MAGISCHE DREIECKE, ENDLICHE GRUPPEN UND KOMBINATORIK

Helmut Krämer

0. Eine „Logelei“ einer Hamburger Wochenzeitschrift stellte das Problem, die ersten neun natürlichen Zahlen 1, 2, 3, $\ldots, 8, 9$ so auf die 9 Punkte des in Fig. 1 angegebenen (gleichseitigen) „magischen“ Dreiecks $\triangle$ zu verteilen, daß die Summe der Quadrate dieser natürlichen Zahlen längs jeder Dreiecksseite gelesen den gleichen Wert ergibt:

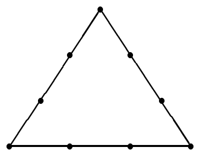


Fig. 1

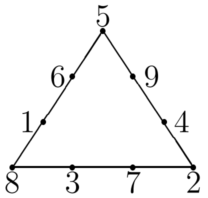


Fig. 2

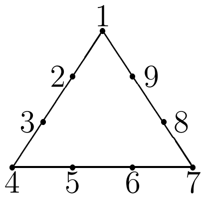


Fig. 3

Eine Woche später wurde (ohne weiteren Hinweis) die in Fig. 2 dargestellte Lösung des Problems gegeben. – Erweitern wir gleich das Problen und fragen, ob man die Zahlen $1, 2, \ldots, 8, 9$ so auf die Eckpunkte des Dreiecks $\triangle$ verteilen kann, daß die Summe der vierten (resp. sechsten) Potenzen dieser Zahlen längs jeder Dreiecksseite gelesen den gleichen Wert ergibt. Daß das nicht möglich ist, sieht man mit elementarer Kongruenzenrechnung und dem

Kleinen Satz von Fermat. *Ist p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p, dann gilt* $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

wie folgt: Sei $p = 5$ oder 7. Dann sind genau 8 Elemente der Menge $N := \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ teilerfremd zu p. Für jede Verteilung der Elemente von N auf die neun Punkte des Dreiecks gilt daher, daß die Summe der 4. (resp. 6.) Potenzen der Elemente von N längs mindestens einer Dreiecksseite gelesen kongruent 4 modulo p und längs mindestens einer anderen Dreiecksseite gelesen kongruent 3 modulo p ist. (Zum Beweis des kleinen Satzes von Fermat siehe etwa [Sch] Kap III).

Nun kann man Lösungen des eingangs gestellten Problems, das (um ein angelsächsisches Wort zu gebrauchen) aus dem Gebiet der „Recreational Mathematics“ stammt, sicherlich durch Ausprobieren finden; dabei wird man z.B. nicht die Zahlen 8, 9 auf die Nicht–Eckpunkte einer Seite verteilen.

Indessen schlagen wir hier folgenden Weg ein: Wir erweitern das Problem zu einem über simultane Kongruenzen in den Restklassenringen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =: \mathbb{F}_p$ für die Primzahlen $p = 2, 3$ oder 5 und lösen dieses systematisch. Dabei führen wir zunächst Operationen ein, die jeder Lösung der ursprünglichen „Logelei“ (und des noch zu formulierenden erweiterten Problems) weitere Lösungen zuordnen. Bezüglich Hintereinanderausführung dieser Operationen bilden dieselben eine Gruppe, deren Struktur bestimmt wird. Dabei werden u.a. folgende Begriffe eine Rolle spielen:

- Endliche Gruppen, die auf einer endlichen Menge (von links durch Permutation) operieren,
- Semidirekte Produkte, insbesondere Diedergruppen,
- Erzeugung von Diedergruppen durch Erzeugende und Relationen.

Unsere Darstellung ist so gehalten, daß sie auch für den Mathematik–Liebhaber, der sich von der „Logelei“ angeregt fühlt, eine natürlich sehr kurze und keinesfalls erschöpfende Einführung in diese oben erwähnten Begriffe anhand eines konkreten Beispiels liefert.

Für die eigentliche Lösung der Logelei und des erweiterten Problems benutzen wir

- kombinatorische Methoden.

Unsere Darstellung ist hier gelegentlich ausführlicher, als man es sonst erwarten würde; sie mag daher als Grundlage für ein (Pro–)Seminar über Algebra nützlich sein.

1. Wir numerieren nun die neun Punkte des in Fig. 1 gegebenen Dreiecks $\triangle$ wie in Fig. 3 durch und nennen die Elemente 1, 4, 7 aus N die „Eckpunkte“ von $\triangle$, ferner die Teilmengen

$$s_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ s_2 = \{4, 5, 6, 7\},\ s_3 = \{7, 8, 9, 1\}$$

die „Seiten“ von $\triangle$, ferner die Nicht–Eckpunkte der Seiten ihre „inneren“ Punkte. Mit S_N bezeichnen wir die Gruppe der bijektiven Abbildungen (bezüglich Hintereinanderausführung als Komposition) von N auf sich.

Sei nun $q \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl, ferner $\varphi \in S_N$. Man setze für $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
\Sigma_k^q \varphi &= \sum_{j \in s_k} \varphi(j)^q, \\
\mathcal{L}_q &= \{\varphi \mid \varphi \in S_N,\ \Sigma_1^q \varphi = \Sigma_2^q \varphi = \Sigma_3^q \varphi\}, \\
\mathcal{L}_q \langle \text{mod } p \rangle &= \{\varphi \mid \varphi \in S_N,\ \Sigma_1^q \varphi \equiv \Sigma_2^q \varphi \equiv \Sigma_3^q \varphi \text{ mod } p\}.
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathcal{L}_q \langle \text{mod } p \rangle$ sei noch

$$\Sigma^q \varphi = \Sigma_k^q \varphi,\ k = 1, 2, 3.$$

(Ist $p > 10$, dann folgt sofort mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat, daß $\mathcal{L}_{p-1}$ mod $p = S_N$ ist.) – Man setzt ferner

$$\mathcal{D}_q = \bigcap_{p=2,3,5} \mathcal{L}_q \langle \text{mod } p \rangle,$$

so daß gilt

$$\mathcal{L}_q \subset \mathcal{D}_q.$$

(Unser ursprüngliches Problem ist die Bestimmung von $\mathcal{L}_2$.) Nun erhält man zu vorgegebenen φ aus $\mathcal{L}_q \langle \text{mod } p \rangle$ oder $\mathcal{D}_q$ sicherlich weitere Elemente aus diesen Mengen, wenn man „anschaulich“ gesprochen φ als eine Verteilung der Elemente von N auf die Punkte des Dreiecks $\triangle$ ansieht und dieses (gleichseitige) Dreieck an den drei Höhen spiegelt oder um die Winkel $\frac{2}{3}\pi k$, $k = 1, 2$ etwa im mathematisch positiven Sinne (d.h. entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn) dreht. Das führt automatisch zum Begriff der Diedergruppen D_n (wobei der Fall $n = 3$ für uns wichtig ist).

