt ans Groteske. Analoges gilt für mathematische Logik und Kategorienlehre.

(35) V.Flusser, Kommunikologie, Frankfurt/M 1998, S. 140. Es sollte hervorgehoben werden, daß die Begriffe "linear" und "Code" bei Flusser eine eigene Bedeutung haben.

(36) a.a.O. S. 267.

(37) a.a.O. S. 155.

(38) Wofür man in Dieudonnés "Panorama" zahlreiche Beispiele findet. Siehe auch meinen Aufsatz "Über die Anschauung in der Mathematik", Phil.Nat. 35 (1998).

Über die Zwei und Dualität

1

Man muß kein Zahlentheoretiker sein, um die besondere Rolle zu bemerken, welche die Zwei in vielen mathematischen Kontexten spielt (einige werden wir unten besprechen). Die Wurzeln dieser Sonderstellung aufzudecken, erscheint als naheliegende Aufgabe, die jedoch bei näherem Hinsehen allerhand Bedenkliches offenbart. Sichtlich trägt sie die Versuchung zu "schlechter Metaphysik" in sich, zum Beispiel zu fruchtlosen Spekulationen darüber, wie aus dem Einen das Viele entstehen kann.

Aber auch wenn man alles Philosophische vermeidet (was unsere Absicht nicht sein kann), ist die Sinnfrage ernstzunehmen. Sicher ist sinnlos, zu fragen, *warum* etwas aus den Axiomen folgt; der Beweis, daß der Beweis etwas beweist, ist der Beweis noch einmal (die Idempotenz des Modaloperators "notwendig"). Welchen Sinn kann es haben, über die vorliegenden Beweise der mathematischen Sachverhalte hinaus nach "tieferen" Gründen oder Prinzipien zu fragen, mittels derer man das Beweisbare noch anders "verstehen" kann? *Daß* ein Sachverhalt beweisbar ist, ist eine Naturtatsache (nämlich der Natur unseres Denkens zugehörig), die wir einfach hinnehmen müssen. Aber wie wir den Tatsachen der uns umgebenden Natur mathematische Modelle unterlegen, um sie zu verstehen und womöglich zu beherrschen, könnte ja auch hier eine höherstufige Mathematik existieren, die unsere Fragen beantwortet, durch allgemeinere Sätze und geeignete Metatheoreme; und solange sie nicht existiert, mag es erlaubt sein, jener Ursprungsfrage sozusagen vorwissenschaftlich nachzugehen.

Welche Wege aber sind gangbar? Natürlich kann man in jedem einzelnen Fall einer Besonderheit der Zwei durch Musterung der Beweise feststellen, welche Eigenschaft der Zwei für die zu erklärende besondere Eigenschaft "verantwortlich" ist (wenigstens im Sinne einer hinreichenden Eigenschaft; denn nur selten kennen wir alle möglichen Beweise). Aber kann man erwarten, dadurch klüger zu werden? Wenn die erklärende Eigenschaft einfacher und von "grundsätzlicherem" Charakter wäre als die zu erklärende, hätte die Mathematik das wahrscheinlich schon ans Licht gebracht. Ist sie es nicht, kann man dann noch von Erklären sprechen? [1)] Nun führt der mathematische Prozeß oft durch Aussagen, die für sich genommen nicht bedeutsam erscheinen, zu solchen, die uns "etwas sagen", und es gibt Beispiele dafür, daß unbedeutsam und technisch erscheinende Sachverhalte oder Eigenschaften sich als Schlüssel zu Vielem erweisen und so zu Prominenz kommen. Aber können wir erwarten, daß wir über die definierende Eigenschaft der Zwei, Nachfolgerin der Eins zu sein, hinaus etwas vergleichbar Deutliches finden? Auch ist es nicht in jedem Fall ein Erkenntnisgewinn, wenn es gelingt, Vieles auf Eines zurückzuführen [2)]. Summa dieser Diskussion: die innermathematische Nachfrage muß nicht sinnlos sein, aber es gibt auch keine Garantie dafür, daß sie uns weiterbringt; wir müssen es also auf fallweise Musterung ankommen lassen.

Es ist klar, daß im Verfolg unserer Aufgabe die innermathematische und die metamathematische Ebene zu unterscheiden, gleichzeitig aber in Beziehung zu bringen sind. Metamathematisch kann man fragen, wie Zweiheiten in die Axiome kommen. Die Axiome entspringen aus Gesetzmäßigkeiten in der kategorialen Organisation des Menschen, die Gesamtheit seiner Fähigkeiten, Welt aufzufassen, sich begrifflich auf sie zu beziehen und sie in theoretischer Aktion zu bearbeiten. Ob diese Nachfrage zu einer Erkenntnis führt, kann sich erst am Ergebnis zeigen. Dementsprechend werden wir, nach einer kurzen Besinnung auf den Begriff, ausgezeichnete Zweiheiten zuerst in der Mathematik, dann in der kategorialen Organisation aufsuchen und nach Beziehungen zwischen beiden fragen.

Die vorliegende Arbeit ist, gezwungenermaßen, in mehreren Hinsichten unvollständig. Erstens kann eine systematische Darlegung jener kategorialen Organisation hier nicht gegeben werden. Zweitens fehlt (als Folge davon) die Garantie, daß unsere Sammlung von Zweiheiten, sowohl auf der mathematischen wie auf der kategorialen Ebene, repräsentativ ist. Drittens können wir die angestrebten Beziehungen nur in ganz rudimentärer Art aufweisen, wobei vielleicht mehr Fragen aufgeworfen als beantwortet werden. Wieder muß man fragen, wie eine "vollständige" Lösung der Aufgabe aussehen könnte; sie würde jedenfalls die Möglichkeiten eines Einzelnen übersteigen [3)].

2

Die Zwei bezeichnet die erste Vielheit, gehört also (aristotelisch) unter die Kategorie der Quantität, zugleich aber, qua Begriff, eine Einheit, die, allgemein gesprochen, in nichts Anderem bestehen kann als im formalen Zusammengedacht-Werden zweier für sich bestehender Gegenstände [4)]; formal ist dieses Zusammendenken, insofern es auf keine Eigenschaften der Gegenstände rekurriert, die uns veranlassen könnten, sie als Einheit zu denken. Die Vielheit bezeichnend, wirkt die Zwei zugleich einheitstiftend und ist insofern Zweiheit in sich selbst. Jedoch enthält der Begriff der Zwei keinen Hinweis auf einen Ursprung der Vielheit, einen wie auch immer gearteten Prozeß, durch den aus der Eins die Zwei hervorgeht. Sie ist einfach das erste Resultat eines solchen Prozesses (wenn wir einen solchen voraussetzen), der dann, erneut stattfindend, zu beliebigen (endlichen) Vielheiten führt [5)]. Man beachte, daß der Ausdruck "erneut stattfinden" schon ein Hinweis auf eine andere, in der Zeitstruktur enthaltene Zweiheit ist; davon wird noch die Rede sein. Die Zwei steht also am Anfang von Vielheit und Komplexität und ist zugleich der Anfang ihrer Bewältigung durch den Begriff [6)]; dieses Doppelgesicht der Zwei ist ein durchgehendes Motiv dieser Untersuchung.

3

Im Organischen entsteht quantitative Vielheit durch Zellteilung; graphisch darstellbar als Baum, der sich an jedem Knoten (jedem Zeitpunkt einer Teilung) in zwei Äste verzweigt (man beachte die Tautologie in diesem Ausdruck). Jeder Graph kann unter Wahrung der Zusammenhangsverhältnisse in einen solchen überführt werden, in dem alle Ordnungen höchstens drei sind, also die Kanten sich (eine Orientierung hinzugedacht) an jedem Punkt "einfach" verzweigen [7)]. Auch die Konstruktion des mathematischen Kontinuums, der reellen Zahlen aus den rationalen, kann auf mehrere Arten durch Zweiteilungen oder Verdopplungen ausgedrückt werden. Die Methode der Dedekindschen Schnitte, in welcher die von Aristoteles und Leibniz (fast) vorweggenommene Charakterisierung des Kontinuums zu mathematischer Form kommt, arbeitet mit Zweiteilungen der rationalen Zahlenmenge; jede Teilung *ist* eine reelle Zahl. Die Methode der Intervallschachtelungen bestimmt reelle Zahlen durch Folgen sich zusammenziehender Halbierungen; algebraisch entspricht dem die 2-adische Entwicklung der Zahlen. Paarbildung (gefolgt von einem Übergang zu Äquivalenzklassen) liegt auch den beiden vorausgehenden Schritten zugrunde, der Konstruktion der ganzen aus den natürlichen (Grothendieckgruppe) und der rationalen aus den ganzen Zahlen (Lokalisierung). Eine besonders geistvolle Konstruktion des gesamten Zahlystems durch ein *einziges* Prinzip hat Conway erdacht [8)]. Aus gegebenen Klassen L,R von Zahlen entsteht die neue Klasse {L|R}, das geordnete Paar von L und R, wobei Addition und Multiplikation rekursiv mitdefiniert werden; von der leeren Menge ausgehend, erhält man einen reell abgeschlossenen Körper (allerdings unter Benutzung eines transfiniten Prozesses). Hier entsteht also Vielheit durch fortgesetzte binäre Synthesen; eine Art Dual zur Zellteilung.

4

Zur Methode der Intervallschachtelung gibt es ein erkenntnistheoretisches Pendant: wir erfassen Vielheit im Seienden durch sukzessives Unterteilen, wobei wieder die binäre Unterteilung die einfachste und zugleich universell anwendbare (wenn auch nicht immer sachgemäße) Form ist. Das erste und bekannteste Beispiel für diese "logische Intervall-schachtelung" hat Platon mit der Definition der Angelfischerei gegeben [9)]. Das haben wir heute mechanisiert: jede Digitalisierung ist eine solche Reduktion auf Ja-Nein-Entscheidungen. In Platons Beispiel dient die Methode zur Definition; sie leistet auch Identifikation, wie Suchalgorithmen zeigen oder jeder nach einem KO-System ausgetragene Wettkampf. Von Natur aus ist jeder Vergleich (in irgendeiner anordnungsfähigen Hinsicht) eine Operation mit offener Stellenzahl; oft sind aber Vergleiche nicht anders als paarweise durchführbar. Daß dabei in der Tat stets das "richtige" Ergebnis erreicht wird, hat als mathematische Ursache, daß Supremumsbildung in einem Verband eine assoziative Operation ist. Die allgemeine Tendenz zur Reduktion auf binäre Operationen (nicht nur beim Vergleichen) hat freilich noch einen andern, später zu besprechenden Grund. Die beiden letzten Abschnitte zeigen wieder die Doppelrolle der Zwei: durch Unterteilung gliedert sich die Vielheit in der Einheit; durch Spaltung entsteht sie aus ihr; Zweiteilung einmal als ordnend, das andere Mal als vermehrend.

5

Handgreifliche Beispiele für die Rolle der Zwei als Erzeugerin von Vielheit finden sich in der Gruppentheorie. Eine nichtkommutative Gruppe kann nicht von einem einzigen Element erzeugt werden; es ist erstaunlich, wie häufig man mit der Minimalzahl von zwei Erzeugern auskommt. Nicht selten kann man sogar einen der beiden Erzeuger unter vielen möglichen wählen [10)]. Das bekannteste Beispiel ist die Erzeugung der symmetrischen Gruppen S_n durch eine Transposition und einen n-Zyklus. Die

Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen hat gezeigt, daß alle solchen Gruppen 2-erzeugbar sind [11]. Aber auch die unendliche Gruppe $GL(n,\mathbb{Z})$ ist 2-erzeugbar [12]. Man wünschte sich ein Metatheorem für diese Frage. Zumindest ist jede endlich präsentierbare Gruppe Subfaktorgruppe einer freien Gruppe vom Rang 2, nach der Indexformel von Nielsen-Schreier sogar Bild einer coendlichen Untergruppe der freien Gruppe. Eine weitere große Klasse von Gruppen hat Erzeuger der Ordnung 2, geometrisch Spiegelungen; nach einem bekannten Satz ist jeder Automorphismus eines n-dimensionalen quadratischen Raums Produkt von höchstens n+1 Spiegelungen.

Auch für die Komplexität der Gruppen ist die Zwei hauptverantwortlich, wie in schlagender Weise der Satz von Feit-Thompson lehrt: jede Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar [13]. An den Ordnungen der sporadisch einfachen Gruppen [14] fällt auf, daß sie alle durch relativ hohe Potenzen von 2 teilbar sind; nie geht eine andere Primzahl mit höherer und nur selten mit derselben Potenz in der Ordnung auf; mit absteigenden Vielfachheiten folgen die nächsten Primzahlen [15]. Hier bietet sich die (von einer künftigen Mathematik vielleicht präzisierbare) Erklärung an, daß "kleine" Dinge sich eben vielfältiger kombinieren lassen und somit "dichtere" Strukturen bilden können. Ein erstes Beispiel dafür ist eine Tatsache, die schon in den Beweis des Satzes von Brauer-Fowler eingeht: in einer endlichen Gruppe erzeugen je zwei Involutionen eine Diedergruppe [16]. Der leichte Nachweis beruht darauf, daß Elemente der Ordnung 2 ihre eigenen Inversen sind (man beachte, daß diese äußerst simple Feststellung doch nicht tautologisch ist). Der Satz selbst spricht eine Schlüsselrolle der Zwei für die Klassifikation aus: es gibt nur endlich viele einfache Gruppen mit einer Involution, deren Zentralisator eine vorgegebene Gruppe ist.

6

In vielen Kontexten erscheint die Zwei als eine Schwelle, die das (relativ) Einfache vom Komplexen trennt, wobei sie selbst zu dem einen oder andern Bereich gehören kann. Das Färbungsproblem der Graphen ist für zwei Farben polynomial lösbar, für mehr als zwei Farben NP-vollständig; Analoges gilt vom Erfüllungsproblem der Aussagenlogik [17]. Für quadratische Formen besitzen wir eine zufriedenstellende algebraische und arithmetische Theorie; sie lassen sich durch wenige Invarianten klassifizieren und erfüllen ein Lokal-Global-Prinzip; für kubische und höhere ist nichts dergleichen in Sicht, das Lokal-Global-Prinzip falsch [18]. Hier ist natürlich auch der Übergang von der Eins zur Zwei ein Qualitätssprung; aber einer, der sich bewältigen läßt aufgrund der Möglichkeit, lineare Algebra effektiv einzusetzen. Sie beruht (soviel ich sehen kann) darauf, daß in einem quadratischen Raum der Begriff der Orthogonalzerlegung besteht, der kein höherdimensionales Gegenstück hat: in einem Raum V mit einer ternären Form wäre die zu $W \subseteq V$ orthogonale Menge eine Teilmenge nicht von V, sondern von $V \times V$. Etwas anders verhält es sich bei den Zahlkörpern: schon quadratische Körper zeigen die beiden Hauptphänomene, welche die Arithmetik der ganzen rationalen Zahlen von derjenigen der höheren Zahlbereiche unterscheiden, die nichteindeutige Primzerlegung und eine unendliche Einheitengruppe, wenn auch in der einfachsten, noch halbwegs beherrschbaren Gestalt; hier spielt mit, daß ein quadratischer Körper stets abelsch ist und daher ein einfaches Zerlegungsgesetz hat. Für die Einheiten liegt das Besondere darin, daß quadratische Irrationalitäten durch Kettenbrüche "kanonisch" beschrieben werden können, wofür es kein höherdimensionales Analogon gibt; das Klassenzahlproblem aber ist schon hier noch unbewältigt [19]. Eine andere "Schwelleneigenschaft" der 2 tritt bei den Graden auf: Varietäten vom Grad 1 sind affine Räume, also glatt; vom Grad 2 ab gibt es Singularitäten; der Grund ist einfach, daß konstante Polynome $\neq 0$ keine Nullstellen haben. Subtiler ist eine Sonderrolle der Zwei bei den Matrizen: nur für 2×2-Matrizen sind alle Invarianten Morphismen - die Spur für die Addition, die Determinante für die Multiplikation [20]. Daß übrigens in der Zahlentheorie und Algebra die Zwei, "the oddest of primes" (Zassenhaus), besondere Blüten austreibt, war zu erwarten - ist sie doch selbst Zahl.

7

Am sichtbarsten aber ist der Schwellencharakter der Zwei in der Mathematik des Raums. Kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen) hat schon das 19.Jahrhundert klassifiziert; für dreidimensionale hat man erst in neuester Zeit namhafte, aber nur partielle Fortschritte erzielt [21], und für vierdimensionale ist eine Klassifikation aus prinzipiellen Gründen unmöglich [22]. In der Ebene gilt ein Satz von Schönflies, demzufolge es zu jeder stetigen Einbettung der Kreislinie in die Ebene einen Homöomorphismus der Ebene in sich gibt, der das Bild der Kreislinie in diese selbst überführt; das höherdimensionale Analogon ist falsch [23]. Dynamische Systeme zeigen auf der Geraden ein deutlich anderes Verhalten als in höheren Dimensionen; in diesen wird der Satz von Sarkowskij falsch, und es tritt das neue Phäomen der Attraktoren auf [24]. Der vom Zweidimensionalen an auftretende Unterschied zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit kommt daher, daß für die Annäherung an einen Punkt in einer Dimension nur zwei Richtungen möglich sind, schon in der Ebene aber ein Kontinuum von Richtungen (ein projektiver Raum) und dann natürlich deren Kombination, etwa durch Annäherung auf einer Spiralbahn. Für Differentialgleichungen in einer Veränderlichen ("gewöhnliche") besteht ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz, nur Fragmente davon gelten für solche in mehreren Veränderlichen ("partielle"). Ein gemeinsamer Hintergrund für einige dieser mathematischen Befunde ist leicht zu sehen: von der Ebene aufwärts gibt es einen nichttrivialen Begriff von *Gestalt,* mathematisch zu fassen als Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, wobei der Rand selbst eine Mannigfaltigkeit ist; auf der Geraden degeneriert dieser Begriff zu einer Vereinigung von Intervallen, deren Rand eine diskrete Punktmenge ist. Natürlich erfährt die Komplexität der Gestaltphänomene in höheren Dimensionen noch qualitative Steigerungen (wie oben schon deutlich wurde); aber sie wird doch in der Dimension 2 eigentlich entbunden.

8

Es tritt aber auch der Fall auf, daß die größere Komplexität in der kleineren Dimension sitzt. Für die arithmetischen Untergruppen einer reellen algebraischen Gruppe ist es ein großer Unterschied, ob diese Gruppe einen Rang = 1 oder > 1 hat; im ersten Fall tritt eine Reihe "pathologischer" Phänomene auf, die bei höherem Rang verschwinden [25]. Ein Metatheorem hierzu könnte darauf hinauslaufen, daß die "gesteigerten Bewegungsmöglichkeiten" in der höheren Dimension einerseits zwar zu neuer Komplexität, andererseits aber auch zu neuen Möglichkeiten zur Reduktion von Komplexität führen. Physisch sichtbar ist dieses Phänomen bei den Graphen, die ohne Selbstüberschneidungen in der Regel nicht in die Ebene, aber immer in den Raum eingebettet werden können, wo man eine Dimension mehr zum "Entwirren" hat [26)]. Die Homotopiegruppen π_n eines topologischen Raums T sind für n > 1 stets kommutativ; der Beweis benutzt in sinnfälliger Weise, daß man Orientierungsumkehr auf der Geraden durch Rotation der Ebene bewirken kann. Ein ähnliches Phänomen zeigen gewisse Rechnungen in der algebraischen K-Theorie; in GL(3) sind Umformungen möglich, für die es in GL(2), sozusagen aus "Platzmangel", kein Pendant gibt [27)]. Auch hier erscheint als Ursache einfach, daß man "mehr Raum" hat.