(Gleichzeitig erhält man natürlich zu vorgegebenen φ neue Elemente aus $\mathcal{L}_q, \mathcal{L}_q\langle \mathrm{mod}\ p\rangle$ und $\mathcal{D}_q$, wenn man die Werte von φ auf den inneren Punkten (mindestens) einer Seite von $\triangle$ vertauscht; doch dazu später.)

Nehmen wir als Definition der Diedergruppe D_n, $n \in \mathbb{N}$ die in einer Übungsaufgabe von [Fi] gegebene:

DEFINITION 1 *Sei $n \in \mathbb{N}$ und ϑ die Drehung (im mathematisch positiven Sinne) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, ferner σ die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der y–Achse. Dann heißt die von ϑ und σ erzeugte Gruppe die Diedergruppe vom Grad n.*

D_n ist also eine Untergruppe der mit $O(2)$ bezeichneten Gruppe aller Isometrien des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$. – Die von ϑ erzeugte Untergruppe von D_n ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n, die mit C_n bezeichnet sei. – Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß

$$\sigma\vartheta\sigma^{-1} = \vartheta^{-1}$$

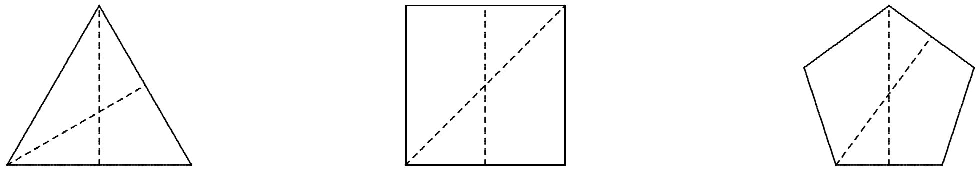
ist. Damit folgt schnell, daß C_n ein Normalteiler von D_n ist, und daß sich jedes Element $\alpha \in D_n$ eindeutig in der Form

$$\alpha = \sigma^r\vartheta^s,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq s \leq n-1$$

schreiben läßt; D_n hat also die Ordnung $2n$.

Bezeichnet $\square_n$ ein regelmäßiges n–Eck mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung des $\mathbb{R}^2$, dann bildet jedes $\alpha \in D_n$ $\square_n$ (als ganzes) auf sich ab; D_n besteht sogar aus allen Isometrien des $\mathbb{R}^2$ mit dieser Eigenschaft, und heißt daher auch „Symmetriegruppe“ von $\square_n$.

Eine Symmetrieachse von $\square_n$ ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung so, daß die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an dieser $\square_n$ in sich überführt. Es gibt stets zwei Symmetrieachsen von $\square_n$, die den Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschließen; siehe z.B. Fig. 4, wo Segmente dieser Achsen gepunktet eingezeichnet sind:



$\square_3 = \Delta$ $\square_4$ $\square_5$

Fig. 4

Seien σ_1, σ_2 die Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ an diesen ausgezeichneten Symmetrieachsen von $\square_n$. Dann zeigt eine elementare geometrische Überlegung, daß $\sigma_1 \circ \sigma_2$ eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ ist; D_n läßt sich also auch von σ_1 und σ_2 erzeugen. Es gilt also $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathrm{id}$, und n ist die kleinste natürliche Zahl q, so daß $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^q = \mathrm{id}$ ist. Umgekehrt läßt sich D_n durch sog. „Erzeugende und Relationen" beschreiben:

PROPOSITION 1 *Die Erzeugenden x_1, x_2 und die Relationen $x_1^2 = x_2^2 = (x_1x_2)^n = e$ definieren eine endliche Gruppe der Ordnung $2n$, die isomorph zur Diedergruppe D_n ist.*

Beweis: [Hu], Kap 1, 19.5 Beispiel.

Der Isomorphismus wird induziert durch die Abbildung

$$x_j \to \sigma_j,\ j = 1, 2, .–$$

Als nächstes definieren wir eine „Symmetriegruppe" für die Mengen $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{L}_q\langle \mathrm{mod}\ p\rangle$ und $\mathcal{D}_q$. Dazu folgende Definitionen:

DEFINITION 2 *Sei G eine endliche Gruppe und M eine nichtleere endliche Menge. G operiert (von links durch Permutationen) auf M, wenn es eine Abbildung*

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M,\ \Phi\big((g, m)\big) =: g \cdot m =: gm$$

so gibt, daß gilt

$$\begin{aligned} e \cdot m &= m, \forall\, m \in M, \\ (gh) \cdot m &= g(hm), \forall\, g, h \in G. \end{aligned}$$

Dann heißt die Teilmenge $Gm = \{gm \mid g \in G\}$ von M der Orbit von $m \in M$ bei Operation von G.

Es bezeichne S_M die Gruppe der Bijektionen von M („symmetrische Gruppe auf M"). – Operiert G auf M, dann ist für $g \in G$ die Abbildung

$$\Phi_g : M \to M,\ m \to gm,$$

eine Bijektion und die Abbildung

$$\widetilde{\Phi} : G \to S_M,\ g \to \Phi_g$$

ein Gruppenhomomorphismus. –

DEFINITION 3 *Sei G eine Gruppe, H, K Untergruppen. Dann heißt G das semidirekte Produkt von K mit H, in Zeichen $G = H \ltimes K$, wenn gilt*

i) K *ist ein Normalteiler von* G

ii) $H \cap K = \{e\}$

iii) $H \cdot K = G$

(dabei ist e das neutrale Element von G und $H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H,\ k \in K\}$).