9

Die Vermehrung des Raums hat natürlich auch algebraische Aspekte; als elementarste Folge wohl die, daß für den Betrag einer Summe von n-Vektoren nicht allein die Länge der Summanden, sondern auch ihre Lage zueinander eine Rolle spielt. Eine Summe von zwei ebenen Einheitsvektoren kann jede Zahl zwischen 0 und 2 als Betrag haben (und alle solchen Summen bilden den Vollkreis vom Radius 2); sollen sie reell sein, sind nur die Werte 0 und 2 möglich. Auf der Geraden gibt es eben nur zwei Richtungen und dementsprechend nur Aufhebung oder Vermehrung, während schon in der Ebene ein Kontinuum von Richtungen mitwirkt. Die Ausdehnung der multiplikativen Struktur von der Geraden auf die Ebene produziert alle mögliche Torsion, nämlich die Lösungen aller Gleichungen $x^n = 1$, während die einzigen reellen Lösungen die für n = 2 sind.

Die höhere Algebra des Raums zeigt einige der auffallendsten uns hier angehenden Phänomene. Zunächst die reellen Divisionsalgebren, deren Dimension nach einem Satz von Hopf nur eine Potenz von 2 sein kann (wobei nach Kervaire-Milnor nur die Dimensionen 1,2,4 und 8 auftreten); hier geht natürlich ein, daß der algebraisch abgeschlossene komplexe Körper über dem reellen Körper den Grad zwei hat [28)], aber das allein genügt nicht - alle bekannten Beweise benutzen topologische Hilfsmittel [29)]. Dann der Satz von Adams über die Maximalzahl linear unabhängiger Vektorfelder auf Sphären, die nur vom 2-Anteil der Dimension abhängt [30)]. Fast magisch mutet der Einfluß der Zwei auf Einbettungsdimensionen an: ein Satz von Cohen gibt für diese eine Schranke an, die nur von den Ziffern der 2-adischen Entwicklung der Dimension abhängt [31)]. Besonders "sperrig" sind hier übrigens diejenigen reell-projektiven Räume, deren Dimension eine Potenz von 2 ist. Auch die Bott-Periodizität der K-Gruppen, mit den Perioden 2 im komplexen und 8 im reellen Fall, kann hier genannt werden.

10

Bisher haben wir Kontexte betrachtet, in denen die Zwei gewissermaßen selbst figuriert, als Anzahl, Ordnung, Grad oder Dimension, also "numerisch" oder als Quantität (in einem weiteren Sinne). Auf einer höheren Ebene des mathematischen Diskurses erscheint die Zwei als Qualität, nämlich als Dualität im weitesten Sinne, mit ihren nicht scharf voneinander abzugrenzenden Aspekten der Spiegelbildlichkeit, Reziprozität, Polarität und Komplementarität.

Kaum überblickbar sind die Situationen, in denen man gegebenen Objekten durch "Umkehr" gewisser Bestimmungsstücke "duale" Objekte zuordnen kann. Das einfachste Beispiel bieten die partiell geordneten Mengen. Allgemeiner und systematisch findet diese Umkehr in der Kategorientheorie statt, in der es zunächst zu jeder Kategorie eine duale gibt, mit denselben Objekten, aber "umgekehrten" Morphismen [32)]; zum Beispiel ist zur Mengenkategorie dual die Kategorie der vollständigen atomaren Booleschen Algebren (die Antiäquivalenz wird durch den kontravarianten Potenzmengenfunktor gegeben) [33)]. Sodann gibt es zu jeder kategorialen Begriffsbildung eine duale, oft durch das Präfix "co-" bezeichnet, wie Produkt und Coprodukt (Summe), End- und Anfangsobjekt, und zu vielen Sätzen einen dualen. Bemerkenswert ist, wie in "konkreten" Kategorien abstrakt duale Begriffe Formen annehmen, die keineswegs durch einen formalen Prozeß auseinander hervorgehen, wie direktes und freies Produkt von Gruppen oder schon das Begriffspaar "injektiv - surjektiv" [34)]. Dualbildung gibt es auch für Objekte, zum Beispiel Gruppen und Ringe (durch Umkehrung der Multiplikation); gehört das duale Objekt derselben Kategorie an, entsteht die Frage nach "selbstdualen" Objekten. In diesem (und nur in diesem) Sinne sind Gruppen selbstdual (mittels Inversenbildung), Ringe, wenn sie einen Antiautomorphismus der Ordnung 2 besitzen, wie Transposition von Matrizen oder die kanonische Involution in Quaternionenalgebren.

Dualität kann Spiegelbildlichkeit kreieren, aber auch feststellen, wodurch die Komplexität halbiert wird. Ein Beispiel bietet die Aussagenlogik: vertauscht man in Formel, die mittels "und", "oder" und "nicht" gebildet werden, die beiden Junktoren, so entstehen aus logisch wahren Aussagen logisch falsche, und Implikationen werden vertauscht [35)]. Klassisch ist auch das Beispiel der ebenen projektiven Geometrie, in der durch Vertauschung der Begriffe "Punkt" und "Gerade" und der Relationen "liegt auf" und "geht durch" aus wahren Sätzen wahre entstehen. Solche Spiegelbildlichkeit auf der Metaebene ist natürlich nur in mehr oder weniger elementaren Kontexten möglich; gewöhnlich muß man zufrieden sein, sie an Objekten vorzufinden, wie in den Dualitäten der algebraischen Topologie und ihren rein algebraischen Pendants [36)].

11

Bei den bekanntesten Beispielen von Dualbildung werden aber nicht Bestimmungsstücke umgekehrt, sondern es werden Objekten "duale" Objekte zugeordnet, oft durch einen darstellbaren Funktor, und der "duale" Charakter liegt dann darin, daß zumindest für gewisse Klassen von Objekten die Dualbildung involutorisch ist: das Dual des Duals ist kanonisch isomorph zum ursprünglichen Objekt, wie für endlichdimensionale Vektorräume und lokalkompakte abelsche Gruppen (Pontrjagin-Dualität). Der Isomorphismus entsteht dabei durch Einsetzen: jedes Element des Objekts bestimmt eine Funktion auf dem dualen Objekt [37)]. Hier treten auch Fälle auf, in denen Dualbildung nicht involutorisch ist, sei es, weil die Einsetzungsabbildung kein Isomorphismus mehr ist, sei es, weil das duale Objekt von ganz anderer Art ist und dieselbe Art Dualbildung keinen Sinn mehr ergibt; aber selbst dann kann man noch fragen, ob sich das ursprüngliche Objekt aus dem dualen zurückgewinnen läßt (Tannaka-Krein-Dualität). Ein geometrisches Beispiel sind die dualen Zellenkomplexe der kombinatorischen Topologie, die Wurzel der Dualitätssätze, die durch eine Art "Umstülpung" von Simplices erzeugt werden. Faßt man die platonischen Körper als simpliziale Zerlegungen der Vollkugel auf, so gehen durch diesen Prozeß Würfel und Oktaeder sowie Dodekaeder und Ikosaeder ineinander über, während das Tetraeder "selbstdual" ist.

12

Reziprozität (im engeren Sinne) liegt vor, wenn zwei Objekte, in zwei verschiedene Konstellationen gebracht, sich dennoch in beiden in "gleicher Weise zueinander verhalten" [38)]. In der schlichtesten Form besteht das darin, daß eine Größe, die von einem oder mehreren Parametern abhängt, ihren Wert nicht (oder nur in "kontrollierbarer" Weise) ändert, wenn man Parameter vertauscht oder invertiert, und der allereinfachste Fall betrifft die Reziproken (Inversen) in Gruppen, die Gleichung $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Hier wird man freilich den anspruchsvoll klingenden Begriff der Reziprozität nicht verwenden, dessen Gebrauch vielmehr eine gewisse Komplexität zur Voraussetzung hat. Klassische Beispiele sind die Reziprozitätsformeln der Zahlentheorie, für Potenzreste, Gaußsche oder Dedekindsche Summen.

Reziprozität im oben umrissenen Sinn liegt auch in den adjungierten Operatoren der linearen Algebra und Funktionalanalysis. Zu systematischer Form gebracht aber ist auch dieses Prinzip in der Kategorientheorie, nämlich im Begriff der adjungierten Paare von Funktoren [39)]. Obgleich dieser Begriff keineswegs elementar ist, durchdringt er mit erstaunlicher Wandlungsfähigkeit das ganze mathematische Gebäude; das Phänomen der "Wechselanpassung" findet sich in den elementarsten wie den höchststufigen Kontexten und ist so ubiquitär, daß eine auch nur annähernd repräsentative Musterung seiner Erscheinungsformen eine eigene Studie erfordert [40)]. Die klassischen Reziprozitäten von Frobenius und Brauer (in der Darstellungstheorie der Gruppen) sind hier zu subsumieren.

Daneben gibt es Reziprozitäten "individueller Form", so die Eulersche Reziprozität der Variationsrechnung: man erhält dieselben Extremalen, wenn man in einem Varaitionsproblem den zu optimierenden Operator mit dem die Nebenbedingungen definierenden vertauscht; oder diejenige der Lichtbeugung, wo Vertauschung von Aufpunkt und Lichtquelle dieselbe Lichterregung liefern.

13

Schwer zu trennen von Reziprozität ist Polarität: zwei Bestimmungsstücke oder Bestandteile eines Objekts stehen in einem besonderen Verhältnis des "Gegenüber". An erster Stelle sind natürlich die namengebenden Polaritäten der Geometrie zu nennen; doch das einfachste mathematische Beispiel ist die Polarität von plus und minus, im angeordneten Fall allgemeiner die Antisymmetrie. Zu den Polaritäten sind aber auch die Minimax-Theoreme der diskreten Mathematik zu rechnen. In einem bipartiten Graphen ist die maximale Zahl disjunkter Kanten gleich der minimalen Zahl von Punkten, die erforderlich ist, um alle Kanten zu treffen; der maximale Fluß eines Netzwerks ist die kleinste Kapazität eines Schnitts (lebensweltlich entspricht dem etwa die elementare Tatsache, daß eine Kette nur so stark ist wie ihr schwächstes Glied). Beide sind zurückführbar auf ein Dualitätsprinzip für Lineare Optimierungen [41)].

Komplementarität schließlich kann als eine mereologische Reziprozität verstanden werden und liegt vor, wenn zwei Teile ohne Überlappung ein Ganzes ausmachen [42]. Sind Ganzes und Teile Objekte einer Kategorie, so ist das Ganze die kategoriale Summe seiner Teile, etwa von direkten Summanden oder Zusammenhangskomponenten. Summen gibt es freilich zu beliebiger Summandenzahl; seine eigentliche Pointe gewinnt der Begriff der Komplementarität da, wo einem gegebenen Teil ein komplementärer "kanonisch" zugeordnet werden kann, wie das orthogonale Komplement in einem Raum mit Skalarprodukt. Hier sieht man einen engen Bezug zur Dualität - der zum komplementären Teil komplementäre sollte der gegebene sein. Das einfachste Beispiel ist natürlich Komplementbildung in Potenzmengen oder allgemeineren booleschen Algebren; die Logik steuert hier das am meisten fundamentale Beispiel einer komplementbildenden Operation bei, die Negation.

14

Damit haben wir die philosophisch-kategoriale Ebene erreicht, auf der wir uns nun, unserem Plan folgend, nach fundamentalen Zweiheiten umsehen wollen. Kants Disposition im Groben folgend, finden wir als Bestandsstücke der kategorialen Organisation die Erfahrungsformen des Raumes und der Zeit und die verschiedenen Vermögen des theoretischen Agierens. Dessen Ausgangspunkt sind raumzeitliche data, in Protokoll- oder Elementarsätzen niedergelegt; es vollzieht sich wesentlich durch Auswahl und Zusammenfassung sowie In-Beziehung-Setzen von data. Der Prozeß erfordert sehr bald die Einführung höherstufiger Begriffe, Beziehungen zwischen Beziehungen und so fort; das theoretische Agieren schafft sich selbst immer neue Hilfsmittel. All das ist in bekannter Weise zu Mathematik geworden, also zu axiomatisch-deduktiver Entfaltung von Gesetzmäßigkeiten. Klassisch ist die Mathematik der Erfahrungsformen, die (synthetische) Geometrie, die Theorie der natürlichen Zahlen und die aus ihr abgeleitete des Kontinuums; der neueren Zeit gehört die Mathematik des theoretischen Agierens. Die Mathematik des Auswählens und Zusammenfassens ist die Mengentheorie, die des In-Beziehung-Setzens die (mathematische) Kategorientheorie; beide sind heute soweit entwickelt, daß sie die "inhaltliche" Mathematik der Erfahrungsformen aus sich selbst hervorbringen (übrigens ein unerwarteter Triumph des Idealismus). Die kantischen Urteilsfunktionen sind heute übergegangen in den Formalismus der Prädikatenlogik, in dem sich die mathematische Selbstreflektion abspielt [43]. Wir fragen nun nach Manifestationen der Zwei auf dieser vormathematischen Ebene.

15

Die Raum*anschauung* durch den Gesichtssinn übersetzt die dreidimensionale Raum-*erfahrung*, die uns die andern Sinne vermitteln, in ein zweidimensionales Sehfeld. Dessen Krümmung und die Binokularität erlauben uns zwar (im Verein mit andern Sinnes- und Erkenntnisleistungen) eine gewisse Wahrnehmung von Dreidimensiona-lität; aber die Übertragung bleibt doch wesentlich Projektion, wie die elementare Tatsache zeigt, daß ein Gegenstand einen andern optisch verdecken kann [44]. Hier wirkt sich der topologisch-geometrische Schwellencharakter der Zwei aus, den wir schon beschrieben haben. Bei einer eindimensionalen Projektion würde die gesamte Gestaltinformation verlorengehen und nur die Ausdehnung übrigbleiben; auch würden kleine Ausfälle die "Sehlinie" unzusammenhängend machen. Andererseits würde (soweit ich sehe) kein Naturgesetz eine dreidimensionale Repräsentation verbieten, nach Art der Hologramme; freilich wäre der dafür nötige sensorische Apparat sehr viel aufwendiger. Undenkbar erscheint keine der Alternativen - schließlich gibt es Lebewesen ohne Gesichtssinn, und viele finden keine Schwierigkeit in der Annahme eines allsehenden Wesens. Aber die kategoriale Gesamtausstattung müßte dann eine ganz andere sein, im einen Falle wohl "nach unten" verändert, im andern "nach oben", zu mehr Bewußtsein.

16

Hier stoßen wir auf eine weitere Manifestation der Zweiheit in der Raumwahrnehmung, die Unterscheidung von Innen und Außen. Wäre das Sehbild dreidimensional, könnten wir durch Wände sehen, so wie wir jetzt über die Linien auf einem Spielfeld hinwegblicken; die Unterscheidung von Innen und Außen würde ihre Bedeutung verlieren oder wenigstens sehr verändern. Die Beziehung von Subjekt und Objekt, vom denkenden Ich zur Außenwelt, wäre eine ganz andere, hätte nicht mehr den Charakter des Gegenüber, sondern eher den eines Miteinander; das Heideggersche Existential des In-Seins und mit ihm die gesamte Daseinsstruktur würde von Grund auf gewandelt. So, wie wir sind, finden wir uns in der Welt, aber die Welt ist außen, nämlich (im Groben) das Äußere unserer Schädelkapsel, in einem erweiterten Sinn das Andere schlechthin, das Nicht-Ich [45)]. Hier wird klar, daß der Gegensatz von Innen und Außen Teil eines umfassenderen ist; worauf ja auch der häufige metaphorische Gebrauch jener Begriffe beruht. Eine mathematische Fassung verdient erwähnt zu werden, der Jordansche Kurvensatz und seine n-dimensionale Verallgemeinerung: jede (stetige) Einbettung einer Kreislinie in die Ebene zerlegt das Komplement der Linie in eine beschränkte und eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente, eben das Innere und das Äußere der von der Linie umschlossenen Fläche.

17

Eine dritte fundamentale Zweiheit in der Raumerfahrung zeigt sich im Paar der Orientierungen. Sind drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren im Raum gegeben, so bieten genau drei von den sechs Möglichkeiten ihrer Aufzählung die Möglicheit, den ersten als nach rechts, den zweiten als nach vorne und den dritten als nach oben zeigend vorzustellen: man kann sich das Dreibein so verschoben und gedreht denken (diese Bewegungen erhalten die Orientierung), daß die beiden ersten Bedingungen erfüllt sind; dann zeigt der dritte nach oben oder nach unten. A priori könnte man doch erwarten, daß es in drei Dimensionen mehr Variationen von Spiegelbildlichkeit gibt als in zweien. Es bedarf der mathematischen Analyse, um die Frage nach der Orientierung als eine Paritätsfrage zu erkennen; wenn auch die wichtigste phänomenologische Quelle, der Blick in den Spiegel, auf den involutorischen Charakter des Orientierungswechsels hinweist. Orientierung erweist sich so als eine Eigenschaft von Ausdehnung schlechthin, unabhängig von der Dimension. Für die Anschauung ist sie unmittelbar, wie schon Kant feststellte [46)].

18

Von den unendlich vielen Richtungen im Raum ist uns keine in einem strikten Sinn vorgeschrieben (wenn auch meistens die Auswahl nicht groß ist); in der einen Dimension der Zeit haben wir keine Wahl, wohin, noch auch, wie im Raum, ob wir uns überhaupt bewegen sollen [47)]. Die Zeit trägt uns wie auf einem unaufhörlich sich brechenden Wellenkamm ins Künftige, das Vergangene vermehrend, und der Augenblick der Gegenwart liegt schon hinter uns, wenn wir ihn zu fassen versuchen. Gehen wir in theoretische Distanz, verwandelt sich die phänomenologisch primäre Dreiteilung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft in das sehr viel einfachere, "verräumlichte" Schema des Früher und Später, mathematisch eine total geordnete Menge mit zwei "Richtungen", die mathematisch gleichberechtigt sind, von denen unserer Erfahrung aber *eine* unaufhebbar aufgezwungen ist [48)]. Die Mathematik der Zeit gliedert sich so der Mathematik allgemeiner Quantitäten ein; aber ihre Eindimensionalität und ausgezeichnete Richtung hat eine Konsequenz, die für *alle* Mathematik grundlegend ist. Da nur *eine* Handlung die jeweils nächste sein kann, muß jedes Aggregat von Handlungen in ein "Eins-nach-dem-Andern" aufgelöst werden [49)]; die Mathematik der Handlungsverknüpfung, deren Grundbegriff die Halbgruppe ist, ist daher a limine eine solche *binärer* Operationen [50)]. Analoges gilt für Relationen [51)]. Natürlich hat die Mathematik längst gelernt, mit Funktionen und Relationen beliebiger Stellenzahl umzugehen, aber sie entwickelt alles aus binären Grundstrukturen; ternäre spielen eine sehr kleine, höherstellige gar keine Rolle [52)]. Dabei ist keineswegs ausgemacht, daß binäre Strukturen immer die einfachste Beschreibung eines Sachverhalts ermöglichen, genausowenig wie die 2-adische Darstellung einer Zahl einfacher sein muß als ihre dekadische (man braucht weniger Ziffern, dafür mehr Stellen). Erlauben wir uns auch hier ein Gedankenexperiment: Wäre die Zeit zweidimensional, gäbe es stets (bei diskretisierten Zeitpunkten) zwei unmittelbar folgende, die natürlichen Basisoperationen wären ternär und Reduktion auf binäre eine "Abstraktion nach unten" [53)]. Ähnlich wie beim zweidimensionalen Sehfeld begegnet aber auch hier ein ökomischer Gesichtspunkt: bei solch permanenter Verzweigung des Weltprozesses würde die zu verarbeitende Information exponentiell wachsen und einen zu großen Apparat erfordern [54)].