SATZ 1 *Seien die Elemente $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ von S_N definiert durch*

$$\sigma_1 = (29)(38)(47)(56), \sigma_2 = (26)(35)(17)(89);$$
$$\tau_1 = (56), \tau_2 = (89),\ \tau_3 = (23);$$

und Γ die von diesen Elementen erzeugte Untergruppe von S_N, ferner M eine der Mengen

$$\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_q\langle mod\ p\rangle, \mathcal{D}_q\ (q = 2,3; p = 2,3,5).$$

i) Es sei $\varphi \in M$, $\gamma \in \Gamma$. Dann wird durch

$$\gamma\varphi =: \varphi \circ \gamma^{-1}$$

eine Operation von Γ auf M definiert.

ii) Sei H die von σ_1, σ_2 erzeugte, K die von τ_1, τ_2, τ_3 erzeugte Untergruppe von S_N. Dann gilt

$$H \cong D_3,\ K \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,$$

und Γ ist das semidirekte Produkt von K mit H,

$$\Gamma = H \ltimes K.$$

Beweis: zu i). Man zeigt zunächst, daß durch $\gamma\varphi = \varphi \circ \gamma^{-1}$ eine Operation von Γ auf S_N definiert wird; denn es gilt für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\varphi \in S_N$

$$(\gamma_1\gamma_2)\varphi = \varphi \circ (\gamma_1\gamma_2)^{-1} = \varphi \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1^{-1} = \gamma_1(\varphi \circ \gamma_2^{-1}) = \gamma_1(\gamma_2\varphi).$$

Es genügt jetzt zu zeigen, daß für $\varphi \in M$ und Erzeugende $\gamma \in \Gamma$ gilt $\gamma\varphi \in M$. Nun bildet σ_1 (siehe Fig. 3) die Seite s_1 von $\triangle$ auf s_3, s_3 auf s_1, und s_2 auf sich ab, so daß gilt

$$\Sigma_1^q\sigma_1\varphi = \Sigma_3^q\varphi,\ \Sigma_3^q\sigma_1\varphi = \Sigma_1^q\varphi,\ \Sigma_2^q\sigma_1\varphi = \Sigma_2^q\varphi.$$

Ähnlich schließt man, daß gilt

$$\Sigma_1^q\sigma_2\varphi = \Sigma_2^q\varphi,\ \Sigma_2^q\sigma_2\varphi = \Sigma_1^q\varphi,\ \Sigma_3^q\sigma_2\varphi = \Sigma_3^q\varphi.$$

Die Erzeugenden τ_k, $k = 1,2,3$ bilden alle Seiten auf $\triangle$ auf sich ab, so daß

$$\Sigma_t^q\tau_k\varphi = \Sigma_t^q\varphi,\ t = 1,2,3,$$

ist. Daraus folgt die Behauptung.

zu ii). Da K von 3 ziffernfremden Zykeln erzeugt wird, folgt sofort $K \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. –

Man rechnet nun aus, daß

$$\vartheta := \sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ist (hier wird σ_1 zuerst ausgeführt). Anschaulich entspricht ϑ einer Drehung des Dreiecks $\triangle$ um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ im Uhrzeigersinne (siehe Fig. 3). Wir überlassen es dem Leser nachzuprüfen, daß 3 die kleinste natürliche Zahl q ist, so daß $\vartheta^q = \mathrm{id}$ ist. Da $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathrm{id}$ ist, ergibt Prop. 1 nun $H \cong D_3$. –

Zum Beweis der Normalität von K: Um das folgende Lemma übersichtlicher formulieren zu können, setzen wir

$$\sigma_3 := \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \in H.$$

Man sieht sofort, daß mit σ_1, σ_2 auch σ_3 eine Involution ist, d.h. $\sigma_3^2 = \mathrm{id}$.

LEMMA *Für* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ *gilt*

$$\begin{aligned} &i) && \sigma_i\tau_i\sigma_i = \tau_i,\ \sigma_i\tau_j\sigma_i = \tau_k, \\ &ii) && \sigma_i\tau_i\tau_j\sigma_i = \tau_i\tau_k, \\ &iii) && \sigma_i\tau_j\tau_k\sigma_i = \tau_j\tau_k, \\ &iv) && \sigma_i\tau_i\tau_j\tau_k\sigma_i = \tau_i\tau_j\tau_k. \end{aligned}$$

Beweis zu i): Man rechnet direkt aus, daß $\sigma_i\tau_i = \tau_i\sigma_i$ für $i = 1, 2$ ist; für diese i gilt also $\sigma_i\tau_i\sigma_i = \tau_i$. Man rechnet nun aus, daß $\sigma_1\tau_2 = \tau_3\sigma_1$, $\sigma_2\tau_1 = \tau_3\sigma_2$ ist. Daraus folgt $\sigma_1\tau_2\sigma_1 = \tau_3$, $\sigma_2\tau_1\sigma_2 = \tau_3$. Durch Multiplikation von links und rechts mit σ_1 resp. σ_2 erhält man $\sigma_1\tau_3\sigma_1 = \tau_2$, $\sigma_2\tau_3\sigma_2 = \tau_1$. Damit folgt nach Definition von σ_3

$$\sigma_3\tau_3 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\tau_3 = \sigma_2\sigma_1\tau_1\sigma_2 = \sigma_2\tau_1\sigma_1\sigma_2 = \tau_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \tau_3\sigma_3,$$

d.h. $\sigma_3\tau_3\sigma_3 = \tau_3$. – Ferner gilt

$$\sigma_3\tau_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\tau_1 = \sigma_2\sigma_1\tau_3\sigma_2 = \sigma_2\tau_2\sigma_1\sigma_2 = \tau_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \tau_2\sigma_3,$$

d.h. $\sigma_3\tau_1\sigma_3 = \tau_2$, woraus $\sigma_3\tau_2\sigma_3 = \tau_1$ folgt. Damit ist i) bewiesen. –

Die weiteren Behauptungen folgen nun aus i). Wir führen das nur für ii) und iii) aus und überlassen die letzte Behauptung dem Leser: Es gilt

$$\sigma_i\tau_i\tau_j\sigma_i = \sigma_i\tau_i\sigma_i\tau_k = \sigma_i\sigma_i\tau_i\tau_k = \tau_i\tau_k,$$

und

$$\sigma_i\tau_j\tau_k\sigma_i = \sigma_i\tau_j\sigma_i\tau_j = \sigma_i\sigma_i\tau_k\tau_j = \tau_j\tau_k. –$$

Damit folgt die Normalität von K, wenn man beachtet, daß

$$K = \{\tau_1^{s_1}\tau_2^{s_2}\tau_3^{s_3} \mid 0 \le s_i \le 1,\ i = 1, 2, 3\}$$

und $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$ für alle i ist. –

Sei nun $\gamma \in H \cap K$. Dann muß γ die Eckpunkte 1, 4, 7 von $\triangle$ festlassen, da auch die Erzeugenden τ_i von K das tun. Andererseits schreibe man γ in der Form

$$\gamma = \sigma_1^r\vartheta^s,\ \vartheta = \sigma_1\sigma_2,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le s \le 2.$$