19

Erwartungsgemäß sind die am meisten elementaren und fundamentalen Manifestationen dieser Bevorzugung des Binären in den Grundlagen der Mathematik zu finden. Neben der Gleichheit (die gerade die Negation von Vielheit ist) genügt eine einzige undefinierte binäre Relation, die Elementbeziehung, um die Mengentheorie und mit ihr das gesamte mathematische Gebäude aufzuführen; die kleinstmögliche Erweiterung einer reinen Identitätslogik. Es ist bekannt, wie Relationen beliebiger Stellenzahl mengentheoretisch zu definieren sind, also in gewissem Sinne durch eine binäre erzeugt werden. Diese Reduktion ist aber auch in ganz direkter Weise möglich, wie ein wenig bekannter Satz von Herzberger zeigt: ist R eine n-stellige Relation auf einer unendlichen Menge, so gibt es binäre Relationen $S_1,...,S_n$ auf derselben Menge, derart, daß

$$R(x_1 ,..., x_n) \text{ genau dann, wenn ein } w \text{ existiert mit } S_1(w,x_1) \wedge ... \wedge S_n(w,x_n) .$$

Hingegen ist leicht zu zeigen, daß auf jeder unendlichen Menge binäre Relationen existieren, die nicht auf Prädikate (unäre Relationen) zurückgeführt werden können [55)]. Ein philosophisches Gegenstück zur binär konstituierten Mengenwelt hat Carnap in seinem "Logische[n] Aufbau der Welt" gegeben: die gesamte Gegenstands- und Weltkonstitution im erkennenden Subjekt kann, durch systematische Verwendung mathematischer Relationstheorie, aus der binären Relation der "Ähnlichkeitserinnerung" abgeleitet werden [56)]; so erscheint das Vergleichen von Paaren als Quelle aller Erkenntnis. Der analoge Sachverhalt in der mathematischen Kategorienlehre ist, daß jeder Morphismus zwei Objekte in Beziehung setzt.

20

Carnaps oben erwähntes Buch ist (wie er selbst hervorhebt) eine zu theoretischen Zwecken unternommene *Re*konstruktion; gehen wir zurück zum phänomenologisch Primären. Die raumzeitlichen data werden vom theoretischen Agieren unter gewissen Grundhinsichten betrachtet, die als erster Aristoteles mit seinen Kategorien zu erfassen versucht hat; nehmen wir diese Aufzählung, in Ermangelung einer besseren, als Leitfaden [57)]. Den (ohnehin problematischen) Substanzbegriff können wir hier übergehen; die ουσια ist jedenfalls Einheit schlechthin, an der sich Zweiheit erst zeigt, und zwar stets unter speziellen Hinsichten [58)]. Aus einem ähnlichen Grund brauchen wir auch die "Metakategorie" der Beschaffenheit (ποιον) nicht zu betrachten. Von Relation (προσ τι), sowie Raum und Zeit (που und ποτε) haben wir schon gehandelt; das Haben (εχειν) ist ein Spezialfall von Relation. Tun und Leiden (ποιειν und πασχειν), moderner ausgedrückt, Ursache und Wirkung tragen die Zweiheit sichtbar an sich.

Die Quantität (ποσον) zeigt eine schon von Aristoteles thematisierte Dichotomie in sich, nämlich die Unterscheidung von diskreter und kontinuierlicher Quantität; die erste ist "absolut", insofern sie ihr Maß in sich selbst trägt, die zweite kann nur relativ zu andern Quantitäten gemessen werden. Hier ist die "Arbeit des Begriffs" trotz sehr langer und großer Bemühung noch zu keiner befriedigenden Synthese vorgedrungen. Im Standarduniversum wird kontinuierliche Quantität durch die Potenzmenge der (unendlichen) diskreten wiedergegeben; aber ohne ein zusätzliches Axiom ist nicht entscheidbar, ob es noch eine Kardinalität zwischen beiden gibt. Vor allem aber ist der Mengenbegriff dem Kontinuum nicht adäquat [59)].

21

Es bleibt die Lage (κεισθαι), die eine relative Lage von räumlichen Objekten zueinander bezeichnet und, für sich genommen, keine irgendwie ausgezeichnete Zweiheit erkennen läßt. Mittelbar aber stoßen wir doch auf eine solche, in der Tat fundamentale; nämlich wenn wir den Eingriff des theoretischen Agierens in das phänomenal Gegebene betrachten.

Zu den Aufgaben des theoretischen Agierens gehört, Handlungen in Gedanken vorwegzunehmen und sich ihre Resultate vorstellig zu machen. Jede Handlung ist verknüpft mit Veränderung der Lage, Bewegung im Falle kontinuierlicher, Permutation oder Rekombination im Falle diskreter Veränderung. Nun kann das, was durch eine Lageveränderung außerdem noch bewirkt wird, selbst in Gedanken nur ausnahmsweise zurückgenommen werden (die Zunahme der Entropie, etwa Information, zum Beispiel gar nicht), während dies für die Lageveränderung selbst, wenn man also von aller sonstigen Wirkung abstrahiert, ohne weiteres möglich ist. Bewegung und Permutation sind, soviel ich sehen kann, die einzigen "elementaren" Handlungen, die durch eine Handlung desselben Typs rückgängig gemacht werden können (immer unter Voraussetzung der genannten Abstraktion). Einen Schritt vorwärts und einen rückwärts gehen sind Handlungen, die ohne Bezug auf die jeweils andere definiert werden können (insbesondere ist keine a priori eine rückgängig machende) und sich gegenseitig aufheben. Wir haben schon den Begriff der Halbgruppe als den Grundbegriff aller mathematischen Handlungsbeschreibung erwähnt; er verengt sich hier zum Gruppenbegriff, in dem zusätzlich die Existenz von Inversen postuliert wird. Dabei ist bemerkenswert, daß nur die Existenz von einseitigen Inversen (links oder rechts) gefordert werden muß; die Axiomatik (Assoziativität und Lösbarkeit aller Gleichungen $ax = b$) liefert von selbst, daß aus $ab = 1$ auch $ba = 1$ folgt; mit andern Worten, die Inversenbildung in Gruppen ist involutorisch, was im allgemeinen Begriff des Zurücknehmens nicht enthalten ist [60)]. Bewegung und Permutation sind die lebensweltlichen Urbilder des Gruppenbegriffs; man beachte, daß die Inversenbildung bei den Quantitäten ein künstlicher Prozeß ist, der erst relativ spät stattfand [61)], während die Geometrie immer schon (avant la lettre) mit Inversen gearbeitet hat. Diese Inversenbildung des theoretischen Agierens, die eine vorgestellte Handlung oder Entwicklung gedanklich zurücknimmt, dieses Umkehren der Zeit für die Zwecke des Planens, ist etwas schlechterdings Notwendiges, ja geradezu eine raison d'etre dieses Agierens: ohne diese Möglichkeit des Zurücknehmens wäre zu keiner gedachten Handlung eine Alternative denkbar, das Vorweg-Denken würde seinen Sinn verlieren. Gleichzeitig stellt sich in ihr die Emanzipation dieses Agierens von der Welt dar, denn die Welt nimmt nie etwas zurück.

22

Indessen geschieht das Zurücknehmen von Handlungen in Gedanken meistens nicht durch Inversion von Lageveränderung, sondern durch Verwerfen und "Ausstreichen" einer Möglichkeit, also durch Negation. Sie ist der theoretische Akt par excellence, mit dem der Gedanke aus der Passivität bloßen Wahrnehmens heraustritt und sich dem, was der Fall ist, gleichsam gegenüberstellt. Die Feststellung, daß etwas nicht der Fall ist, setzt den Vergleich des vorliegenden Sachverhalts mit einem solchen voraus, der eben nicht vorliegt, sondern vom Denken "mitgebracht" wird. Hier finden wir eine weitere fundamentale Zweiheit, die von "wahr" und "falsch". Der Satz vom Widerspruch, in Formeln $p \to \neg\neg p$ oder $\neg(p \wedge \neg p)$, sagt die Unverträglichkeit der Wahrheitswerte aus, das Prinzip des Tertium non Datur, $\neg\neg p \to p$ oder $p \vee \neg p$, ihren komplementären Charakter; aus beiden zusammen folgt, daß Negation involutorisch ist. Die formale "Dualität" der beiden Prinzipien täuscht leicht über ihre tiefe Verschiedenheit hinweg. Wenn wir den Satz vom Widerspruch aufgeben, verlieren unsere Sätze ihren Sinn, und die Sprache "läuft leer". Geben wir das Tertium non Datur auf, verzichten wir nur auf ein

Schlußprinzip (die indirekten Schlüsse); wir lassen die Möglichkeit weiterer Wahrheitswerte offen, eben eines Tertium, ohne uns dabei festzulegen zu müssen [62]. Der Satz vom Widerspruch ist also eine notwendige Voraussetzung unseres (diskursiven) Denkens, das Tertium non Datur strenggenommen nur eine Hypothese, die sich freilich sehr gut bewährt (und vielleicht nicht anders betrachtet werden sollte als eine physikalische Hypothese [63]), aber doch nicht selbstverständlich ist. Eine negierte Aussage ist eine Aussage über eine Aussage, eine doppelt negierte also eine Aussage über eine Aussage über eine Aussage; daß diese zweifache Einschaltung von Reflexion ihre Aufhebung und die Rückkehr zur "einfachen" Aussage bedeuten soll, ist jedenfalls nicht zwingend [64]. Das einfache p ist eine Aussage über einen Sachverhalt, und aus ihr folgen Aussagen über Aussagen; daß man aber aus Aussagen über Aussagen auf einen Sachverhalt soll schließen können, ist offenbar nicht dasselbe; man kehrt damit das "natürlicherweise" einseitige Dependenzverhältnis von Sachverhalten und Aussagen um. Hinter dem Unterschied der beiden Prinzipien aber steht, daß der Satz vom Widerspruch, anders als das Tertium non Datur, primär nicht ein logisches, sondern ein ontologisches Prinzip ist [65].

Die Bedeutung der Zweiwertigkeit für die Mathematik ist natürlich dieselbe wie die für das theoretische Agieren im Ganzen: sie ermöglicht indirekte Schlüsse. Allein die Mathematik aber kann auch aus dem "Offenhalten" der Wahrheitswerte Gewinn ziehen. Denn wir benutzen das Tertium non Datur ja nicht nur, um Sachverhalte zu beweisen, sondern auch, um solche auszuschließen; der Verzicht darauf läßt darum zu, was sonst undenkbar erscheint, wie den Satz Brouwers von der Stetigkeit aller reellen Funktionen. In den meisten Fällen freilich sind die Resultate der intuitionistischen (konstruktiven) Mathematik nur schwächer als die "klassischen" (und ihre Beweise komplizierter), und ich kann nicht sehen, daß irgendeiner der oben angeführten mathematischen Sachverhalte durch den Wechsel zur intuitionistischen Betrachtungsweise aufgehellt würde.

23

Resümieren wir die (philosophisch-) kategorialen Zweiheiten: in der Raumerfahrung die Zweidimensionalität des Sehfelds, die Unterscheidung von Innen und Außen und das Paar der Orientierungen; in der Zeiterfahrung das Früher und Später; im theoretischen Agieren die involutorische Inversenbildung, dann das Paar der Wahrheitswerte und ihre Vertauschung in der Negation. Mathematik schafft hier Synthesen: Orientierungsumkehr, Inversenbildung und Negation kann man als Operationen einer Gruppe der Ordnung 2 verstehen; der (kanonische) Antiautomorphismus in einer Booleschen Algebra enthält Aspekte von Innen und Außen (das Komplement einer Teilmenge als ihr Äußeres), Negation (die klassischen Wahrheitswerte bilden eine Boolesche Algebra) und Orientierung (man denke die Algebra als Graph).

Beim zweidimensionalen Sehfeld scheint es, als ob die Natur beim Hervorbringen unserer kategorialen Organisation einer mathematischen Tatsache Rechnung getragen hätte (womit der Platonismus eine Stütze erhielte). Das ist natürlich nur jener Schein, den kritische Philosophie auf allen Feldern überwunden hat: die "mathematische Tatsache" ist ja selbst ein Produkt jener Organisation. Wir können nicht mehr sagen als: unsere mathematische Erkenntnis vom Schwellencharakter der Zwei in der Raumlehre korrespondiert mit der Tatsache des zweidimensionalen Sehfelds; unser theoretisches Agieren "bestätigt" in gewissem Sinne die Organisation des Sinnesapparats, indem es sie als zweckmäßig begreift.

Die Zeitstruktur legt die Bevorzugung binärer Operationen und Relationen nahe. Man wird vermuten dürfen, daß hier wenigstens *ein* tieferer Grund für die Kapriolen der Zwei in der Algebra und Zahlentheorie zu suchen ist. Wir haben gesehen, wie selbstinverse Elemente in der Gruppentheorie eine besondere Rolle spielen; für mehrstellige Operationen aber ist nicht klar, wie neutrale Elemente und sodann Inverse zu definieren sind; es gibt mehrere Möglichkeiten, unter denen keine a priori ausgezeichnet erscheint. Verläßliche Aussagen wären erst dann möglich, wenn man entsprechend ausgearbeitete Theorien mehrstelliger Operationen besäße. Und selbst dann wäre der Weg der "Erklärung" ein langer, und die eingangs besprochene Sinnfrage würde virulent werden.

Indem sie nur *eine* Handlung die jeweils nächste sein läßt, führt die Zeitstruktur auch dazu, daß ein Morphismus einer Kategorie stets von einem Objekt zu *einem* andern geht, wodurch der Begriff der dualen Kategorie möglich wird; würde ein "Morphismus" stets drei Objekte in Beziehung setzen, wäre schon die Komposition nicht klar, von andern Grundbegriffen nicht zu reden. Auch die Zweiheit der Orientierungen und der Wahrheitswerte trägt zur ordnenden Funktion der Zwei in Dualitäten bei. Diese Funktion verweist also deutlich auf die kategoriale Organisation, und hierin können wir den Grund dafür sehen, daß die Zwei in dieser Funktion keine Rivalin hat, während in "numerischer" Hinsicht auch andere Zahlen Sonderrollen haben, wenn auch in weit kleinerem Ausmaß [66)].

Man bemerkt übrigens, wie bei jener Bevorzugung die Zwei ihren restriktiven Charakter hervorzukehren scheint: die Zwei als *kleinste* Vielheit, auf die man die höheren Vielheiten *reduzieren* kann; wogegen sie in der Mathematik des Raums ihren ermöglichenden, freigebenden Charakter zeigt: die Zwei als erste *Vielheit* (nämlich von Gestalt), an der sich die höhere offenbart. Auch sehen wir, wie die Zeitstruktur unser mathematisches Agieren *formt*, während der Raum diesem so Geformten als etwas zu Erfassendes und Bewältigendes vor- und aufgegeben ist, welchem wir, wie schon Gauß bemerkte, die Gesetze nicht vorschreiben können. Immerhin hat die Mathematik zu allem Vorgegebenen und phänomenologisch Unhintergehbaren Alternativen aufgewiesen, von der nichteuklidischen Geometrie bis zu parakonsistenten Logik.

24

Das bisher Entwickelte weist auf eine Dominanz der Zeitstruktur in der Form unseres theoretischen Agierens hin; diese wird auch durch das letzte hier zu besprechende Problem suggeriert. Orientierung ist ein Begriff aus der Mathematik des Raums, in den aber, bei seiner Übertragung ins theoretische Agieren, ein Zeitfaktor einzudringen scheint. Daß die uns umgebende Natur gewisse Orientierungs-Vorlieben zu haben scheint, ist viel diskutiert worden. Bekanntlich sind fast alle Aminosäuren linksdrehend, fast alle Schneckengehäuse hingegen rechtsdrehend. Hier könnte (soweit ich sehe) die

Bevorzugung ohne weiteres auch umgekehrt sein, nicht aber bei einer mathematischen "Orientierungsfrage": warum verwenden wir statt einer bestimmten Kategorie nicht die dazu duale? Im wichtigsten Fall der Mengenkategorie $\mathcal{M}$ ist dies, wie schon erwähnt, die Kategorie $\mathcal{B}$ der vollständigen atomaren Booleschen Algebren. Hier sind Unterschiede manifest: ein "Individuum" in einem Objekt X (einer beliebigen Kategorie) kann kategorial durch einen Pfeil x: 1 --> X wiedergegeben werden, wo 1 ein Endobjekt ist (man spricht von "globalen Elementen"). In $\mathcal{M}$ gibt es stets "genügend viele" Individuen, genauer: $\mathcal{M}$ ist "well-pointed", das heißt Morphismen f: X --> Y sind durch alle $f(x) = f \circ x$ festgelegt. In Topoi (Kategorien mit "genügend vielen guten Eigenschaften") kann dieser Elementbegriff zu einer vollständigen "pfeiltheoretischen" Rekonstruktion des Mengenbegriffs ausgebaut werden. In $\mathcal{B}$ hingegen hat ein nichttriviales X gar kein Element, entsprechend der Tatsache, daß es in $\mathcal{M}$ für nichtleeres X keinen Morphismus X --> $\emptyset$ gibt [67)]. Fragt man nach einem Grund für die Bevorzugung, so legt sich die Vermutung nahe, daß hier die Asymmetrie zwischen dem Allgemeinen und dem Besonderen zu mathematischer Gestalt kommt: ein Allgemeines wird in der Regel von vielen Individuen geteilt; die Zuordnung x --> $f \circ x$ ist ein einfacher Ausdruck dafür, daß das Individuum x dem allgemeinen Prozeß f unterworfen wird [68)]. Eine andere kategoriale "Orientierungsvorliebe" ist die Bevorzugung Linksadjungierter bei Funktoren auf algebraischen Kategorien [69)]; eine weitere die Existenz kanonischer Epi-Mono-Faktorisierungen in geeigneten Kategorien (zum Beispiel beim Homomorphiesatz), die sich auch beim Dualisieren nicht umkehrt [70)].