Nun gilt $\gamma(1) = 1$, $\vartheta(1) = 7$, $\vartheta(7) = 4$, $\vartheta(9) = 1$. Aus $\gamma(1) = 1$ folgt daher $s = 0$. Aber $\sigma_1(4) = 7$. Aus $\gamma(4) = 4$ folgt daher $r = 0$, d.h.

$$H \cap K = \text{id.}-$$

Zum Beweis von $\Gamma = H \cdot K$: Da Γ von H und K erzeugt wird, kann man $\gamma \in \Gamma$ in der Form

$$\gamma = h_1 k_1 h_2 k_2 \cdot \ldots \cdot h_t k_t;\ h_s \in H,\ k_s \in K,\ 1 \leq s \leq t$$

schreiben. Für $t = 1$ ist nichts zu zeigen; sei also $t > 1$. Da K normal in Γ ist, gibt es ein $k'_{t-1} \in K$, so daß $k_{t-1}\ h_t = h_t k'_{t-1}$ ist, also mit $\widetilde{h}_{t-1} := h_{t-1} h_t \in H$, $\widetilde{k}_{t-1} := k'_{t-1} k_t \in K$

$$\gamma = h_1 k_1 \cdot \ldots \cdot h_{t-2} k_{t-2} \cdot \widetilde{h}_{t-1} \widetilde{k}_{t-1}.$$

Ist $t = 2$, so folgt $\gamma \in HK$. Andernfalls repetiere man das gerade gemachte Argument und erhält nach endlich vielen Schritten $\gamma \in HK$. – Damit ist auch Aussage ii) von Satz 1 bewiesen. –

Es ist nützlich, sich die Operation von Γ auf S_N (und damit auch die Operation von Γ auf den Mengen $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_q\langle \text{mod } p\rangle, \mathcal{D}_q$) wie folgt zu veranschaulichen: Numeriert man die Punkte des (gleichseitigen) Dreiecks $\triangle$ wie in Fig. 3 angegeben durch, und bezeichnen für einen Augenblick $\sigma_{[1]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{[3]}$ die Spiegelungen von $\triangle$ an den Mittelsenkrechten durch die Eckpunkte 1, 4, 7, dann induziert $\sigma_{[i]}$ gerade die Permutation σ_i; wir bezeichnen daher auch $\sigma_{[i]}$ mit σ_i und haben damit Anschluß an die kurze Diskussion der Diedergruppen zu Beginn dieses Abschnittes hergestellt. – Ordnen wir jedem $\varphi \in S_N$ die „Wertverteilung von φ (längs $\triangle$)" zu, die man erhält, wenn man in Fig. 4 i durch $\varphi(i)$ ersetzt, dann operiert D_3 auf der Menge dieser Werteverteilungen. Ist $\gamma \in H$, so identifiziere man bezüglich des durch die Zuordnung $\sigma_{[i]} \to \sigma_i$, $i = 1, 2$, induzierten Isomorphismus $D_3 \cong H$ dieses Element mit einem Element von D_3. Man erhält nun die Werteverteilung von $\gamma\varphi, (\gamma \in H)$, indem man γ^{-1} auf die Werteverteilung von φ anwendet, d.h. indem man die Werteverteilung von φ entweder an den Mittelsenkrechten von $\triangle$ spiegelt oder um die Winkel $\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$, dreht. – Man überlegt sich schnell, daß man die Werteverteilung von $\tau_i\varphi$ (wobei die τ_i die Erzeugenden der Untergruppe K von Γ sind) aus der von φ erhält, indem man die Werte der inneren Punkte derjenigen Seite von $\triangle$, die dem Fixpunkt von σ_i gegenüberliegt, vertauscht. – Wir identifizieren im folgenden die Funktionen $\varphi \in S_N$ mit ihren Werteverteilungen längs $\triangle$.

2. Zur Bestimmung von $\mathcal{D}_q$, $q = 2, 3$ folgende Vorbereitungen:
Man definiere für $p = 2, 3, 5$ Abbildungen

$$\psi_{q,p} : S_N \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

durch

$$\psi_{q,p}(\varphi)(j) = \varphi(j)^q \text{mod } p,\ \varphi \in S_N$$

und schreibe auch $\psi_{q,p}(\varphi) = \varphi_{q,p}$.

Man setze ferner für $k = 1,2,3$

$$\Sigma_k \varphi_{q,p} = \sum_{j \in s_k} \varphi_{q,p}(j)$$

und definiere Mengen

$$\widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle =: \{\varphi_{q,p} \mid \Sigma_1\varphi_{q,p} = \Sigma_2\varphi_{q,p} = \Sigma_3\varphi_{q,p}\}.$$

Für $\varphi_{q,p} \in \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle$ setze man $\Sigma\varphi_{q,p} := \Sigma_k\varphi_{q,p}$, $k = 1,2,3$.

Es ist evident, daß $\psi_{q,p}$ eine (wieder mit dem gleichen Symbol bezeichnete) Abbildung

$$\psi_{q,p} : \mathcal{L}_q\langle \text{mod } p\rangle \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle$$

induziert. Ferner hat man nun eine Abbildung

$$\psi : \mathcal{D}_q \longrightarrow \prod_{p=2,3,5} \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle =: \widetilde{\mathcal{L}}_q$$

definiert durch

$$\psi(\varphi) = (\varphi_{q,2}, \varphi_{q,3}, \varphi_{q,5}),$$

die weder injektiv noch surjektiv ist.

Es ist leicht zu sehen, daß Γ auch auf den Mengen $\widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle$ operiert. Nehmen wir an, es seien uns schon Transversalen $\mathcal{T}_{q,p}$ für die Γ–Orbits der $\widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } p\rangle$ für $p = 2,3,5$ bekannt! Nützlich für die Bestimung einer Transversale $\mathcal{T}_q$ für die Γ–Orbits von $\mathcal{D}_q$ ist folgende

DEFINITION 4 und PROPOSITION 2 *Ein Tripel*

$$t = (\varphi'_{q,2}, \varphi''_{q,3}, \varphi'''_{q,5}) \in \prod_{p=2,3,5} \mathcal{T}_{q,p} =: \widetilde{\mathcal{T}}_q$$

heißt „kompatibel", wenn es $\varphi \in S_N$ und $\gamma', \gamma'', \gamma''' \in \Gamma$ so gibt, daß

$$(\varphi_{q,2}, \varphi_{q,3}, \varphi_{q,5}) = (\gamma'\varphi'_{q,2}, \gamma''\varphi''_{q,3}, \gamma'''_{q,5}\varphi'''_{q,5})$$

ist. φ heißt dann „die Kompatibilität von t induzierend" oder auch zu t „assoziiert".

Es gilt dann

$$\varphi \in \mathcal{D}_q.-$$

Zum Beweis der Proposition formulieren wir folgende leicht einzusehende Regel, die wir des öfteren zu benutzen haben:

Regel R *Seien $\varphi, \varphi^* \in S_N$ und $\varphi^*_{q,p} \in \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle mod\ p\rangle$. Gibt es $\gamma \in \Gamma$ so, daß*

$$\varphi_{q,p} = \gamma\varphi^*_{q,p}$$

ist, dann gilt für $k = 1,2,3$

$$\Sigma^q_k\varphi \text{ mod } p = \Sigma\varphi^*_{q,p}.-$$

Sei nun $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q$ die Menge aller kompatiblen Tripel aus $\widetilde{\mathcal{T}}_q$. Dann ist jedes $\varphi \in \mathcal{D}_q$ zu genau einem Element aus $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q$ assoziiert. Ferner sind Γ–äquivalente Elemente von $\mathcal{D}_q$ (d.h. solche, die im gleichen Γ–Orbit von $\mathcal{D}_q$ liegen) zum selben Element von $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q$ assoziiert. Ist $\mathcal{T}_q$ eine Transversale für die Γ–Orbits von $\mathcal{D}_q$, so folgt aber i.a. nicht, daß „Assoziiert–Sein" eine Bijektion zwischen $\mathcal{T}_q$ und $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q$ induziert.

Sei nun $\mathcal{M} = \mathcal{D}_q$ die Menge aller Elemente, die zu den Elementen von $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q$ assoziiert sind. Ein Repräsentantensystem Γ–äquivalenter Elemente von $\mathcal{M}$ ist dann eine Transversale $\mathcal{T}_q$ für die Γ–Orbits von $\mathcal{D}_q$. –

Man setze
$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{L}_q\langle \text{mod } 3\rangle \cap \mathcal{L}_q\langle \text{mod } 5\rangle$$
und definiert
$$\psi' : \mathcal{D}'_q \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } 3\rangle \times \widetilde{\mathcal{L}}_q\langle \text{mod } 5\rangle$$
durch
$$\psi'(\varphi) = (\varphi_{q,3}, \varphi_{q,5}).$$
Nennen wir analog zur Definition 4 ein Tupel
$$t' = (\varphi''_{q,3}, \varphi'''_{q,5}) \in \mathcal{T}_{q,3} \times \mathcal{T}_{q,5} =: \widetilde{\mathcal{T}}'_q$$
„kompatibel", wenn es $\varphi \in S_N$ und $\gamma'', \gamma''' \in \Gamma$ so gibt, daß
$$(\varphi_{q,3}, \varphi_{q,5}) = (\gamma''\varphi''_{q,3}, \gamma'''\varphi'''_{q,5})$$
ist. φ heißt dann wieder zu t' assoziiert oder die Kompatibilität induzierend. In diesem Fall folgt nach der Regel **R**, daß
$$\varphi \in \mathcal{D}'_q$$
ist.

Es bezeichne nun $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}'_q$ die Menge aller kompatiblen Tupel in $\widetilde{\mathcal{T}}'_q$. – Sei nun π die „Projektion"
$$\pi : \widetilde{\mathcal{T}}_q \longrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}'_q.$$
Dann ist klar, daß π eine wieder mit demselben Symbol bezeichnete Abbildung
$$\pi : \mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_q \longrightarrow \mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}'_q$$
induziert. Hat man also ein Tripel $t \in \widetilde{\mathcal{T}}_q$ zu testen, ob es kompatibel ist, und ist bekannt, daß $\pi(t)$ kein kompatibles Tupel ist, so ist t kein kompatibles Tripel. Dieses Argument werden wir des öfteren benutzen; zu entscheiden, ob ein Tupel aus $\widetilde{\mathcal{T}}'_q$ kompatibel ist, erfordert i.a. weniger Aufwand als zu entscheiden, ob ein Tripel aus $\widetilde{\mathcal{T}}_q$ kompatibel ist.

Wie sich zeigen wird, ist die Bestimmung von Transversalen $\mathcal{T}_{3,p}$ für $p = 3, 5$ bedeutend aufwendiger als die Bestimmung von $\mathcal{T}_{2,p}$ (aber nicht für $p = 2$). Um eine Transversale $\mathcal{T}_3$ der Γ–Orbits von $\mathcal{D}_3$ zu bestimmen, berechnet man daher zunächst eine Transversale $\mathcal{T}'_3$ für die Γ–Orbits von $\mathcal{D}'_3$. Dabei erweisen sich folgende Bezeichnungen als zweckmäßig:

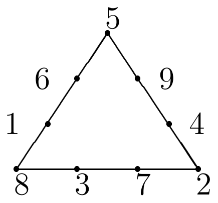
Für ein kompatibles Tupel $t' \in \mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_3'$ sei $\mathcal{M}(t')$ die Γ–Menge aller zu t' assoziierten Elemente aus $\mathcal{D}_3'$. Man bestimmt dann zunächst eine mit $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')}$ bezeichnete Transversale für die Γ–Orbits von $\mathcal{M}(t')$, so daß

$$\mathcal{T}_3' = \bigcup_{t' \in \mathcal{K}-\widetilde{\mathcal{T}}_3'} \mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')}$$

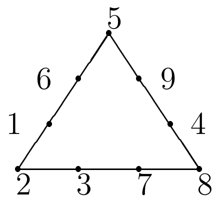
ist. Genau diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_3'$, die längs jeder Seite s_k gleich oft ungerade (oder gerade) Werte annehmen, bilden dann eine Transversale $\mathcal{T}_3$. –

3. Wir beweisen in diesem Abschnitt

SATZ 2. *Die Γ–Menge $\mathcal{D}_2$ hat genau 2 Orbits; eine Transversale für die Orbits ist $\{\varphi_{2;1}, \varphi_{2;2}\}$ mit*



$\varphi_{2;1}$



$\varphi_{2;2}$

Man bestätigt, daß sogar $\varphi_{2;1} \in \mathcal{L}_2$ und $\varphi_{2;2} \in \mathcal{D}_3$, $\varphi_{2,2} \notin \mathcal{L}_2$ gilt. Es folgt das

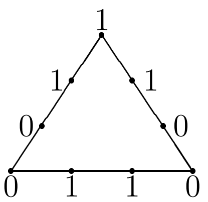
KOROLLAR. *Die Γ–Menge $\mathcal{L}_2$ hat genau einen Orbit, der von $\varphi_{2;1}$ erzeugt wird.*

Durch das Korollar wird also die „Logelei“ gelöst. –

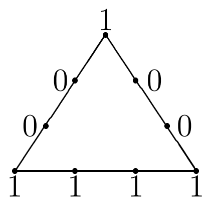
Gemäß **2.** bestimmen wir zunächst Transversalen $\mathcal{T}_{2,p}$, $p = 2, 3, 5$.