In $\mathcal{B}$ bedeutet das obige x^{op} einen Morphismus ins Anfangsobjekt P(1) = {0,1}; er entspricht einer Aufteilung des Objekts X in zwei (nichtleere) Klassen. Dies führt uns zu einer Variante unserer Orientierungsfrage: Warum haben wir eine so ausgeführte Mathematik binärer Operationen $X \times X$ -> X, und sowenig von der dualen Form X -> $X \times X$? [71)] Die beiden Wurzeln binärer Operationen sind das Hintereinanderausführen von Handlungen und das Zusammenfügen von Quantitäten, was beides ersichtlich zur ersten Form gehört; dual dazu ist in beiden Fällen das Aufteilen, welches im Planen und Handeln ebenso häufig ist wie das Zusammenfügen. Nun kann man leicht einen Grund dafür angeben, warum die Mathematik des Zusammenfügens die des Aufteilens dominiert: für das Zusammenfügen gibt es immer nur *eine* Möglichkeit, für das Aufteilen hingegen meist viele, oft in unbegrenzter Zahl. Wenn man eine Handlung planend in Schritte unterteilt, ist das Hintereinanderausführen dabei schon vorausgesetzt. Beim Aufteilen von Quantitäten müssen diese zuerst (wenigstens gedanklich) zusammengefaßt werden. Mathematisch begegnen wir hier einfach der logischen Priorität der Halbgruppe vor der Gruppe: das Aufteilen bedeutet in der Praxis die Lösung einer Gleichung a = xy oder = bx, läuft also mathematisch hinaus auf Inversenbildung in einer Halbgruppe, deren Multiplikation natürlich vorgegeben ist.

25

Auf dunkle Weise scheint sich nun im Primat des Schemas $X \times X$ --> X die Gerichtetheit der Zeit auszuwirken. Denn es bedarf nur eines kleinen spekulativen Ausgriffs, einer Erinnerung an eine der allerersten Einsichten des über seine Lage nachdenkenden

Menschen, um diese Asymmetrie im theoretischen Agieren mit der Entropiezunahme bei natürlichen Prozessen und so mit der Zeit in Verbindung zu bringen: der Zerfall kommt von selbst, für raumzeitliche Gegenstände, Heideggers "Zeug", ebenso wie für abstraktere, Religionsartikel, Gesetze und Gebräuche; die Conditio Humana legt uns auf, ihn durch Akte des *construere* aufzuhalten, der Auflösung durch Synthesen entgegenzuwirken, bis sie uns selbst trifft:

> Uns überfüllts. Wir ordnens. Es zerfällt.
> Wir ordnens wieder und zerfallen selbst. [72)]

Kant hat die größte Mannigfaltigkeit unter der größten Einheit als universelles Ziel unserer Erkenntnis gesehen [73)]; hier erscheinen Einheit und Vielheit als gleichberechtigte, einander wechselseitig fördernde Aspekte. Da aber auch die Erkenntnis in der einheitzerstörenden Zeit stattfindet, entsteht eine Asymmetrie. Vilem Flusser hat die menschliche Kommunikation als eine Art Gegen-Entropie, als "negentropisch" bezeichnet [74)]; seine These kann ausgedehnt werden auf die gesamte menschliche Kulturtätigkeit. Sie zielt immer auf Zusammenfassung und Einheitsstiftung; der Gott hingegen (um noch einmal mit Rilke zu sprechen) ist "heiter und verteilt" [75)].

Hier brechen wir ab; der Leser mag nun urteilen, ob wir über eine Materialsammlung und ein mathematisch-philosophisches Divertissement hinausgekommen sind und der Versuchung zu schlechter Metaphysik nicht allzu sehr nachgegeben haben. Bei Gegenständen wie diesem hat man schon etwas erreicht, wenn sinnvolle Fragen gestellt und sinnlose als solche erkannt werden, und wenn Zusammenhänge und Denkmöglichkeiten in Sicht gekommen sind. Es kann aber auch sein, daß als wesentlicher Ertrag dieser Arbeit die Einsicht in den hoffnungslosen Charakter der Aufgabe bleibt.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Ein einfaches Beispiel mag die Sinnproblematik illustrieren. Es bezeichne Z(p,r) die Aussage, daß für Primzahlen p die Gruppe der primen Restklassen ganzer Zahlen mod p^r zyklisch ist. Bekanntlich ist Z(p,r) für ungerade p und alle r wahr, während Z(2,r) für $r > 2$ falsch ist. Um das zu "erklären", kann man zum Beispiel einen Beweis von Z(p,r) für ungerades p studieren und feststellen, wo die Eigenschaft $p > 2$ benutzt wird. Beim Standardbeweis findet man die folgende: nur für $p > 2$ ist p ein Teiler des Binomialkoeffizienten (p/2). Wissen wir jetzt mehr über die Zwei? Man kann auch bemerken, daß die prime Restklassengruppe mod 2^r, $r > 2$, diejenige mod 8 als homomorphes Bild hat, aber eine zyklische Gruppe nur zyklische Bilder hat. Diese Eigenschaften haben mit der Zwei nichts zu tun; es bleibt also als "verantwortliche" Eigenschaft, daß die Gruppe mod 8 nicht zyklisch ist. Hat es Sinn, hier noch nach "tieferen Gründen" zu fragen? - Auch formallogisch ist die ganze Fragestellung problematisch. Ist P eine solche "besondere" Eigenschaft, die, sagen wir, für natürliche Zahlen definiert ist, aber nur der Zwei zukommt, so ist also P(n) <-> (n=2), und dasselbe

gilt für jede "erklärende" Eigenschaft; insbesondere sind alle solchen "Sondereigenschaften" untereinander äquivalent. - Es ist klar, daß jede Zahl, einfach dadurch, daß sie von andern Zahlen verschieden ist, auch gewisse Eigenschaften haben muß, die andere nicht haben; die Zahlentheorie liefert dafür Beispiele in beliebiger Menge. Bei der Zwei sind die Sondereigenschaften natürlich zahlreicher und auffälliger als bei andern Zahlen. Aber das könnte ja einfach daran liegen, daß sie für andere Zahlen nur komplizierter sind. Rein formal kann man durch Benutzung von Permutationen der Zahlen jede Sondereigenschaft einer Zahl auf jede andere Zahl übertragen.

(2) Bekanntlich kann man Negation und alle Junktoren durch einen einzigen konstruieren ("weder-noch"), aber kein mir bekanntes Lehrbuch der Logik macht davon Gebrauch. Dasselbe gilt für die Tatsache, daß man in der Aussagenlogik mit einem einzigen Axiom auskommen kann (siehe etwa E.Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Chapman and Hall 1997, S.46). Die Einbuße an Verständlichkeit wiegt die Verkürzung auf; nicht alles Erstaunliche ist auch bedeutend.

(3) Zu ihr würde sicherlich gehören, auch die besonderen Rollen anderer Zahlen zu betrachten, wobei sich ein "strukturelles decrescendo" zeigen würde: die kleinsten Zahlen zeigen die stärksten Individualitäten. Wir bleiben bei der Zwei, die schon genug zu tun gibt.

(4) Nach Husserl (Philosophie der Arithmetik, Halle 1891) ist dieses Zusammendenken, von ihm "Colligiren" genannt, eine unhintergehbare Fähigkeit des theoretischen Agierens.

(5) Eine bekannte Scherzfrage ist die nach dem Fehler in folgendem "Beweis" der Aussage, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind: Wir zeigen durch Induktion, daß n=1 für alle n gilt. Der Anfang ist klar. Gilt schon n=n-1=...=1, so ist auch n+1 = (n-1)+1 = n = 1, QED. Das scheitert allein an der Zwei.

(6) Hier ist *eine* Wurzel für die vielen Zweiheiten zu vermuten, welche seit jeher die Weltbilder gliedern (wie Gut und Böse, Himmel und Erde, Yin und Yang). Das haben wir (zum Glück) hier nicht zu betrachten, auch nicht die "psychologischen" Besonderheiten der Zwei, von denen Menninger (Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1958, S.22 ff) handelt. Eine andere Wurzel ist, daß es für alle (realen) Quantitäten Maxima und Minima gibt, die dann als "Pole" erscheinen, welche alles in sich einschließen, wie Tag und Nacht. In systematischem Rahmen hat Nicolai Hartmann von "elementaren Gegensatzkategorien" gehandelt (Der Aufbau der realen Welt, Berlin 1964, S.200 ff).

(7) Indem man Ordnungen > 3 durch Auflösung in mehrere Punkte reduziert, zum Beispiel eine Kreuzung durch zwei aufeinanderfolgende Abzweigungen ersetzt. Dies hat Peirce als Illustration seiner These über Relationen benutzt; siehe Anmerkung 55. Ein (zusammenhängender) Graph mit Ordnungen höchstens 2 ist eine Gerade oder ein Kreis. In der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten entspricht dem die Tatsache, daß in der Dimension 1 bis auf Diffeomorphismen nur die reelle Gerade und der Kreis existieren.

(8) J.H.Conway, On Numbers and Games, Academic Press 1976; dt: Über Zahlen und Spiele, Braunschweig 1983.

(9) Sophistes, 218e - 221a.

(10) Siehe dazu J.L.Brenner/J.Wiegold, Two-Generator Groups, Michigan Math. J. 22 (1975), S.53.

(11) D.Gorenstein, Finite simple Groups, New York 1982, S.55.

(12) L.K.Hua/I.Reiner, in Transact. AMS 64 (1949).

(13) Die Vorankündigung in Proc.Nat.Acad.Sci. 48(1962), 968-70, enthält einige Hinweise, in welcher Form die ungerade Ordnung eingeht. Z.B. hat eine solche Gruppe keine (nichttrivalen) reellen irreduziblen Charaktere, wodurch gewisse Charakterabschätzungen möglich werden.

(14) Siehe etwa Gorenstein (Anm.11).

(15) Man kann hinzufügen, daß in allen exorbitant großen Ordnungen dieser Gruppen keine größere Primzahl als 71 vorkommt. Ich würde gern wissen, ob die beschriebene Prädominanz der Zwei auch bei den einfachen Gruppen vom Lietyp statthat.

(16) Siehe M. Aschbacher, Finite Group Theory, Cambridge 1986, S. 242. Ich kenne kein entsprechendes Resultat für Elemente höherer Ordnungen; es wäre wohl auch zu komplex, um brauchbar zu sein.

(17) Für beides siehe C.H.Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley 1994, Ch.9.

(18) Den kubischen Formen hat Y.Manin eine profunde Studie gewidmet: Cubic forms, Amsterdam 1974. Vergleicht man mit der klassischen Theorie der quadratischen Formen, fällt sofort auf, daß die Methoden beinahe disjunkt sind.

(19) Daß man für quadratische Gleichungen eine Lösungsformel hat, ist übrigens hier nicht so wichtig, wie man glauben könnte; solche Formeln hat man auch für die Grade drei und vier, aber die kubischen und biquadratischen Körper sind nicht annähernd so gut bekannt wie die quadratischen.

(20) Die Frage liegt nahe, ist aber meines Wissens unerforscht, ob man nicht (polynomiale) binäre Operationen von Matrizen und Zahlen definieren kann, für welche die andern elementarsymmetrischen Funktionen der Eigenwerte Morphismen werden.

(21) Besonders durch die Arbeiten von W.Thurston; siehe sein Buch: Three Dimensional Geometry and Topology, Princeton 1997.

(22) Weil jede endlich präsentierbare Gruppe Fundamentalgruppe einer solchen Mannigfaltigkeit ist und eine Klassifikation der letzteren auch eine der ersteren mit sich brächte, was den bekannten Resultaten über die Unlösbarkeit der Dehnschen Probleme widersprechen würde. Siehe etwa Massey, Algebraic Topology: An Introduction, Springer 1967. S.143. Jedoch ist die Klassifikation der *einfach zusammenhängenden* geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten gelungen. - Manches scheint übrigens darauf hinzuweisen, daß die größten Probleme der Gestaltmathematik in den Dimensionen drei und vier konzentriert sind.

(23) Siehe etwa T.tom Dieck, Topologie (2.Aufl.), de Gruyter 2000.

(24) Siehe etwa R.Devaney, A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Addison-Wesley 1992.

(25) Stichworte: Kongruenzproblem, beschränkte Erzeugung, Index von Normalteilern, Wachstum der Untergruppenzahlen mit dem Index; paradigmatisch für all das ist der Vergleich von $SL(2,\mathbb{Z})$ mit $SL(3,\mathbb{Z})$. Siehe G.A.Margulis, Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Springer 1991 und den Artikel von A.Lubotzky in Inv. Math. 119 (1995).

(26) Freilich treten im Raum neue Probleme auf (Theorie der Knoten, Zöpfe und Gewebe); der allgemeine Hintergrund ist hier das Einbettungsproblem der Mannigfaltigkeiten.

(27) Siehe etwa J.Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Princeton 1971, §§9,10. Einige der in Anm.26 genannten Probleme hängen damit aufs engste zusammen.

28) Hier ist eine weitere Besonderheit der Zwei zu nennen: hat der algebraische Abschluß eines Körpers über diesem einen endlichen Grad, so ist dieser gleich 2, und die Erweiterung entsteht durch Adjunktion einer Nullstelle von x^2+1. Dieses Resultat stammt von E.Artin; siehe S.Lang, Algebra, New York 2002.

(29) Siehe dazu den Artikel von F.Hirzebruch in dem Band "Zahlen", ed. Ebbinghaus e.a., Springer 1983.

(30) Siehe Hirzebruch a.a.O. Man könnte denken, daß die Sonderrolle der Zwei hier nicht überraschen kann, da die Sphären ja durch quadratische Gleichungen definiert sind. Aber der Satz gilt ja auch für alle zu den Sphären diffeomorphen Mannigfaltigkeiten (die nicht einmal algebraisch sein müssen).

(31) Siehe tom Dieck (Anm. 24), S.316.

(32) Wobei die Umkehrung ein rein formaler Prozeß ist und nichts mit Inversenbildung zu tun hat.
(33) Näheres bei H.Herrlich/G.Strecker, Categories, Berlin 1979, 14H, 32H.

(34) "Injektiv" und "surjektiv" sind die mengentheoretischen Realisierungen von "monomorph" und "epimorph", einem dualen Paar. Die Abweichung des ersten Paars von der Dualität zeigt sich zum Beispiel an folgender Tatsache: Injektivität ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Linksinversen, Surjektivität mit der einer Rechtsinversen. Das ist noch dual; aber der Beweis der zweiten Tatsache benutzt das Asuwahlaxiom (ist sogar eine Form davon), der andere Beweis nicht. Eine andere Abweichung von der Dualität ist diese: ist d ein Teiler von n, so gibt es eine *kanonische* Abbildung der zyklischen Gruppe der Ordnung n auf die der Ordnung d, aber nur *unkanonische* Einbettungen von dieser in jene. Hier deutet sich eine Bevorzugung einer "Orientierung" an, wovon noch zu reden sein wird.

(35) Siehe etwa Mendelson (Anm. 2). Auch für die Prädikatenlogik gibt es ein Dualitätsprinzip.

(36) Dualitätssätze von Poincaré (Topologie), Serre (Algebraische Geometrie), Tate-Poitou (proendliche Gruppen) mit allen Varianten.

(37) Hier gibt es Beispiele für nicht-kanonische Isomorphismen, nämlich zwischen Objekten und dem einfachen Dual, nämlich für endliche abelsche Gruppen und endlichdimensionale Räume.

(38) Manchmal spricht man (aus historischen Gründen) von Reziprozität auch in einem weiteren Sinne, nämlich bei "Geschlossenheitsbedingungen" mit beliebiger Argumentzahl, wie die Summenformel für die Hasseinvarianten globaler einfacher Algebren. Die Denkfigur ist aber doch eine andere: man kann über die Gesamtheit gewisser Invarianten eine Aussage machen, ohne sie einzeln zu kennen. Einfachere Beispiele dafür sind die Produktformel in bewerteten Körpern oder die Eulercharakteristik von Räumen.

(39) Man sollte aber erwähnen, daß die Adjungierten der linearen Algebra keine solchen im kategorialen Sinne sind; die Übernahme des Begriffs scheint den ganz äußerlichen Grund gehabt zu haben, daß die Formel Hom(A,F(B)) = Hom(G(A),B) der kategorialen Adjunktion ähnlich aussieht wie die Adjunktionsformel für lineare Abbildungen.

(40) Siehe "Adjunktion als Denkfigur", in meinen "Beiträge[n] zu einer Philosophie der Mathematik", Leipziger Universitätsverlag 2002.

(41) Siehe hierzu M.Aigner, Diskrete Mathematik, Braunschweig 1993.

(42) Zu Prominenz gelangt ist der Begriff der Komplementarität auch in der Quantenmechanik, wo er ein Paar von Observablen bedeutet, deren zugeordnete Operatoren nicht vertauschbar, die also nicht simultan meßbar sind. Hier ist (in gewissem Sinn) nur eine unserer beiden Bedingungen erfüllt, weswegen wir dieses Beispiel nicht näher betrachten.

(43) Siehe dazu meinen Aufsatz "Categories in Philosophy and Mathematics", Hamburg 2004.

(44) Näheres bei A.Gosztonyi, Der Raum, Freiburg 1976, Bd.II. Die kaum zu ermessende Bedeutung des Matrizenkalküls für die mathematische Praxis beruht gerade darauf, daß er genuin höherdimensionale Sachverhalte in der Ebene "repräsentiert".

(45) Schon in der Scholastik finden wir Andersheit als Ursprung aller Vielheiten; Thierry von Chartres: Nam ubi alteritas, ibi est pluralitas. Quod patet ex hoc quod prima alteritas, quae ab unitate descendit, scilicet binarius, pluralitatem facit (Lectiones I 33). Das Gegenüber von Ich und Nicht-Ich wird dann der Ausgangspunkt für den Idealismus Fichtes.

(46) Prolegomena §13: "Wir können daher auch den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch inkongruenter Dinge (z.B. widersinnig gewundener Schnecken) durch keinen einzigen Begriff verständlich machen, sondern nur durch das Verhältnis zur rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf Anschauung geht." Hermann Weyl (Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1966, S.113) kommentiert: "Kant findet den Schlüssel zum Rätsel des links und rechts im transzendentalen Idealismus. Der Mathematiker sieht dahinter die kombinatorische Tatsache der Unterscheidung von geraden und ungeraden Permutationen. Die Diskrepanz zwischen der Fragestellung des Philosophen und des Mathematikers nach den Wurzeln des Phänomens, das uns die Natur stellt, kann kaum auffallender beleuchtet werden". Aber dieser Idealismus behauptet gar nicht, ein Rätsel gelöst zu haben, sondern konstatiert gerade die Unhintergehbarkeit eines Phänomens, welches im übrigen von der Gruppentheorie nicht *erklärt*, sondern lediglich *beschrieben* wird. Auch für mehr als zwei Orientierungen gibt es mathematische Modelle, wie es ja auch für eine einzige solche gibt (Grundbereich der Charakteristik 2; das ist von Bedeutung in der algebraischen Topologie - nimmt man Homologie mit Koeffizienten in diesem Bereich, braucht man auf Orientierung nicht zu achten. Allgemeiner hat jede Mannigfaltigkeit eine zweiblättrige "Orientierungsüberlagerung", die genau im orientierten Fall trivial ist.)

(47) Der Körperbau aller (höheren) Lebewesen zeigt eine ausgezeichnete Bewegungsrichtung (entsprechend dem eindimensionalen Normalenbündel zur zweidimensionalen Sehfläche); was aber wohl auch damit zu tun hat, daß die Bewegung durch diese Bündelung effizienter wird. Vorn und Hinten sind damit festgelegt, Oben und Unten durch die Schwerkraft (bei Bewegung in einem dichteren Medium tritt dieser Einfluß zurück, und der Bau der Fische zeigt in der Tat mehr Symmetrie). Nur bei Rechts und Links haben wir Raum für Konventionen (weswegen Lechts und Rinks so oft velwechsert werden, wie Jandl bemerkte). Daher haben wir auch für die ausgezeichenten Richtungen die Präpositionspaare "vor-hinter", "über-unter", während "neben" zweideutig bleibt.

(48) In der einschlägigen Diskussion sind die beiden Beschreibungen der Zeit als A- und B-Reihe bekannt; siehe etwa P.Bieri, Zeit und Zeiterfahrung, Frankfurt/M 1972. Für den strukturellen Gesichtspunkt der Mathematik ist Richtungsumkehr in angeordneten Mengen eine Dualität (die wir oben schon erwähnt haben). - In diesem Zusammenhang ist ein Gedicht Nietzsches beachtenswert, in dem er ausdrückt, wie die Zeit durch das Auftreten der Zwei eine Richtung erhält:

Sils-Maria

Hier saß ich, wartend, wartend, - doch auf nichts,
jenseits von Gut und Böse, bald des Lichts

genießend, bald des Schattens, ganz nur Spiel,
ganz See, ganz Mittag, ganz Zeit ohne Ziel.

Da plötzlich, Freundin, wurde Eins zu Zwei -
- und Zarathustra ging an mir vorbei.

Die Einsheit des Selbstgenusses wird also aufgehoben durch ein Zweites, von außen Herantretendes, nämlich eine bestimmte Aufgabe, die dann der Zeit wieder ein Ziel setzt.

(49) In Mythen hat es nicht selten einen rituellen Charakter, wenn für eine bestimmte Handlung Mehrere zusammenwirken müssen; wie bei den Schlössern, die nur durch sieben gleichzeitig betätigte Schlüssel zu öffnen sind. - Hier ist noch der Begriff der Handlung zu hinterfragen, der, so wie wir ihn verwenden, voraussetzt, daß wir Handlungen klar voneinander abgrenzen können. Das ist natürlich eine Idealisierung, zu welcher uns der diskrete Charakter unserer Begriffssysteme zwingt; strenggenommen können wir immer nur einen terminus ante quem und einen post quem bestimmen.

(50) Die Assoziativitätsforderung ergibt sich dabei aus der Notwendigkeit, eine Folge von Handlungsschritten (unter Wahrung der Reihenfolge) verschieden zusammengefaßt denken zu können; sie hat kein Pendant im realen Handeln. Siehe dazu meinen Aufsatz "Über Assoziativität und Kommutativität", Math.Sem.Ber. 50 (2003). - Vielleicht ist bei dieser Bevorzugung des Binären auch die Tatsache beteiligt, daß wir zwei Hände haben und dementsprechend immer nur zwei Gegenstände zusammensetzen können. Mir scheint aber die Zeitstruktur zwingender zu sein.

(51) Daß der Reduktionssatz von Herzberger (siehe Abschn. 19) so wenig bekannt ist und nicht früher gefunden wurde, hat seinen Grund wohl auch darin, daß man immer schon binär gedacht hat, für die Reduktion also gar kein praktischer Anlaß vorlag.

(52) Das einzige mir bekannte Beispiel einer ternären Basisstruktur sind die Ternärkörper der Geometrie. Übrigens gibt es Reduktionssätze wie den Herzbergerschen auch für Operationen; siehe dazu P.Cohn, Universal Algebra, Dordrecht 1981, S.338. Der Beweis sagt allerdings nichts über die kategorialen Aspekte.

(53) Wem dies verstiegen vorkommt, möge beachten, daß die Idee eines sich beständig teilenden Universums von den theoretischen Physikern im Ernst erwogen wird ("Viele-Welten-Theorie"). Ist es übrigens so unwahrscheinlich, daß wir irgendwann auch eine string-Theorie der Zeit haben werden, mit zusätzlichen Dimensionen?

(54) Auch die Zweiheit der Geschlechter hat einen ökonomischen Aspekt: wären mehr als

zwei Partner zur Zeugung nötig, würde diese zu unwahrscheinlich. Warum aber nicht Eingeschlechtlichkeit, das haben wir hier nicht zu erörtern. - Hier kann auch der mannigfache sprachliche Niederschlag erwähnt werden, den der Vorrang der Paarbildung im theoretischen Agieren gefunden hat, zum Beispiel in Dualformen von Verben in manchen Sprachen. Ausführlich hierzu Menninger (Anm. 6).

(55) H.G.Herzberger, Peirce's Remarkable Theorem, in Sumner/Slater/Wilson (Hrsg), Pragmatism and Purpose, Toronto 1981. Dies widerlegt die These von Peirce, wonach gewisse für das menschliche Erkennen fundamentale Relationen, vor allem die Zeichenrelation "a bedeutet b für c", irreduzibel dreistellig sind. Freilich gilt die Widerlegung zunächst nur auf einer formalen Ebene, und ihre philosophische Relevanz bleibt diskutabel. Vgl. auch meinen Aufsatz "On the Reducibility of Relations: Variations on a Theme of Peirce", Hamburg 2004.

(56) R.Carnap, Der logische Aufbau der Welt, Hamburg 1974.

(57) Die "materialen" Kategorien des Aristoteles wurden von Kant zu einem System der Urteilsfunktionen umgearbeitet. Materiale Kategorienlehre hat die Philosophie seither kaum mehr betrieben; am ehesten zu nennen wäre N.Hartmann, der es aber auch zu keiner Systematik gebracht hat. Für einen neueren Überblick zur philosophischen Kategorienforschung siehe den Band: Kategorie und Kategorialität, Festschrift Klaus Hartmann, D.Koch/K.Bort (Hrsg.), Würzburg 1990.

(58) Man kann sagen, daß die axiomatische Methode der Mathematik das Prinzip schlechthin zur Vermeidung des Substanzbegriffs ist.

(59) Siehe dazu meine "Mathematik für Philosophen", Leipziger Universitätsverlag 2004, Kap.8. Phänomenologisch scheint die Sachlage ähnlich wie beim Tertium non datur (siehe Abschn. 22 und Anm. 65). Wir können keine Quantität vorstellen, die zugleich diskret und kontinierlich ist, aber auch keine "dazwischen". Wenn sich einzelne Regentropfen immer mehr verdichten, nehmen wir schließlich ein kontinuierliches Rauschen wahr, aber wir könnten nicht sagen, in welchem Augenblick der Übergang stattfindet. Die Mathematik steuert hier die bedeutende Einsicht bei, daß das unendlich dichte Diskrete vom Kontinuierlichen zu unterscheiden ist.

(60) Wofür es natürlich auch mathematische Beispiele gibt (in Monoiden). Lebensweltlich ist die Reihenfolge von ursprünglicher und "zurücknehmender" Handlung meistens nicht umkehrbar, wie bei Ehe und Scheidung.

(61) Vgl. H.Gericke, Mathematik im Abendland, Wiesbaden 1992, S.248 über die Widerstände, welchen der Begriff der negativen Größen begegnete. Man sehe auch Kants diesbezüglichen "Versuch, den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen".

(62) Die Mathematik hat hier längst Alternativen geschaffen, systematisch in der Logik der Topoi. Der Verband der Unterobjekte eines Objekts, in der Mengenkategorie eine

Boolesche Algebra, ist dort im Allgemeinen nur eine Heytingalgebra mit einem nicht-involutorischen Negationsoperator; insbesondere gilt dies für das "Objekt der Wahrheitswerte", den sogenannten subobject classifier. Das einfachste Beispiel einer echten Heytingalgebra ist der Verband der offenen Teilmengen eines topologischen Raums, wo $\neg U$ das Innere des Komplements von U ist. Ist zum Beispiel U das Komplement einer diskreten Menge, so ist $\neg U$ leer, also $\neg\neg U$ der ganze Raum. Näheres bei S.Mac Lane/I.Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992. Die Quantenlogik *zwingt* uns zu diesem Verzicht; siehe dazu P.Mittelstaedt, Sprache und Realität in der modernen Physik, Mannheim 1986.

(63) In der Praxis benutzen wir das Tertium non datur meist in der Form $(a \vee b) \wedge (\neg b) \rightarrow a$. (Paradox ist, daß das auch intuitionistisch gilt, wegen der "starken" intuitioni-stischen Disjunktion, während das gewöhnliche "oder" mit dieser seinen Sinn gerade verlieren würde.) Aber nie können wir über $a \vee b$ völlige Gewißheit haben (mit andern Worten, alle möglichen Alternativen kennen). Wie sehr wir uns an die Zweiwertigkeit gewöhnt haben, zeigt auch der ubiquitäre Gebrauch der Wendung "im Gegenteil" - als ob es zu jedem Sachverhalt einen eindeutig bestimmten gegenteiligen gäbe.

(64) Die Rhetorik benutzt aber gerade diesen Durchgang durch Reflexion, um einen Sachverhalt oder eine Eigenschaft durch doppelte Verneinung hervorzuheben.

(65) Als solches erscheint er in der Formulierung von Aristoteles: es ist nicht möglich, daß Dasselbe Demselben in derselben Hinsicht und zur selben Zeit zugleich zukommt und nicht zukommt (Met.Γ3 1005b). Der Unterschied läßt sich auch phänomenologisch aufweisen: versuche ich, mir eine Rose vorzustellen, die überall rot, aber an einer Stelle nicht rot ist, so spaltet sich die Vorstellung in zwei getrennte, die nicht mehr zur Deckung zu bringen sind; versuche ich aber, mir eine Stelle vorzustellen, die weder rot noch nicht rot ist, geschieht etwas anderes: die Vorstellung "geht nicht mehr weiter".

(66) Man hat einen Begriff "Trialität" eingeführt, der aber nur in einem sehr engen Sinn eine Verallgemeinerung von Dualität ist: eine Trialität besteht in einer trilinearen Abbildung $V \times V \times V \longrightarrow K$ (V ein Vektorraum über dem Körper K), derart daß Fixierung von je zwei von 0 verschiedenen Argumenten eine von 0 verschiedene Linearform ergibt. Man zeigt leicht, daß Trialitäten den Divisionsalgebren über K entsprechen; siehe J.C.Baez, The Octonions, Bull.AMS 39(2001), 145-205.

(67) Boolesch gesehen: das Endobjekt in $\mathcal{B}$ ist $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, und ein Morphismus Boolescher Algebren muß 0 auf 0 auf 1 auf 1 abbilden.

(68) In der Dualitätstheorie wird f zur Variablen, und will man Argumente *und* Funktionen variabel halten, schreibt man auch (f,x) für f(x). Man muß also, will man genau sein, vier Schemata unterscheiden:

$x \longrightarrow f \circ x$: das Einzelne wird dem Allgemeinen unterworfen;
$f \longrightarrow f \circ x$: das Allgemeine wird am Einzelnen spezifiziert;

x^{op} --> $x^{op} \circ f^{op}$: die Teilung von X^{op} wird zu einer von Y^{op} verlängert;
f^{op} --> $x^{op} \circ f^{op}$: das Bild von f^{op} wird einer Teilung unterzogen.

(69) Siehe Herrlich/Strecker (Anm.33), Sect.32. Ein einfaches Beispiel ist der Vergiß-funktor der Gruppen, der den Funktor "freie Gruppe" als Linksadjungierte, aber keine Rechtsadjungierte hat. Es ist leicht zu sehen, warum man durch keine Konstruktion R kanonische Isomorphismen $\mathcal{M}(V(G), X) \simeq \mathcal{Gr}(G, R(X))$ herstellen kann (man setze G = 1). Die Asymmetrie von Links und Rechts rührt also hier einfach von der "stärkeren" Struktur in $\mathcal{Gr}$, welche die Morphismen einschränkt. Aber nicht alle Beispiele sind so leicht zu durchschauen.

(70) Aus $f = m\ e$ wird dual $f^{op} = e^{op}\ m^{op}$, und dies ist wieder Epi-Mono.

(71) Erst neuerdings ist mit der Theorie der Quantengruppen ein Kontext entstanden, in dem die Coalgebren in gewisser Weise "gleichberechtigt" neben den gewöhnlichen stehen. Aber der Grundbereich ist immer eine gewöhnliche Algebra.

(72) Rilke, Achte Duineser Elegie.

(73) Siehe den Abschnitt über den regulativen Gebrauch der Ideen in der KrV.

(74) V.Flusser, Kommunikologie, Frankft/M 1998, S.12 ff.

(75) Sonette an Orpheus, II. 16.

Über einige Strategien des mathematischen Denkens

1

Die Frage nach der Methode der Mathematik ist leicht zu beantworten: Mathematik verfährt axiomatisch. Dabei ist zu unterscheiden zwischen einer "primären" Axiomatik, die das gesamte Gebäude trägt (in der allgemeinen Praxis ist das die Mengentheorie, andere primäre Axiomatiken werden hauptsächlich von Logikern erforscht, in jener Praxis aber selten wirklich eingesetzt), und "sekundären" Axiomatiken, die innerhalb eines schon gegebenen Rahmens durch Realdefinitionen einen neuen Bereich von Objekten abstecken. Axiomatisches Verfahren drängt zur Formalisierung, insofern man nicht nur die undefinierten Grundbegriffe und -Relationen selbst, sondern auch ihren Gebrauch auf eine jede Unsicherheit und Zweideutigkeit ausschließende Weise feststellen möchte. Die Formalisierung bewirkt, daß der gesamte mathematische Prozeß, sofern er objektivierbares Resultat ist, also Wissenschaft, durch eine unter festen Regeln stehende Symbolumwandlung dargestellt, seine Korrektheit darum (im Prinzip) von einer Maschine geprüft werden kann. Etwas ganz anderes ist natürlich das Vollziehen, ja schon das Nachvollziehen des Prozesses.

In der real betriebenen Mathematik hat Formalisierung (außer ihrer Rolle als collegium logicum für Anfänger) nur zwei Anwendungsfelder: eines in der Logik und Grundlagenforschung, das andere beim Rechnen. Das erste geht gewöhnlich nur die damit befaßten Spezialisten an. Das Rechnen und Ausrechnen (das in allen Disziplinen auftritt, nur in wechselnden Formen und Ausmaßen) ist stets der letzte Schritt eines Gedankengangs, der zu seinem Fortkommen noch anderer Mittel bedurfte; jeder Kalkül hat das eigentliche Denken hinter sich. Versuchen wir, den unmittelbar vorausliegenden Bereich, also den der "vorletzten Schritte", in den Blick zu bekommen, so gelangen wir auf diejenige Ebene des mathematischen Prozesses, die Polya in seiner bekannten Anleitung zum "plausiblen Schließen" in der Mathematik erforscht hat [1)]. Auch auf ihr liegt das gesamte "begriffliche Umfeld" der Probleme schon geordnet vor, und es geht um Techniken, "richtige" Vermutungen aufzustellen und zu beweisen (wobei Polya sich in einem recht elementaren Bereich hält). Über ihr liegt eine Ebene, auf der weniger plausible Schlüsse gefordert sind als vielmehr Prinzipien, Begriffe zu schaffen und zu ordnen. Man könnte sagen, bei Polya geht es um die Taktik des mathematischen Denkens; darüber aber gibt es auch eine Ebene der "Strategie". Natürlich kann man die beiden Ebenen nicht scharf voneinander trennen. Aber je weiter man sich "nach oben" bewegt, in Richtung der größeren Allgemeinheit, desto mehr kann man hoffen, Systematik vorzufinden. Weht auch der Geist, woher er will, ist es doch nicht unnütz, sich über mögliche Richtungen Gedanken zu machen. Einige fundamentale Prinzipien lassen sich herausheben; sie sollen hier unser Thema sein.

2

Ein philosophisches Problem, sagt Wittgenstein, hat die Form: ich kenne mich nicht aus [2)]. Damit ist die allgemeinste, die umfassendste Form des Nichtwissens bezeichnet; den andern Pol bilden Fragen, die auf einzelne Objekte gehen und mit "Ja" oder "Nein" beantwortet werden können. Dazwischen gibt es alle Grade der Spezifikation, die sich unterscheiden durch die "begriffliche Dichte", mit der das Gegenstandsgebiet schon erfaßt und sozusagen vermessen ist. Das, worin man sich nicht auskennt, muß durch irgendeine Art von Erfahrung gegeben sein; in der Philosophie kann diese durchaus eine vorbegriffliche sein, für die es also adäquate Begriffe zu finden gilt (wie etwa Heideggers Existentialien). In den Wissenschaften ist dieses allgemeinste Nichtwissen die Ausnahme, weil gewöhnlich, jedenfalls in einer "normalen" Wissenschaft im Sinne von Thomas Kuhn, ein bestimmter Bereich von Gegenständen, Fragen und Methoden vorgegeben ist; wo jenes Nichtwissen sich dennoch wieder einstellt und überwunden wird, beginnt eine neue Epoche.

In der Mathematik kann dieses umfassendste Nichtwissen nicht mehr stattfinden, seit sie bei den Griechen zu einer deduktiven Wissenschaft geworden ist: mathematische Erfahrung (was immer das heißen mag) kann nur im Rahmen eines schon befestigten Begriffsfelds gemacht werden. Auch das exotischste Objekt ist, einfach kraft seiner Definition, in ein solches Feld eingebunden; die Frage geht dann auf "mehr Einbindung", in Form von Beziehungen zu "bekannten" Objekten. Auch sind die mathematischen Paradigmenwechsel (von den Zahlen und Figuren der Alten über die Funktionen zu den Strukturen) nicht destruktiv wie in andern Wissenschaften - einmal Bewiesenes kann nicht ungültig werden, einmal erreichtes Auskennen geht nicht verloren. Sie sind freilich deswegen nicht weniger revolutionär.

3

Es stellt sich also die Frage, wann man ein Objekt oder einen Bereich von Objekten als bekannt ansieht, oder ansehen darf, allgemeiner: wann wir uns "auskennen". In der Mathematik ist diese Frage besonders delikat. Überall sonst fängt das Denken mit Fragen an, die sich von selber stellen und um die wir gar nicht herumkommen. Die wirkenden Kräfte der Welt erfahren wir auch gegen unseren Willen; und so wissen wir ganz gut, was wir wollen, wenn wir die Natur studieren oder über die Einrichtung der Gesellschaft nachdenken. Aber was wollen wir von Zahlen und Figuren? Hier ist der Geist bei der Frage nach dem, was ihm zum Auskennen verhelfen könnte, fast ganz auf sich selbst gestellt. Alle Mathematik läßt ihren äußeren Anstoß schnell hinter sich; keine Erfahrung, kein Anwendungsbedürfnis suggeriert dann mehr die richtigen Fragen; nur durch eigenes Operieren, eigenen Umgang mit den mathematischen Gegenständen kommt er ihnen näher und kann ihre Gesetze ergründen.