PROPOSITION 2

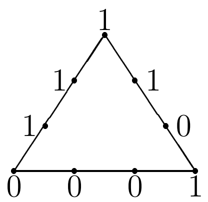
i) $\mathcal{T}_{2,2} := \left\{\varphi_{2,2}^{(1)}, \varphi_{2,2}^{(2)}, \varphi_{2,2}^{(3)}\right\}$ *mit*



$\varphi_{2,2}^{(1)}$



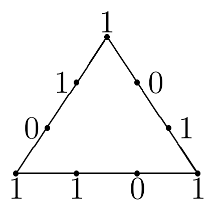
$\varphi_{2,2}^{(2)}$



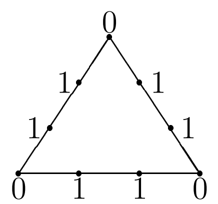
$\varphi_{2,2}^{(3)}$

ist eine Transversale für die Orbits der Γ–Menge $\widetilde{\mathcal{L}}_2\langle mod\ 2\rangle$ (hier sind die Einträge auf $\triangle$ modulo 2 zu lesen).

ii) $\mathcal{T}_{2,3} = \{\varphi_{2,3}^{(1)}, \varphi_{2,3}^{(2)}\}$ *mit*



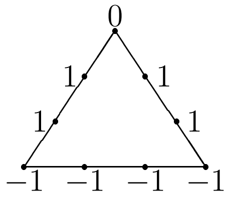
$\varphi_{2,3}^{(1)}$



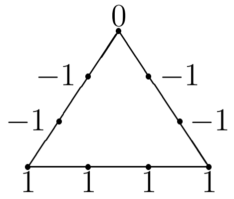
$\varphi_{2,3}^{(2)}$

ist eine Transversale für die Orbits der Γ*–Menge* $\widetilde{\mathcal{L}}_{\underline{2}}\langle mod\ 3\rangle$ *(hier sind die Einträge auf* $\triangle$ *modulo 3 zu lesen).*

iii) $\mathcal{T}_{2,5} = \{\varphi_{2,5}^{(1)}, \varphi_{2,5}^{(2)}\}$ *mit*



$\varphi_{2,5}^{(1)}$



$\varphi_{2,5}^{(2)}$

ist eine Transversale für die Orbits der Γ*–Menge* $\widetilde{\mathcal{L}}_2\langle mod\ 5\rangle$ *(hier sind die Einträge auf* $\triangle$ *modulo 5 zu lesen).*

Beweis: Der besseren Übersicht wegen folgende Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2mod 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x^2mod 3	1	1	0	1	1	0	1	1	0
x^2mod 5	1	−1	−1	1	0	1	−1	−1	1

Tabelle T_1

zu i): Jedes $\varphi_{2,2}$ nimmt auf N 5–mal den Wert 1 mod 2 $= \overline{1}$ und 4–mal den Wert 0 mod 2 $= \overline{0}$ an. Sei nun stets $\varphi_{2,2} \in \widetilde{\mathcal{L}}_2\langle\text{mod } 2\rangle$ und zunächst

$$\Sigma\varphi_{2,2} = \overline{0}.$$

Dann nimmt $\varphi_{2,2}$ auf den Seiten von $\triangle$ eine gerade Anzahl mal den Wert 1 an.

1. Fall: Angenommen, es gibt eine Seite s, auf der $\varphi_{2,2}$ nur den Wert $\overline{0}$ annimmt. Dann bildet $\varphi_{2,2}$ alle Punkte von $\triangle$, die nicht auf s liegen, auf $\overline{1}$ ab; $\varphi_{2,2}$ nimmt also auf den von s verschiedenen Seiten genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ an. Das ist unmöglich, Fall 1 kann also nicht auftreten.

2. Fall: Es gibt eine Seite s, auf der $\varphi_{2,2}$ genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ annimmt.

2.1. $\varphi_{2,2}$ bildet die Eckpunkte e, e' von s auf $\overline{0}$ ab. $\varphi_{2,2}$ nimmt daher auf den beiden anderen Seiten von $\triangle$ genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ an. Würde $\varphi_{2,2}$ den dritten Eckpunkt e'' (der der Seite s gegenüberliegt) auf $\overline{0}$ abbilden, so nähme $\varphi_{2,2}$ genau 6–mal den Wert $\overline{1}$ an, Widerspruch. Also gilt $\varphi_{2,2}(e'') = \overline{1}$, und es folgt, daß $\varphi_{2,2}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{2,2}^{(1)}$ ist.

2.2 $\varphi_{2,2}$ bildet genau einen Eckpunkt von s, etwa e, auf $\overline{1}$ ab. Dann kann $\varphi_{2,2}$ nicht alle Punkte der e gegenüberliegenden Seite s' auf $\overline{1}$ abbilden, da sonst $\varphi_{2,2}$ mindestens 6–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen würde. Also muß nach Fall 1 $\varphi_{2,2}$ auf s' genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen.

2.2.1. Angenommen, $\varphi_{2,2}$ nimmt auf den beiden inneren Punkten von s' den Wert $\overline{1}$ an. Dann muß $\varphi_{2,2}$ auf der mit e inzidenten Seite $s'' \neq s$ ebenfalls 2–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen, und es folgt wieder, daß $\varphi_{2,2}$ Γ–äquivalent zu $\varphi^{(2)}_{2,2}$ ist.

2.2.2. Angenommen, $\varphi_{2,2}$ nimmt auf einem Eckpunkt e'' von s' den Wert $\overline{1}$ an. Dann muß e'' der dritte Eckpunkt von $\triangle$ sein, der mit der Seite s'' inzident ist. Da $\varphi_{2,2}$ genau 5–mal den Wert $\overline{1}$ annimmt, muß $\varphi_{2,2}$ auf s'' genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen, Widerspruch. Dieser Fall kann also nicht auftreten.

3. Fall: $\varphi_{2,2}$ nimmt auf einer Seit s genau 4–mal den Wert $\overline{1}$ an. Man sieht sofort, daß dann $\varphi_{2,2}$ Γ–äquivalent zu $\varphi^{(2)}_{2,2}$ ist. –

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,2} = \overline{1}.$$

Dann nimmt $\varphi_{2,2}$ auf den Seiten von $\triangle$ entweder 1–mal oder 3–mal den Wert $\overline{1}$ an. Es ist unmöglich, daß $\varphi_{2,2}$ auf jeder Seite genau einmal den Wert $\overline{1}$ annimmt (da $\varphi_{2,2}$ auf N genau 5–mal den Wert $\overline{1}$ annimmt).

$\varphi_{2,2}$ nehme also auf der Seite s genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ an, diesen dann notwendig in dem Eckpunkt e von s.

1. Fall: $\varphi_{2,2}$ nimmt im Eckpunkt $e' \neq e$ von s den Wert $\overline{0}$ an. Es kann nicht sein, daß $\varphi_{2,2}$ auf der mit e inzidenten Seite $s'' \neq s$ nur einmal den Wert $\overline{1}$ annimmt, da dann $\varphi_{2,2}$ auf der e gegenüberliegenden Seite s' genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ annimmt, Widerspruch. Daher muß $\varphi_{2,2}$ auf s' genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen, auch im dritten Eckpunkt e'' von s', da andernfalls $\varphi_{2,2}$ auf s' keinmal den Wert $\overline{1}$ annehmen würde. Es folgt, daß $\varphi_{2,2}$ Γ–äquivalent zu $\varphi^{(3)}_{2,2}$ ist.

2. Fall: $\varphi_{2,2}$ nimmt auch im Eckpunkt e' von s den Wert $\overline{1}$ an. Angenommen, $\varphi_{2,2}$ nimmt auch im dritten Eckpunkt e'' von $\triangle$ den Wert $\overline{1}$ an. Dann muß $\varphi_{2,2}$ auf den Seiten s', s'' genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen, so daß $\varphi_{2,2}$ insgesamt 6–mal diesen Wert annimmt, Widerspruch. Also ist $\varphi_{2,2}(e'') = \overline{0}$. Dann nimmt $\varphi_{2,2}$ auf s' genau einmal und auf s'' genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ an. Es folgt, daß $\varphi_{2,2}$ Γ-äquivalent zu $\varphi^{(3)}_{2,2}$ ist. –

Damit ist i) bewiesen.

zu ii): Jedes $\varphi_{2,3}$ nimmt auf $\triangle$ genau 6–mal den Wert 1 mod 3 $= \overline{1}$ und 3–mal den Wert 0 mod 3 $= \overline{0}$ an. Sei nun $\varphi_{2,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_2\langle \text{mod } 3\rangle$ und zunächst

$$\Sigma\varphi_{2,3} = \overline{0}.$$

$\varphi_{2,2}$ muß auf jeder Seite mindestens einmal und damit genau 3–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen. Angenommen, es gebe eine Seite s so, daß $\varphi_{2,3}$ in einem Eckpunkt e von s den Wert $\overline{0}$ annimmt, so daß $\varphi_{2,3}$ im Eckpunkt $e' \neq e$ von s den Wert $\overline{1}$ annimmt. Da $\varphi_{2,3}$ auf der e' gegenüberliegenden Seite 3–mal den Wert $\overline{1}$ annimmt, sind schon 6 Punkte auf s, s' bekannt, auf denen $\varphi_{2,3}$ den Wert $\overline{1}$ annimmt. Dann nimmt aber $\varphi_{2,3}$ auf der dritten Dreiecksseite genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ an, Widerspruch. Also nimmt $\varphi_{2,3}$ den Wert $\overline{0}$

genau einmal auf den inneren Punkten jeder Seite an; es folgt, daß $\varphi_{2,3}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{2,3}^{(1)}$ ist.

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,3} = \overline{1}.$$

Dann muß $\varphi_{2,3}$ auf jeder Seite entweder einmal oder 4–mal den Wert $\overline{1}$ annehmen. Angenommen, $\varphi_{2,3}$ nehme auf der Seite s 4–mal den Wert $\overline{1}$ an. Dann nimmt aber $\varphi_{2,3}$ auf den beiden anderen Seiten genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ an, Widerspruch! Also muß $\varphi_{2,3}$ auf jeder Seite genau einmal den Wert $\overline{1}$ annehmen; das ist unmöglich. Also gibt es kein $\varphi_{2,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_2\langle \text{mod } 3\rangle$ mit $\Sigma\varphi_{2,3} = \overline{1}$.

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,3} = -\overline{1}.$$

Dann nimmt $\varphi_{2,3}$ auf jeder Seite von $\triangle$ genau 2–mal den Wert $\overline{1}$ an.

1. Fall: Angenommen, es gebe eine Seite s so, daß $\varphi_{2,3}$ auf den beiden Eckpunkten von s den Wert $\overline{1}$ annimmt. Da $\varphi_{2,3}$ genau 3–mal den Wert $\overline{0}$ annimmt, gibt es eine Seite, auf der $\varphi_{2,3}$ nur den Wert $\overline{1}$ annimmt, Widerspruch!

2. Fall: Angenommen, $\varphi_{2,3}$ nimmt auf der Seite s nur einen Eckpunkt von s, etwa e, den Wert $\overline{1}$ an. Da $\varphi_{2,3}$ auf der mit e inzidenten Seite $s' \neq s$ genau 2–mal den Wert $\overline{0}$ annimmt, nimmt $\varphi_{2,2}$ den Wert $\overline{0}$ mindestens 4–mal an, Widerspruch! Daher nimmt $\varphi_{2,3}$ den Wert $\overline{1}$ genau in den inneren Punkten der Seiten an. Es folgt hier, daß $\varphi_{2,3}$ *gleich* $\varphi_{2,3}^{(2)}$ ist.