Es ist klar, daß wir nie in einem strikten Sinne alles über ein Etwas wissen könnnen, denn das würde alle Beziehungen dieses Etwas zu allen möglichen Objekten und damit diese selbst einschließen. Das Kennen und Sich-Auskennen kann also nur unter bestimmten Limitationen stattfinden, die vom jeweils erreichten Kenntnisstand und jeweils verfolgten

Ziel abhängen und damit kontingent sind. Man wird sagen, jemand kennt sich in einem Gebiet aus, wenn er die wichtigen Sätze mit ihrem deduktiven Zusammenhang beherrscht, dazu die wichtigen Beispiele sowie alle gängigen Methoden (idealiter Algorithmen und Kalküle), einschlägige Fragen zu bearbeiten. Der informelle Charakter dieser Beschreibung ist offensichtlich ("wichtig", "gängig"); worin sich zeigt, wie sehr der mathematische Diskurs von Faktoren bestimmt wird, die nicht aus dem Formalen ableitbar sind. Das mathematische Sprachspiel ist eben eines der lebenden Mathematiker, wenn auch sein konsolidiertes Resultat, das Petrefakt (Wittgenstein), davon nichts mehr spüren läßt.

4

Geht es um einzelne Objekte oder Begriffe, ist eine natürliche Strategie, über die Definition hinaus möglichst viele Charakterisierungen zu suchen. Jede Charakterisierung "beleuchtet" das Objekt sozusagen von einer bestimmten Richtung aus, und es ist immer fraglich, was die jeweilige Beleuchtung erkennen läßt. Eine endliche einfache Gruppe ist durch ihre Ordnung eindeutig bestimmt, aber damit ist (außer im trivialen Fall der Primzahlordnungen) noch keine "strukturelle" Information gegeben; so identifiziert ein Fingerabdruck eine Person, sagt aber nicht, ob sie klavierspielen kann. Auf den ersten Blick erscheint eine Präsentation einer Gruppe als eine Beschreibung mit dem größtmöglichen Grad der Explikation; ist aber das Wortproblem unlösbar, wird fraglich, wozu sie dienen kann. Die erstaunlichen und erstaunlich verschiedenen Charakterisierungen der Primzahlen, die Zagier angibt [3)], scheinen für die klassischen Probleme nichts herzugeben.

Geht es um einen Bereich von Objekten, erscheint Klassifikation aller Objekte dem ersten Blick als das erreichbare Maximum; welches manchmal gelingt, in andern Fällen aber versagt bleibt, und zwar aus prinzipiellen Gründen. So folgt aus der allgemeinen Unlösbarkeit der Dehnschen Probleme die Unmöglichkeit einer Klassifikation geschlossener 4-Mannigfaltigkeiten (und a fortiori der höherdimensionalen)[4)]. Hier fehlen noch Metatheoreme. Eine natürliche Strategie, der Nicht-Klassifizierbarkeit zum Trotz eine Art Übersicht zu gewinnen, besteht in Klasseneinteilungen verschiedener Feinheit, wie Isometrie, Diffeomorphie, Homöomorphie oder Homotopieäquivalenz von Mannigfaltigkeiten oder Mahlers Einteilung der Irrationalzahlen. Solche Einteilungen werden auch durch ¨Invarianten" gegeben - den Objekten des fraglichen Bereichs zugeordnete Objekte irgendeines andern Bereichs, wobei die Zuordnung derart sein soll, daß isomorphen Objekte dieselbe Invariante zugeordnet wird. Im Idealfall sind Invarianten tatsächlich klassifizierend, wie das Geschlecht von Flächen, die Signatur von reellen Formen oder die Diskriminanten quadratischer Zahlkörper; im Allgemeinen wird die Einteilung nach Objekten mit gleicher Invariante gröber sein. Die Invarianten müssen natürlich nicht bloße Zahlen sein, sondern können auch in Werten beliebiger Funktoren bestehen, wie Homologie oder Homotopie von Räumen. Ein prominentes und aktuelles Beispiel für eine Charakterisierung durch Invarianten in Form von Gruppen ist die (anscheinend endlich bewiesene) Vermutung von Poincaré.

5

Gelungene Klassifikation steckt den Bereich ab, in dem wir uns auskennen wollen. Sie limitiert die Aufgabe, aber sie löst sie nur dann, wenn sie zeigt, daß der fragliche Bereich nicht mehr enthält als das, worin wir uns schon auskennen. Das galt von den geschlossenen Flächen, aber schwerlich von den endlichen einfachen Gruppen. Im Allgemeinen bleibt das Auskennen auf andere Strategien angewiesen, deren nächstliegende, gröbere Einteilungen des fraglichen Bereichs zu finden, wir schon beschrieben haben. Die typische Entfaltung eines Strukturbegriffs (Gruppen, Ringe, Räume) besteht darin, daß man eine große Zahl "sachgemäßer" Eigenschaften (der Objekte des fraglichen Bereichs oder der ihnen durch Konstruktionen jedweder Art zugeordneten weiteren Objekte) einführt und deren logische Abhängigkeiten studiert. Hier begegnet eine Sub-Strategie, die axiomatische Charakterisierung zugeordneter Objekte durch bestimmte ihrer Eigenschaften, wie die Homologie von CW-Komplexen durch die Steenrodaxiome oder das Haarsche Maß durch seine Invarianz; der Effekt ist, daß alle weiteren Eigenschaften der zugeordneten Objekte "im Prinzip" aus den charakterisierenden abgeleitet werden können.

Ist nun dieses Begriffsnetz genügend dicht und die Kenntnis von Beispielen genügend entwickelt, kann man daran gehen, Teilbereiche zu klassifizieren. Nach einem Semester Gruppentheorie ist jeder Student in der Lage, alle Gruppen mit höchstens 30 Elementen anzugeben (und natürlich viele mehr). Ein durchsichtiges Beispiel für das allgemeine Vorgehen bietet die Theorie der Körper. Jeder Körper ist eine Erweiterung seines Primkörpers. Die Primkörper lassen sich leicht klassifizieren (womit die Gesamt-Aufgabe sozusagen durch Unendlich dividiert ist). Jede Erweiterung hat zwei Schritte, eine rein transzendente gefolgt von einer algebraischen. Die ersteren sind wiederum leicht anzugeben; unschwer ist auch noch der nächste Teil, die algebraischen Erweiterungen der endlichen Primörper. Dann kommen die globalen Körper, über die man schon sehr viel, aber noch nicht genug weiß; dann die Funktionenkörper der Flächen, und dann beginnt die Zone, in der man auf Klassifikation nicht mehr hoffen kann. Das zeigt, was allgemein zu erwarten ist: erste Beispiele, eine "unterste Schicht" von Objekten, erschließen sich vergleichsweise leicht, dann wird es schnell dornig, schließlich hoffnungslos [5)].

6

Im Allgemeinen bleibt es also ein naiver und unerfüllbarer Wunsch, "alles explizit" haben zu wollen; das Auskennen muß dann durch die Kenntnis von *Beziehungen* angestrebt werden, zwischen den Objekten, ihnen zugeordneten Objekten, und den Beziehungen selbst, in kategorialen Termini also durch Morphismen, Funktoren und natürliche Transformationen [6)]. Von einem philosophischen Blickpunkt aus ist das nichts Auffallendes; ist doch, einer alten Einsicht zufolge, alles Erkennen ein Beziehen. Mitunter aber grenzt es doch ans Magische, wie wie Kenntnis von Beziehungen zwischen Objekten die man, einzeln für sich genommen, nicht besonders gut kennt, unser Wissen von ihnen vermehren kann. Ein schlagendes und klassisches Beispiel dafür liefert hier die Galoissche Theorie. Ist eine algebraische Erweiterung durch ein Polynom gegeben, sind Untergruppen und Zwischenkörper zunächst gleichermaßen unbekannt (und waren auch gar nicht Gegenstand des ursprünglichen Interesses); aber die nunmehr a priori bekannte, eben in der Galoiskorrespondenz zwischen ihnen bestehende Beziehung erweist sich als derart starker Ordnungsfaktor, daß man diese Theorie als den größten Fortschritt ansehen kann, den die Algebra seit Diophant gemacht hat. Ihren ersten spektakulären Erfolg hatte sie in einer "Urfrage" der Algebra, nämlich wie die Nullstellen eines Polynoms von den Koeffizienten abhängen. Daß die Untergruppen und Zwischenkörper dabei überhaupt ins Spiel kommen, ist vom Blickpunkt der vorangegangenen, im Rückblick naiv erscheinenden Bemühungen gar nicht zu sehen und wäre es auch dann nicht, wenn man sie a priori vollständig überschaute.

7

Die Suche nach dem, wodurch wir uns auskennen, vollzieht sich durch "richtiges" Fragen; welches, wie öfters bemerkt wurde, verdienstlicher ist als das Beantworten der Fragen. Daß die richtigen Fragen gestellt werden, können wir (bei unserm gegenwärtigen Wissen vom Weltgeist und seinem Treiben) nicht als selbstverständlich ansehen; sind sie aber gestellt, ist es aller Erfahrung nach nur eine Frage der Zeit, bis sie ihre Antwort finden (und wenn diese allzu lange ausbleibt, legt sich der Verdacht falscher Fragestellung nahe). Wieder fällt der informelle, aus dem formalen System hinausweisende Ausdruck auf, nämlich des "richtigen" Fragens. Eine Frage ist "richtig", wenn ihre Beantwortung uns zum Auskennen verhilft. Kann man das den Fragen ansehen?

Jede Frage bestimmt einen Bereich möglicher Antworten. Soll die Frage sinnvoll sein, darf dieser nicht zu groß ausfallen, keine "leere Allgemeinheit" bilden (so kann jeder die Frage aufwerfen, wie man alle Gruppen klassifizieren kann). Ist er zu klein, wie im Falle konkreter, mit Ja oder Nein zu beantwortender Vermutungen, besteht die Gefahr, daß das Gefragte von zu spezieller Natur ist und uns nicht "wesentlich weiterbringt". Aus einem solchen Grund lehnte Gauß ab, sich mit Fermats Problem zu beschäftigen, das aber dann unter den Händen Kummers eine Eingangspforte zur höheren (algebraischen) Zahlentheorie wurde. Auch spezielle Fragen können uns also weiterbringen, indem die Arbeit an ihnen uns zu Methoden führt, die dann wichtiger werden als das ursprüngliche Problem, selbst dann, wenn sie dieses nicht oder nicht vollständig zu lösen vermögen, wie es Kummer mit der Fermatschen Frage erging [7)]. Aber wer will den Fragen ansehen, ob sie dieses Potential in sich bergen? In ganz prominenten Fällen, wie dem der Riemannschen oder der abc-Vermutung, kennt man schon, vorgreifend, genügend viele Folgerungen, die das Interesse der Sache außer Frage stellen. Die Lösung der Bieberbachvermutung hingegen hat uns anscheinend nicht weitergebracht. In der Regel werden die "weiterbringenden" Fragen eine Mittelstellung halten: einerseits genügend fokussiert, so daß man etwas "Festes" vor Augen hat, andererseits mit genügendem Spielraum für die konstruktive Phantasie.

8

Gewisse Prinzipien, Objektbereiche zu ordnen und einzelne Objekte zu analysieren, sind selbst mathematikfähig und werden in der universellen Algebra und der Kategorientheorie mathematisch entfaltet. Die erstere befaßt sich mit Systemen beliebigstelliger

Operationen auf Mengen, wobei für die Operationen beliebige Gleichungen vorgeschrieben werden können, wie etwa Assoziativität oder Kommutativität bei binären Operationen. Für alle Klassen so strukturierter Objekte existiert ein natürlicher Begriff der "strukturerhaltenden" Abbildung, des Homomorphismus, durch den verschiedene Objekte miteinander in Beziehung gebracht werden können, mit den fundamentalen Typen des Isomorphismus ("Strukturgleichheit"), Monomorphismus ("Einbettung") und Epimorphismus ("Überdeckung"); Anlaß zu letzteren geben Kongruenzen, "strukturverträgliche" Äquivalenzrelationen, deren Klassen selbst eine Struktur desselben Typs tragen, so daß die Klassenabbildung ein Homomorphismus ist. Von hier ausgehend gelangt man zu den Begriffen der Unterobjekte, die stets einen Verband bilden, der "einfachen" Objekte und der Kompositionsreihen, die in erster Annäherung den Aufbau eines Objekts aus einfachen Objekten beschreiben und (unter milden Voraussetzungen) einer fundamentalen Eindeutigkeitsaussage genügen (Satz von Jordan-Hölder [8)]). Besonders einfache Formen solchen Aufbaus werden durch die Begriffe von Summe und Produkt bezeichnet.

Die universelle Algebra ist aufgegangen in der Kategorientheorie [9)], die alle diese Begriffe (mit Ausnahme der Kongruenzen und Kompositionsreihen, die spezifisch algebraischer Natur sind) auf allgemeinere Klassen von Objekten überträgt. Ihre ursprüngliche Motivation war das Studium von Funktoren, welche Objekten einer Klasse, nunmehr Kategorie genannt, Objekte einer andern Kategorie zuordnen, derart, daß die Abbildungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Objekten erhalten bleiben; seither gehört es zum Standard, jede mathematische Konstruktion nach ihrer Funktorialität zu befragen (einigen werden wir noch begegnen). Dient die einzelne Kategorie dazu, die Objekte durch ihre Beziehungen zu andern, gleichartigen Objekten zu studieren, wird dieses Prinzip im System aller Kategorien, mit den Funktoren als Morphismen, eine Stufe höher gehoben und gleichzeitig ein Rahmen geschaffen, Objekte durch ihre Beziehungen zu nicht-gleichartigen Objekten zu studieren. Das ¨Erkennen durch Beziehen" erhält hier eine sehr konkrete, formal präzisierbare Fassung, deren Reichweite übrigens größer ist, als es zunächst scheinen könnte [10)].

Dieses universalen Charakters unerachtet spielen die Kategorien in den einzelnen mathematischen Disziplinen verschieden große Rollen. Manchmal besteht das ganze Problem geradezu darin, die "richtige" Kategorie zu finden, wie in der Theorie der Motive, oder den "richtigen" Funktor zu konstruieren, wie in dem von Weil formulierten und von Deligne abgeschlossenen Programm zum Studium von algebraischen Mengen über endlichen Körpern (der richtige Funktor war die Etalcohomologie). In der Topologie kann alles davon abhängen, ob man sich in der Riemannschen oder der Homotopiekategorie oder einer Zwischenstufe bewegt. In der Kombinatorik und Graphentheorie hingegen spielen die kategorialen Begriffe (soviel ich sehe) bislang nur eine geringe Rolle, obwohl zum Beispiel die orientierten Multigraphen als Funktorkategorie eine reiche kategoriale Struktur tragen (die eines Topos). Vielleicht sind hier die "richtigen", ordenden und gliedernden Begriffe noch nicht gefunden; es kann aber auch sein, daß der Strukturalismus Bourbakischer Prägung hier an Grenzen stößt, daß es so etwas gibt wie "strukturelle Kontingenz". Noch weniger präsent sind kategoriale Begriffe bei konkreten Problemen der Analysis, wie beim Studium einzelner

Funktionen oder Differentialgleichungen (sie stehen aber über die beteiligten Funktionenräume im Hintergrund).

9

Ein natürliches Bestreben nicht nur der Mathematik ist es, jede Begriffsbildung und jeden Gedankengang in die größtmögliche Allgemeinheit zu setzen und damit den Bereich zu vergrößern, in dem er unser Auskennen befördert; die Geschichte der modernen Mathematik ist nicht zum kleinsten Teil eine Geschichte von Verallgemeinerungen. Auch in dieser Hinsicht genießt die Mathematik Vorzüge vor andern Wissenschaften, und zwar aufgrund ihrer der axiomatischen Methode verdankten begrifflichen Exaktheit, die zwar im täglichen mathematischen Diskurs nicht immer vorhanden, aber doch jederzeit herstellbar ist; sie erlaubt, jede in einer Begriffsbildung oder Beweisführung wirklich benutzte Voraussetzung herauszuheben und von den übrigen zu abstrahieren. Schon jede Axiomatik ist das Produkt eines solchen Abstraktionsprozesses; dies gilt für die primären ebenso wie für die eingebetteten, sekundären Axiomatiken, also alle modernen Strukturbegriffe. Im Betrieb moderner Forschung werden systematisch alle irgendwie bedeutungsträchtigen, mathematisches Potential bergenden Konstellationen von Grundbegriffen und -Relationen axiomatisch isoliert und so in die größe denkbare Allgemeinheit gebracht.

Häufiger freilich als neue Axiomatiken ist der Fall, daß man innerhalb eines festen axiomatischen Rahmens eine Begriffsbildung von einem gegebenen auf einen größeren Bereich ausdehnen möchte. In der Regel ist das nicht ohne weiteres möglich (denn dann wäre es bei der ersten Einführung des Begriffs schon geschehen). Die einzig mögliche Strategie besteht hier darin, den fraglichen Begriff so umzuformulieren, daß die Ausdehnung gelingt, wodurch man gleichzeitig erwarten kann, mit der allgemeineren Fassung auch die "richtige" zu gewinnen. Ein elementares Beispiel ist die Ableitung von Funktionen, die sich im einfachsten Fall (reelle Funktionen einer Veränderlicher) als Zahl präsentiert; für die Ausdehnung auf beliebige Dimensionen und Mannigfaltigkeiten muß man vermöge $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ die Zahl als lineare Abbildung interpretieren. Für die Ausdehnung der Integration auf allgemeinere als stetige Funktionen muß man das Riemannsche Integral durch das Lebesguesche ersetzen (und erst damit erhält man *vollständige* Räume integrierbarer Funktionen), was für stetige Funktionen (auf kompakten Intervallen) keinen Unterschied macht. Um ein Schnittprodukt für allgemeine Räume und Unterräume zu erhalten, mußte man von der simplizialen Homologie zu singulären Cohomologie übergehen [11)]; die lokalen Schnittmultiplizitäten der algebraischen Geometrie, im ersten und einfachsten Fall ebener Kurven einfach ein Produkt von Zahlen, muß man als Länge von Tor-Moduln lesen lernen [12)]. Hat eine (diskrete) Gruppe Torsionselemente, ist die cohomologische Dimension stets unendlich, während vielleicht torsionsfreie Untergruppen von endlichem Index existieren, für die sie endlich ist und eine topologische Bedeutung hat; nach einem Satz von Serre ist diese invariant. Nach Wall erhält man dann eine Eulercharakteristik der vollen Gruppe, indem man die einer torsionsfreien Untergruppe durch den deren Index dividiert [13)].

Eine Beispielklasse für sich bilden hier die Übersetzungen von Begriffen, die man gewöhnlich mittels des Mengen- und Elementbegriffs definiert, in die rein "pfeiltheoretische" Sprache der Kategorientheorie. Einfache Beispiele sind die leere Menge als Anfangs-, jede einelementige Menge als Endobjekt der Mengenkategorie, injektive Abbildungen als Monomorphismen oder Morphismen mit Linksinversen, surjektive als Epimorphismen oder Morphismen mit Rechtsinversen, bijektive als Morphismen mit zweiseitigen Inversen. Daß diese Eigenschaften nicht mehr in allen Kategorien äquivalent sind, bringt subtile Unterschiede zwischen ihnen ans Licht; so liegt es nicht ganz an der Oberfläche, daß in der Gruppenkategorie Epimorphismen surjektiv sind [14)]. Nicht immer ist die Umformulierung erhellend (wie beim pfeiltheoretischen Elementbegriff: ein Element von X ist ein Pfeil von einem Endobjekt nach X), aber zumindest für alle Objekte, die sich durch universelle Abbildungseigenschaften charakterisieren lassen, wie Produkte, Coprodukte und allgemeiner alle (kategorialen) Limiten und Colimiten, ist diese - eo ipso ja pfeiltheoretische - Beschreibung die "eigentlich wahre".

10

Eine sehr oft gebrauchte Weise, einen Bereich X von Objekten in einen größeren Bereich einzubetten, besteht in der Umwandlung in Abbildungen, schematisch darstellbar als $X \to C(Y,Z)$, wobei der letztere Ausdruck die Morphismen $Y \to Z$ in der Kategorie C bedeuten soll. In den relevanten Fällen ist C(Y,Z) sehr viel größer als das Bild von X, so daß die Objekte von X in eine "reichere" Welt geraten und damit in Beziehungen zu neuen Objekten; in jedem Falle erhalten sie ein neues strukturelles Moment, nämlich auf Elemente von Y angewandt werden zu können. In einem klassischen Beispiel ist X ein Raum integrierbarer Funktionen und C(Y,Z) der Dualraum eines Raum von "Testfunktionen"; die ursprünglichen Funktionen erhalten jetzt "Nachbarschaft" in Form von Funktionalen, zum Beispiel vom Dirac-Typ. "Fuzzy sets" entstehen, indem man die Teilmengen einer Menge M mit den Funktionen $M \to \{0,1\}$ identifiziert und dann die Menge $\{0,1\}$ der "Wahrheitswerte" der Mengenkategorie zum Einheitsintervall $[0,1]$ vergrößert; eine Funktion $p: M \to [0,1]$ kann man jetzt als eine Teilmenge ansehen, für welche die Zugehörigkeit einzelner x zu ihr nur mit der Wahrscheinlichkeit p(x) ausgesagt werden kann. In der Darstellungstheorie von Gruppen und Algebren ist C(Y,Z) = End(V) der Endomorphismenring eines Vektorraums; hierdurch werden die ebenso einfachen wie schlagkräftigen Mittel der linearen Algebra nutzbar gemacht, vor allem die Eigenwerttheorie. Das durch Iteration entstehende Schema $X \to C(C(X,Y),Y)$ entstehende Schema ist der Schlüssel zur Dualitätstheorie der Gruppen: jedes Gruppenelement liefert durch Einsetzen einen Charakter seiner Charaktergruppe.

Eine Reihe wichtiger Konstruktionen fußt auf dem Schema $X \to M(I,X)$, wo M die Mengenkategorie bedeute und X durch konstante Funktionen eingebettet ist. Zunächst erbt die rechtsstehende Menge (fast) alle algebraische Struktur auf X durch wertweise Definition. Ist X ein Ring und nimmt man nur die fast-Null-Funktionen $I \to X$, erhält man den freien X-Modul mit Basis I. Ist $I = \mathbb{N}$ und nimmt man die Faltung als Multiplikation, erhält man den Potenzreihenring in einer Unbestimmten über X; er enthält den Polynomring in Form der fast-Null-Funktionen. Das Verfahren der Nichtstandardmathematik nach Robinson beginnt mit einer Einbettung $X \to M(I,X)$, wo I eine unendliche Menge ist; es folgt ein Übergang zu Äquivalenzklassen *X, aber derart, daß X -> *X eine Einbettung bleibt. Der Konkurrenzsatz sagt nun, was für neue Elemente in der erweiterten Menge *X zur Verfügung stehen, und das Übertragungs-prinzip zeigt, wie man sie für die Theorie von X benutzen kann. Im einfachsten Fall ist $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$ und die Klassenbildung ist Reduktion nach einem durch einen freien Ultrafilter bestimmten Ideal; so entsteht der Körper der "hyperreellen" Zahlen mit "aktual unendlich" großen und kleinen Zahlen [15)].

11

Zu reiner Gestalt kommt die Identifikation von Objekten mit Morphismen im Yoneda-Lemma der Kategorientheorie. Eine (kleine) Kategorie C wird in die Kategorie C* der kontravarianten Funktoren C -> M eingebettet, indem jedem Objekt X von C der Funktor y(X): Y -> C(Y,X) zugeordnet wird. Der Gewinn dieser "Anreicherung durch Verflüssigung" liegt darin, daß C* stets ein Topos ist, grob gesagt also eine Kategorie, die alle aus M geläufigen mengentheoretischen Konstruktionen in pfeiltheoretischer Form gestattet, Produkte, Potenzen, einen Endofunktor "Unterobjekte" und die Darstellung von Unterobjekten durch charakteristische Funktionen. Die Yoneda-Konstruktion ist universell, insofern Funktoren von C in Topoi über C* faktorisieren. Jeder Topos eignet sich zur Modellierung von L1-Theorien; die Yoneda-Einbettung legt nahe, Theorien über C in C* zu interpretieren. Eine eindrucksvolle Verwirklichung dieses Gedankens ist der "synthetische Infinitesimalkalkül" [16)].

Funktoren vom Typ y(X) heißen auch "darstellbar". Die Darstellung eines (mengenwertigen) Funktors macht ihn sozusagen aus der "Kategorie heraus" verständlich und sichert "gute Eigenschaften" (Verträglichkeit mit Limiten); die Bedeutung des Begriffs wurde besonders von Grothendieck im Rahmen seiner Neubegründung der algebraischen Geometrie hervorgehoben. Das algebro-geometrische Objekt, ursprünglich die Menge gemeinsamer Nullstellen einer Familie von Polynomen, wird zum Funktor, wenn man den Ring variiert, in dem man die Nullstellen betrachtet (und der nur eine Algebra über dem Ring sein muß, dem die Koeffizienten entstammen). So ist die Kreislinie "euklidisch" die reelle Nullstellenmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$; die rationalen Lösungen geben, geeignet parametrisiert, die pythagoreischen Zahltripel; vom Blickpunkt klassischer algebraischer Geometrie sind die komplexen Lösungen das adäquate Objekt. Das läßt sich noch als Kette von Inklusionen begreifen; faßt man aber die Reduktion ganzer Punkte nach Idealen ins Augen, wird die Notwendigkeit funktorieller Betrachtung klar. Angesichts dessen kann die Antwort auf die Frage "Was ist der Kreis denn eigentlich?" nurmehr lauten: der "Kreis an sich" ist nicht ein bestimmtes geometrisches Gebilde, sondern die Vorschrift, jedem Ring die Paare (x,y) von Elementen des Rings zuzuordnen, welche die Gleichung erfüllen; also ein Funktor.

12

Eine weitere Strategie der "Verflüssigung" von Strukturen ist die Variation von oder die Einführung von neuen Parametern. Die Homologie eines Raums hat, als Algebra von Simplices, "von Hause aus" ganzzahlige Koeffizienten; die Konstruktion läßt aber jeden (kommutativen) Ring als Koeffizientenring zu, und das "universelle Koeffiziententheorem" beschreibt die Abhängigkeit der verschiedenen Homologiegruppen untereinander. Die beiden wichtigsten Anwendungen erhält man mit dem Primkörper der Charakteristik 2, der von Orientierungsfragen dispensiert, und dem reellen Zahlkörper, der die Cohomologie durch Differentialformen auszudrücken erlaubt (Satz von de Rham). Vor allem aber eröffnet sich - im Prinzip wenigstens - eine Möglichkeit, die Variation der Ringe mit der der Räume zu verbinden und so die Verflechtung der beiden Kategorien in den Blick zu bekommen. Hier kann man auch die "q-Versionen" klassischer einhüllender Algebren nennen ("Quantengruppen").

Ein stupendes Beispiel für den Effekt der Einführung neuer Parameter bilden die erzeugenden Funktionen der Kombinatorik. Eine Folge von Zahlen wird, zunächst in "formaler" Weise, zu Koeffizienten einer Potenzreihe gemacht; im Idealfall führen Informationen über die Elemente der Folge zu solchen über die Potenzreihe, deren rein analytische Konsequenzen wiederum in Kombinatorik zurückübersetzt werden können. Die Variation des neuen Parameters - der Unbestimmten - eröffnet also eine Möglichkeit, die Analysis für die Kombinatorik nutzbar zu machen [17)]. Von ähnlicher Verwendung ist das mit den charakteristischen Klassen eines Vektorbündels als Koeffizienten gebildete Polynom; das Rechnen mit den Polynomen kodifiziert dasjenige mit den Bündeln [18)].

13

Die Ausdehnung der Begriffsbildungen hat den Zweck, auch den Bereich der für sie geltenden Sätze auszudehnen. In der Regel ist sie verbunden mit einer Abschwächung der Sätze; meist stehen Allgemeinheit und Informationsgehalt in einem komplementären Verhältnis. Eine endliche nilpotente Gruppe ist das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen; ist die Gruppe nur noch auflösbar, gilt dies nur mit einer Abschwächung des Produktbegriffs. Ein klassisches Beispiel für Verallgemeinerung durch Umformulierung bietet die Zahlentheorie: die Eindeutigkeit der Primzerlegung, die in "höheren" Zahlbereichen verlorengeht, bleibt erhalten, wenn man sie für die Ideale ausspricht; für den ursprünglichen Bereich der ganzen Zahlen (allgemeiner für jeden Hauptidealring) sind Zahl- und Idealzerlegung im wesentlichen dasselbe.

Oft gelingt es aber, das "Hindernis" für die Ausdehnung der Sätze selbst zu einem mathematischen Gegenstand zu machen, auf den sich in der Folge das Interesse konzentriert; wodurch gleichsam aus der Not eine Tugend wird. Den Verlust der Eindeutigkeit der Primzerlegung in höheren Zahlbereichen (der, wie oben erwähnt, zur Eindeutigkeit der Idealzerlegung abgeschwächt werden muß) kann man in einer Idealklassengruppe dingfest machen und gewissem Sinne sogar quantifizieren. Dies kann man als einen Spezialfall einer in der modernen Zahlentheorie fundamentalen Technik ansehen, der "lokalen Methode": Probleme für Zahlkörper werden zuerst in den Komplettierungen dieser Körper untersucht, wo sie in aller Regel einfacher sind; für manche Eigenschaften (Ganzheit von Elementen, Invertierbarkeit von ganzen Elementen, Zerfall von Algebren, Isotropie von quadratischen Formen) gelten dabei "Lokal-Global-Prinzipien", die besagen, daß die Gesamtheit der lokalen Information mit der globalen zusammenfällt (statt, wie es allgemein der Fall ist, nur ein Teil von ihr zu sein). Wo sie nicht bestehen, sucht man die Abweichung von ihnen, also das "strukturelle Surplus" des Globalen, in Gruppen zu fassen. So "mißt" die Idealklassengruppe die Abweichung der Eigenschaft, ein Haupideal zu sein, von einem Lokal-Global-Prinzip (lokal sind alle Ideale Hauptideale). Die Galoiscohomologie faßt Lokal-Global-Prinzipien als Injektivität der natürlichen Abbildung einer globalen Cohomologiegruppe in das Produkt der lokalen; die Abweichung vom Prinzip "ist" dann der Kern dieses Homo-morphismus [19)]. In der Gruppentheorie ist eine Cohomologieklasse die "Obstruktion" für das Zerfallen einer Erweiterung; die Topologie kennt eine (tatsächlich auch so bezeichnete) Theorie der Obstruktionen, welche untersucht, was der Fortsetzbarkeit von Funktionen im Wege steht. Die K_0-Gruppe eines Raums "enthält" die Vektorbündel auf dem Raum und "mißt" (ähnlich einer Idealklassengruppe) die Obstruktion dagegen, daß Bündel trivialisiert werden können. Milnors K_2-Gruppen isolieren die für einen Ring spezifischen, zu den allgemein bestehenden Steinbergrelationen hinzukommenden Relationen zwischen Elementarmatrizen [20)]. In der homologischen Algebra beschreibt ein derivierter Funktor die Abweichung von der Exaktheit, die auftritt, wenn man einen Funktor auf eine exakte Sequenz anwendet [21)].

Dies ist sicher eine der bemerkenswertesten Strategien mathematischen Denkens. Ohne den "Widerstand der Sachen", das "Ausbleiben eines Wohlverhaltens", hegelsch gesprochen das Negative, würden die Strukturen in glatter und leerer Allgemeinheit verbleiben; die Mathematik, soweit sie überhaupt bestünde, wäre ein Teil der Logik. Die Obstruktionen sind gewissermaßen das konkrete Negative, welches, mathematisch vergegenständlicht, ein Positives wird. Des Nachdenkens wert ist schon die Tatsache, daß dieses Negative überhaupt auftritt. Die Peanoaxiome, das gleichförmige Eins-nach-dem-Andern auf Begriffe bringend, versprechen wahrlich keine Tiefe. Aber mit einem jähen Crescendo entbindet sich schon am Anfang der Zahlentheorie eins der stärksten Faszinosa aller Wissenschaft, der Begriff der Primzahl [22)].

14

Es begegnet aber auch das andere Extrem, welches man beschreiben könnte als "Konstruktion von Objekten durch das, was sie leisten sollen". Ein besonders zugespitztes Beispiel bietet die Logik. Eine formale Theorie erster Stufe (eine L1-Sprache zusammen mit einer konsistenten Menge von Axiomen) stellt das Problem, ein Modell zu konstruieren. Die Terminterpretation, mittels welcher man heute den Gödelschen Vollständigkeitssatz zu beweisen pflegt, gewinnt das Modell aus den Termen der Sprache selbst; die Ausdrücke, für die wir Bedeutungen konstruieren wollen, werden selbst als solche in Dienst genommen, ohne daß dabei die Sprache selbstreferentiell wird.

Schlagende Beispiele bieten auch die drei Schritte, die von den natürlichen über die ganzen und rationalen zu den reellen Zahlen führen. Die zu bildende Differenz zweier natürlicher Zahlen wird repräsentiert durch das geordnete Paar von Minuend und Subtrahend, und ohne Differenzen zu benutzen, nämlich durch Addieren "über Kreuz", kann man feststellen, wann zwei Paare dieselbe Differenz repräsentieren. Das führt zu einer Äquivalenzrelation, deren Klassen die gesuchten Differenzen *sind*; die natürlichen Zahlen selbst finden sich wieder als spezielle Differenzen (etwa n als Differenz von n+1 und 1). Ganz ähnlich wird ein Quotient repräsentiert durch das Paar von Zähler und Nenner, Multiplikation "über Kreuz" führt zu einer Äquivalenzrelation, deren Klassen die gesuchten Quotienten sind. Beim letzten Schritt schließlich wird eine reelle Zahl, die als Limes einer Cauchyfolge konstruiert werden soll, durch diese Folge repräsentiert, und zwei Cauchyfolgen repräsentieren dieselbe Zahl, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist; so erhält man die reellen Zahlen als einen Restklassenring von Folgen. Die Konstruktionen verallgemeinern sich zur Bildung allgemeiner Grothendieckgruppen, Lokalisierungen und Komplettierungen [23)].

Ein (schon erwähntes) Grundproblem der Algebra ist, Nullstellen von Polynomen zu finden. Daß zu gegebenem f(x) überhaupt ein Bereich existiert, in dem f eine Nullstelle hat, ist a priori nicht selbstverständlich (so hat es lange gedauert, bis man mit den Nullstellen von x^2+1 rechnen lernte). Die heutige Algebra erschafft ihn durch eine Konstruktion, die auf den ersten Blick wie ein Taschenspielertrick erscheint: man möchte die Variable x zu einem Wert a spezialisieren, für den f(a) = 0 wird. Für a = x mod f(x) gilt das "tautologisch", weil f(x) = 0 mod f(x); der Bereich, dem a angehört, ist der Restklassenring des Polynomrings nach dem durch f(x) erzeugten Hauptideal [24)].

Ein Funktionskeim in der komplexen Ebene (eine konvergente Potenzreihe) definiert Fortsetzungen, die im Allgemeinen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche nicht mehr übereinstimmen. Man möchte ein Gebilde (die zugehörige Riemannsche Fläche), welches alle Fortsetzungen "trägt", so daß der ursprüngliche Keim mit allen seinen Fortsetzungen auf ihm eine eindeutige Funktion wird. Das Problem stellen, heißt beinahe schon, es lösen: die Menge der Fortsetzungen läßt sich selbst als eine solche Fläche auffassen, indem man jede Fortsetzung mit dem Entwicklungspunkt ihrer Potenzreihendarstellung identifiziert und eine Umgebung einer Fortsetzung aus deren Fortsetzungen in eine Umgebung gewinnt; es ist dann klar, daß jede Fortsetzung eine Funktion auf einer Umgebung von Fortsetzungen definiert [25)].

15

Die "richtig" betrachtete Aufgabe, so könnte man in diesen und ähnlichen Fällen sagen, sagen, *ist* schon die Lösung selbst; die Mathematik zieht sich gewissermaßen am eigenen Zopf empor, ein Privileg, das sie andern Wissenschaften voraushat und wiederum der axiomatischen Methode verdankt. Allgemeiner darf man in der Mathematik das, was konstruiert werden *kann*, damit auch schon als vorhanden, das heißt im mathematischen Sprachspiel verfügbar ansehen; der Wunsch ist erfüllt in dem Augenblick, in dem er sich als erfüllbar erweist. Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, in welcher der Wunsch nicht nur der Vater, sondern auch der Ernährer des Gedankens sein kann. Der Preis dafür ist, daß sie alle ihre Objekte, von der axiomatischen Basis ausgehend, auch wirklich selbst konstruieren muß; sie kann sich nichts "schenken lassen", und was ihr "von außen", meistens von der Physik, angetragen wird, muß sie konstruktiv einholen, wie Diracs Delta-"Funktionen" durch die Theorie der Distributionen.

Man vergleiche diese Fälle mit den in Abschnitt 13 besprochenen. Manches gibt sich fast ohne Widerstand, obwohl wir das a priori kaum erwarten konnten; anderswo stellt sich

Widerstand unerwartet ein. Daraus ist zu schließen, daß mit unseren Erwartungen etwas nicht stimmt. Können wir sie so abrichten, daß sie uns stets auf die wahren Probleme vorbereiten und die scheinbaren gleich als solche erkennen lassen? Allein die auf eigener (oft leidvoller) mathematischer Erfahrung gründende Urteilsfähigkeit bringt uns dem näher; und solange wir kein unendliches Urteil besitzen, müssen wir uns damit abfinden, daß wir, wie Siegel einmal bemerkte, über die wahren Schwierigkeiten eines Problems erst dann etwas sagen können, wenn wir es gelöst haben [26)].

16

Bisher haben wir Strategien zur Begriffsbildung betrachtet; wo solche vorgenommen wird, möchte man natürlich etwas über den neuen Begriff beweisen (oft genug erfordert schon seine Einführung allerhand Nachweise, etwa von Wohldefiniertheit). Ob aber die Begriffe neu sind oder nicht, mathematische Sachverhalte müssen bewiesen werden, und auch dazu gibt es Strategien. Logisch betrachtet, ist ein Beweis eine Reduktion des behaupteten Sachverhalts auf schon bewiesene (und letztlich auf die Axiome), wobei neben den "kanonischen" Regeln der Aussagen- und Quantorenlogik der modus ponens die Hauptlast trägt; die Formalisierung des Beweisbegriffs (à la Gentzen) visualisiert ihn als einen Baum, der als "obere Enden" die vorausgesetzten und alle schon bewiesenen, im Beweis benutzten Sachverhalte hat, als "unteres Ende" den behaupteten.

Die logische Reduktion geht nun - wie es in der Natur der Sache liegt - meistens einher mit einer sachlichen. Deren sinnfälligste Form liegt in der "Beschränkung auf das Wesentliche", wie es in der oft gebrauchten Formel "ohne Einschränkung der Allgemeinheit" zum Ausdruck kommt. Eine bestimmte Frage, die an ein Objekt gestellt wird, erfordert zu ihrer Beantwortung meist nur einen Teil der verfügbaren Information, auf den man also "reduzieren" kann. Untersucht man das Wachstum eines Aggregats von Funktionen, kann man sich auf den Term stärksten Wachstum konzentrieren; bei maßtheoretischen Fragen kann man Nullmengen weglassen. Der "strukturelle Kern" eines quadratischen Raums ist sein anisotroper Teil; Strukturfragen bei algebraischen Gruppen kann man oft auf den halbeinfachen Teil zurückführen; Gruppen über Zahlkörpern kann man via "Restriktion der Skalare" durch Gruppen über $\mathbb{Q}$ ersetzen. Ein systematisches Verfahren, gefragte Teilaspekte auf bekannte Teilinformationen zurückzuführen, ist die Anwendung von Funktoren.

Eine andere Form von Reduktion ist Zerlegung. Viele Kategorien, Gruppen, Ringe, Moduln, allgemeiner alle algebraischen Kategorien, aber auch Räume, Mannigfaltigkeiten, Graphen, besitzen Produkte und Coprodukte, und eine Zerlegung eines Objekts ist einfach eine Darstellung als solches; es ist klar, daß die meisten Strukturfragen damit auf die entsprechenden Fragen für die Faktoren oder Summanden (also "kleinere" Objekte) reduziert werden. Zerlegung in einem weiteren Sinne liegt aber auch vor, wenn man bei einer Differentialgleichung Orts- und Zeitvariablen trennt, oder beim parallelen Rechnen. Kann man Objekte nicht zerlegen, kann man immer noch versuchen, sie durch "Standardobjekte" in irgendeinem Sinne zu approximieren, das Unbekannte durch das Bekannte; einen Modul durch eine Kompositionsreihe, einen derivierten Funktor durch eine Spektralsequenz, eine Mannigfaltigkeit durch einen simplizialen Komplex, allgemeine durch spezielle Funktionen wie Polynome, Fourierpolynome oder wavelets.

17

Wie das Bild des "Beweisbaums" schon suggeriert, führt die logische Reduktion nur selten auf direktem Wege nach unten; die offensichtlichen Folgerungen sind immer schon gezogen [27)]. Meist ist man zu Umwegen genötigt, zu einer Transformation des Problems in einen andern Bereich. Dies ist, nach der Reduktion, die zweite fundamentale Strategie des beweisenden mathematischen Denkens, der Melzak unter dem Titel "Bypasses" ein geistreiches Buch gewidmet hat [28)]. Ein Problem wird umformuliert oder eben "transformiert", bis es eine lösbare Gestalt angenommen hat (oder wenigstens eine solche, die einen nächsten reduzierenden Schritt gestattet), die Lösung dann, wenn nötig, "zurücktransformiert". Auf der "strukturell untersten" Ebene, der des Ausrechnens, ist Transformation geläufig beim Lösen linearer Gleichungssysteme, oder wenn man eine Stammfunktion oder allgemeiner die Lösung einer Differentialgleichung durch Substitution findet. Transformation einer Matrix auf Jordanform (oder irgendeine andere Normalform) enthüllt ihre Wirkung als Endomorphismus des Standardraums. Die schon im letzten Abschnitt genannte Anwendung von Funktoren zeigt oft den Aspekt der Transformation in einem übertragenem Sinn; so übersetzen die Funktoren der algebraischen Topologie Gestalteigenschaften in die Sprache der Algebra. Das bypass-Prinzip ist geradezu die raison d'etre der Nichtstandardmathematik nach Robinson: der Struktur S wird eine "Nichtstandardstruktur" $^*S$ zugeordnet, jeder Aussage a über S eine Aussage $^*a$ über $^*S$, derart daß a von S gilt genau dann, wenn $^*a$ von $^*S$ gilt; der Gewinn sind die reicheren Möglichkeiten in $^*S$, deren Ertrag man dann "zurücktransformieren" kann. Schließlich ist auch jede Anwendung von Mathematik ein solcher bypass: ein nicht-mathematischer Sachverhalt wird in einen mathematischen übersetzt, dieser rein mathematisch weiterverarbeitet und das Ergebnis zurückübersetzt. Heinrich Herz hat dafür eine unübertreffliche und vielzitierte Formulierung gefunden: "Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole von den äußeren Dingen, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder der naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände sind" [29)].

18

Wir haben nun einige Strategien des mathematischen Denkens betrachtet; versuchen wir, die nächsthöhere Ebene in den Blick zu bekommen. Jede Strategie verfolgt ein Ziel, oder besser: sie führt irgendwohin, denn im mathematischen Prozeß (wie auch in andern) ist unsere Voraussicht immer auf wenige Schritte beschränkt, und niemand kann sagen, wohin uns das, was wir gerade anstreben, weiterführen wird, wenn wir es erreicht haben (die Dialektik von Fragen und Antworten). Die formale Seite des Prozesses hat Kant in seinen Ausführungen zum "regulativen Gebrauch der Ideen der reinen Vernunft" dargestellt. Sein Ziel ist stets, den Begriffen "die größte Einheit neben der größten Ausbreitung zu verschaffen" [30)]; und zwar wird postuliert die "vollständige Einheit der Verstandeserkenntnis, wodurch diese nicht bloß ein zufälliges Aggregat, sondern ein nach notwendigen Gesetzen zusammenhängendes System wird" [31)]. "Die Vernunft bereitet also dem Verstande sein Feld, 1. durch ein Prinzip der *Gleichartigkeit* des Mannigfaltigen unter höheren Gattungen, 2. durch einen Grundsatz der *Varietät* des Gleichartigen unter niederen Arten; und um die systematische Einheit zu vollenden, fügt sie 3. noch ein Gesetz der *Affinität* aller Begriffe hinzu" [32]. Kants eigene Beispiele sind der Naturwissenschaft seiner Zeit entnommen; aber die moderne Mathematik bietet eine Illustration von ungleich größerer Vollkommenheit. Sie verwirklicht die Gleichartigkeit, indem sie (fast) alle Objekte in Form von Mengen darstellt; sie erreicht die Varietät, indem sie auf systematische Art Basisstrukturen (bei Bourbaki "Mutterstrukturen") und von ihnen durch Spezialisierung, Variation und Kombination abgeleitete einführt; und sie deckt die Affinität auf, indem sie verschiedene Objekte durch Morphismen, verschiedenen Typen von Strukturen durch Funktoren auf mannigfache Art in Beziehung bringt (ich denke hier vor allem an die zunehmende wechselseitige Durchdringung von Algebra und Topologie). Jede erfolgreiche Verallgemeinerung, jeder mathematische Satz vermehrt die Ordnung der Begriffe und ist ein Schritt zu dem von Kant postulierten "nach notwendigen Gesetzen zusammenhängenden System".

19

Dies führt uns zu einer unerwarteten Bestätigung des Idealismus. Die beiden natürlichen Gegenstände jeder ersten Mathematik sind Zahlen und Figuren, und diese standen lange Zeit kaum verbunden nebeneinander [33], bis Descartes zeigte, wie man Figuren durch Zahlen darstellen kann, und Hilbert, wie eine Begrifflichkeit reiner Gestalten die Zahlen hervorbringt [34]. Ein Königsthema der Mathematik, die "wahren" Beziehungen zwischen Figuren und Zahlen, Gestalt und Quantität, wird damit erst einer effektiven Bearbeitung erschlossen. Aber gleichzeitig vollzieht sich eine Transformation der Mathematik, indem ihr gesamtes Gebäude auf ein einziges Prinzip gestellt wird, das der Mengenbildung (oder alternativ, bei einem kategorientheoretischen Aufbau, das In-Beziehung-Setzen). Mengenbildung (im paradigmatischen Fall Bildung der Extension eines Begriffs) und Bezugsbildung aber sind fundamentale Operationen des theoretischen Agierens. Ging also die erste Mathematik aus von dem, was uns Erfahrung unmittelbar zeigt (kantisch gesprochen, von den Anschauungsformen), so wird nun diese erste Mathematik rekonstruiert innerhalb einer Mathematik des theoretischen Agierens (oder, kantisch, der Verstandsbegriffe). Dies entspricht genau der "kopernikanischen Wende" Kants, die man nirgends deutlicher sieht, als wenn man den Kategorienbegriff von Aristoteles mit dem von Kant vergleicht: ging jener auf Grundbestimmungen der Dinge, so enthält dieser Grundbestimmungen unseres Redens von den Dingen [35]. Und wie Kants Kategorien ein größeres Anwendungsfeld haben als die aristotelischen, nämlich das Feld all dessen, wovon wir überhaupt reden können, ist auch die neue Mathematik des theoretischen Agierens nicht auf die Zahlen und Figuren eingeschränkt, sondern erobert sich das ganze Feld dessen, was überhaupt mathematikfähig ist, das bedeutet, genügend scharfe Begriffe mit Regelhaftigkeit und einem "konstruktiv-deduktiven Potential" verbindet.

20

Vor allem greift sie, und das ist vielleicht das Bedeutsamste unter dem Neuen, nach jenem Bereich elementarer Konstellationen und ihnen entsprechender Handlungen des Ordnens und Umordnens, dem Leibniz unter den Titeln einer *ars combinatorica* und *characteristica universalis* eine höchste Stelle im theoretischen Agieren zusprach [36]. Nicht nur wird nun die Kombinatorik eine selbständige mathematische Disziplin; unter dem Zugriff der neu formulierten Mathematik treten auch die "kombinatorischen Substrate" der traditionellen Objekte ans Licht, wie simpliziale Komplexe für Gestalten, Wurzelsysteme für Liealgebren, Graphen für Modulkategorien. Das moderne Paradigma, der Begriff der Struktur, hat ja "von Hause aus" einen Zug ins Kombinatorische. "Kleine" Kategorien kann man immer mit Graphen identifizieren [37]. Nachdem man die klassischen Gruppen schon hundert Jahre studiert hatte, trat ihre Kombinatorik in den Begriffen der Gebäude und BN-Paare ans Licht; an wichtiger Stelle in der Theorie der Quantengruppen figurieren "Zöpfe" und "Gewebe", dargestellt durch ebene Graphen, die an Schriftzeichen erinnern oder die Ritzen und Flechten auf alten Mauern, in denen Leonardo ein universales Reservoir der Formen erblickte. Besonders eindrucksvoll ist die Verdichtung von Information in den Dynkindiagrammen, deren ganze Bedeutung erst in neuerer Zeit hervorgetreten ist.

Die späte Ankunft dieser elementaren Gebilde in der mathematischen Sphäre ist selbst ein bedenkenswertes Faktum - was verrät sie über das Elementare, über den historischen Augenblick? Eine Erklärung ist vielleicht, daß jene Gebilde ihr mathematisches Potential erst vor einem sehr entwickelten algebraisch-kategorialen Hintergrund entfalten können. Ein anderer Gesichtspunkt ist, daß jede mechanische Verarbeitung von Daten eine kombinatorische Form voraussetzt. Einen kulturhistorischen Ansatz, der die zunehmende Bedeutung von graphischen und diagrammatischen Darstellungsweisen in der Mathematik in einen allgemeineren Rahmen stellt, bietet Vilem Flussers Theorie der Kommunikation, insbesondere sein Begriff der "Technobilder" [38]. Jedenfalls scheint ein Paradigmenwechsel evident zu sein; die Strukturen im Sinne von Bourbaki werden selbst Gegenstände eines Konstruktionsspiels kombinatorischen Charakters. Aber damit nähern wir uns einem andern Thema, dem Wirken des mathematischen Weltgeistes, in dessen Strategien wir weniger Einblick haben als in die unsrigen.

Anmerkungen und Nachweise

(1) G.Polya, Mathematik und plausibles Schließen (2 Bde.), Basel 1966/67

(2) Philosophische Untersuchungen, § 123.

(3) Don Zagier, Die ersten 50 Millionen Primzahlen, in: W.Borho (ed.), Lebendige Zahlen, Basel 1991.

(4) Siehe Massey, Algebraic Topology, New York 1967, S.143.

(5) Ein besonders deutliches Beispiel ist die klassische Invariantentheorie. Invarianten von binären Formen (beliebigen Grades) oder quadratischen Formen (in beliebig vielen Veränderlichen) sind noch gut zu behandeln; aber schon die Diskriminante der ternären kubischen Formen ist ein Formelmonstrum, bei dem sich Handrechnung verbietet; siehe

dazu B.Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer 1993.

(6) Wobei die Funktoren als Morphismen zwischen Kategorien und die natürlichen Transformationen als Morphismen zwischen Funktoren aufgefaßt werden können. Der letztere Begriff war der ursprünglich angestrebte; siehe dazu die Bemerkung in S.Mac Lane, Categories for the working Mathematician, Springer 1997, S.18.

(7) Er konnte mit seinen Methoden die Vermutung nur für sog. reguläre Primzahlen beweisen; siehe dazu P.Ribenboim, 13 Lectures on Fermats last Theorem, Springer 1979. Der vor einige Jahren gelungene vollständige Beweis liefert die Aussage als "Nebenprodukt" der prima facie davon weit entfernten "Taniyama-Weil-Vermutung"; siehe S.Singh, Fermats letzter Satz, München 1998. Ähnliches gilt auch vom Beweis der Mordellvermutung; siehe G.Faltings, G.Wüstholz (eds.), Rational Points, Braunschweig 1992.

(8) Siehe P.Cohn, Universal Algebra, Dordrecht 1981, S.93.

(9) Nämlich vermöge Lawveres Theorie der algebraischen Theorien und Kategorien; siehe dazu P.Cohn (Anm. 8).

(10) Die Kategorientheorie hat sich von ihrer ursprünglichen Rolle als Metatheorie zum mathematischen Standarddiskurs längst emanzipiert; vor allem die Arbeiten von Lawvere haben gezeigt, daß Kategorientheorie ebensogut wie Mengentheorie zur Basis des mathematischen Diskurses gemacht werden kann (was in manchen Hinsichten sicherlich adäquater ist). Es gibt mittlerweile eine Diskussion über die Frage, ob man Mathematik mengen- oder kategorientheoretisch fundieren sollte; siehe etwa C.MacLarty in "Philosophia Mathematica" III , vol.13, 2005. Das große Publikum hat das allerdings noch nicht zur Kenntnis genommen.

(11) Siehe dazu den Kommentar von H.Hopf, zitiert von F.Hirzebruch in: Zahlen, H.-H.Ebbbinghaus u.a., Springer 1983.

(12) J-P.Serre, Algèbre Locale: Multiplicités, Springer Lecture Notes in Math. 11 (1965).

(13) Siehe J-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, in: Annals of Math. Studies 70 (1971), 77-161 (= Oeuvres, Vol.II, Nr. 88).

(14) Siehe S.Mac Lane (Anm. 6), S.21.

(15) Eine übersichtliche Einführung gibt A.Prestel in: Zahlen (Anm. 11).

(16) I.Moerdijk/G.E.Reyes, Models of Smooth Infinitesimal Analysis, Springer 1991.

(17) Siehe H.Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press 1990.

(18) Siehe J.Milnor/J.Stasheff, Characteristic Classes, Annals of Math.Studies 76,

Princeton 1974.

(19) V.Platonov/A.Rapinchuk, Algebraic Groups and Number Theory, Academic Press 1994.

(20) J.Milnor, Introduction to algebraic K-Theory, Annals of Math. Studies 72, Princeton 1971, §5.

(21) Siehe etwa J.Rotman, Introduction to Homological Algebra, Academic Press 1979, Ch.6.

(22) Man beachte aber, daß die multiplikative Struktur entweder ein umgebendes Mengenuniversum oder eigene Axiome erfordert; die Theorie von $(\mathbb{N},+)$ ist entscheidbar.

(23) Es ist sicher kein Zufall, daß diese drei Beispiele Adjungierte von Inklusionsfunktoren sind; die beiden ersten sind dabei algebraisch im Sinne von Lawvere, haben also nach einem allgemeinen Satz eine Adjungierte. Aber nicht immer sind die Adjungierten algebraischer Funktoren so "tautologisch" zu bilden.

(24) Damit ist natürlich nur eine Existenzaussage gemacht; etwas ganz anderes ist es, die Nullstellen in einem vorgegebenen Bereich zu "berechnen".

(25) Siehe A.Pfluger, Riemannsche Flächen, Springer 1957, §1. (Die bei den interessanten Fällen auftretenden Verzweigungspunkte führen dabei zu einer Komplikation, die ich unterschlagen habe.)

(26) C.L.Siegel, Transzendente Zahlen, Mannheim 1967, S.72.

(27) In einem strikten Sinn führt nur bei analytischen Aussagen der Weg "direkt nach unten".

(28) Z.A.Melzak, Bypasses, New York 1983.

(29) H.Herz, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894.

(30) Kritik der reinen Vernunft, B 672.

(31) a.a.O. B 673.

(32) a.a.O. B 685.

(33) Wenn man nicht die Spielerei der "figurierten Zahlen" als eine solche Verbindung nehmen will.

(34) Eine affine Ebene, in welcher der Satz von Pappus-Pascal gilt, ist eine Koordinatengeometrie über einem Körper. Gibt es in ihr eine Relation "zwischen" für die

Punkte fester Geraden, ist dieser Körper angeordnet und enthält damit eine Kopie der natürlichen Zahlen. Siehe etwa R.Lingenberg, Grundlagen der Geometrie, Mannheim 1978, S.43, und E.Beth, Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959, S.139 ff.

(35) Siehe dazu meinen Aufsatz "Categories in Philosophy and Mathematics" (erscheint demnächst in einem Sammelband des Leipziger Universitätsverlags).

(36) Siehe besonders [Anfangsgründe einer allgemeinen Charakteristik], GP VII, S.184ff, und De synthesi et analysi universali, GP VII, S.292ff. Bemerkenswert ist (vor allem von Bourbaki aus gesehen!), daß Leibniz die Algebra unter die Kombinatorik subsumiert.
(37) Siehe Mac Lane (Anm. 9), S.48ff.

(38) V.Flusser, Kommunikologie, Frankfurt/M 1998.