Damit ist ii) bewiesen. –

zu iii): Jedes $\varphi_{2,5}$ nimmt nach Tabelle T_1 längs $\triangle$ genau einmal den Wert $0 \text{ mod } 5 = \overline{0}$ und je 4–mal die Werte $\overline{1} = 1 \text{mod } 5$ und $-\overline{1}$ an. Für die Werteverteilung von $\varphi_{2,5}$ auf einer Seite s führen wir das Symbol

$$\mathcal{W}_s = [0_\alpha 1_\beta (-1)_\gamma],\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq \beta, \gamma \leq 4,\ \alpha + \beta + \gamma = 4$$

ein: Es bedeute, daß $\varphi_{2,5}$ auf s genau α–mal den Wert $\overline{0}$, genau β–mal den Wert $\overline{1}$ und genau γ–mal den Wert $-\overline{1}$ annimmt; $\Sigma\mathcal{W}_s$ sei die Summe der angenommenen Werte (gezählt mit den entsprechenden Multiplizitäten). Wird ein Wert auf s nicht angenommen, so streiche man den entsprechenden Term im Symbol. Die Tabellen $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_2'$ geben alle Werteverteilungen und die zugehörigen Wertesummen an (die $\Sigma\mathcal{W}_s$ sind modulo 5 zu lesen).

$\mathcal{W}_s$	$\Sigma\mathcal{W}_s$
$[0_1 1_3]$	3
$[0_1 1_2 (-1)_1]$	2
$[0_1 1_1 (-1)_2]$	4
$[0_1 (-1)_3]$	2

Tabelle T_2

$\mathcal{W}_s$	$\Sigma\mathcal{W}_s$
$[1_4]$	4
$[1_3 (-1)_1]$	2
$[1_2 (-1)_2]$	0
$[1_1 (-1)_3]$	3
$[(-1)_4]$	1

Tabelle T_2'

Sei nun stets $\varphi_{2,5} \in \widetilde{\mathcal{L}}_2\langle\text{mod } 5\rangle$. Es gelte

$$\Sigma\varphi_{2,5} = \overline{0}.$$

Da $\varphi_{2,5}$ den Wert $\overline{0}$ einmal annimmt, zeigt Tabelle T_2, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,5} = \overline{1}.$$

Angenommen, $\varphi_{2,5}$ nimmt den Wert $\overline{0}$ nur auf einer Seite an. Dann zeigt Tabelle T_2', daß $\varphi_{2,5}$ auf $\triangle$ den Wert $-\overline{1}$ mindestens 7–mal annimmt, Widerspruch. Also nimmt $\varphi_{2,5}$ den Wert $\overline{0}$ in einem Eckpunkt von $\triangle$ an, Tabellen T_2 und T_2' zeigen nun, daß $\varphi_{2,5}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{2,5}^{(1)}$ ist.

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,5} = \overline{2}.$$

Angenommen, $\varphi_{2,5}$ nimmt den Wert $\overline{0}$ in einem Eckpunkt von $\triangle$ an. Die Werteverteilung von $\varphi_{2,5}$ auf den beiden mit diesem Eckpunkt inzidenten Seiten wird durch Tabelle T_2 gegeben. Es folgt, daß $\varphi_{2,5}$ auf $\triangle$ den Wert $-\overline{1}$ mindestens 6–mal annimmt, Widerspruch! Also nimmt $\varphi_{2,5}$ den Wert $\overline{0}$ nur auf einer Seite an, die Werteverteilung auf den beiden anderen Seiten wird nach Tabelle T_2' gegeben; es folgt, daß $\varphi_{2,5}$ den Wert $\overline{1}$ auf $\triangle$ mindestens 5–mal annimmt, Widerspruch!

Wir überlassen es dem Leser nachzuprüfen, daß der Fall

$$\Sigma\varphi_{2,5} = \overline{3}$$

ebenfalls nicht auftreten kann.

Sei nun

$$\Sigma\varphi_{2,5} = \overline{4}.$$

Man sieht sofort, daß $(-\overline{1})\,\varphi_{2,5}$ in $\widetilde{\mathcal{L}}_2\langle\text{mod } 5\rangle$ liegt und daß gilt

$$\Sigma\,(-\overline{1})\,\varphi_{2,5} = (-\overline{1})\overline{4} = \overline{1}.$$

Daher ist $(-\overline{1})\,\varphi_{2,5}\quad\Gamma$–äquivalent zu $\varphi_{2,5}^{(1)}$ und daher $\varphi_{2,5}\quad\Gamma$–äquivalent zu $(-\overline{1})\,\varphi_{2,5}^{(1)} = \varphi_{2,5}^{(2)}$.
Damit ist iii) bewiesen. –

Bemerkung: Die in i) angegebenen Elemente bilden sogar eine Transversale für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_q\langle\text{mod } 2\rangle$ für alle $q \geq 2$.

Zur Bestimmung von $\widetilde{\mathcal{T}}_2$ folgendes

LEMMA *Es gibt in $\widetilde{\mathcal{T}}_2$ höchstens ein kompatibles Tripel, nämlich*

$$t^* = \left(\varphi_{2,2}^{(1)}, \varphi_{2,3}^{(1)}, \varphi_{2,5}^{(1)}\right).$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die in Fig. 5

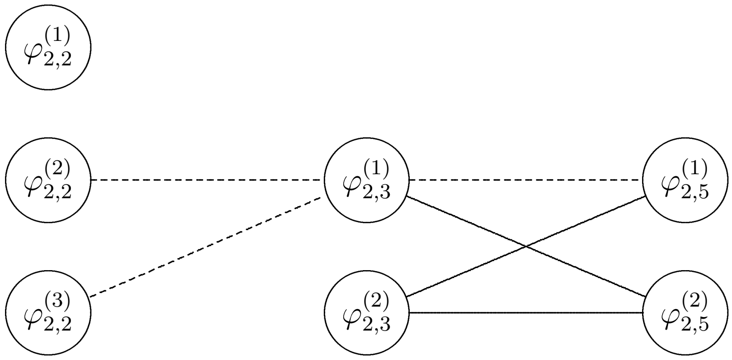


Fig. 5

durch durchgehende Geraden eingezeichneten Tupel aus $\widetilde{\mathcal{T}}_2'$ und unterbrochene Gerade eingezeichneten Tripel aus $\widetilde{\mathcal{T}}_2$ **nicht** kompatibel sind.

Das sieht man so ein:
1. $t' = \left(\varphi_{2,3}^{(2)}, \varphi_{2,5}^{(j)}\right)$, $j = 1, 2$ sind nicht kompatibel. Denn angenommen, das sei nicht der Fall, $\varphi \in \mathcal{D}_2$ induziere die Kompatiblität. Aus der ersten Komponente von t' liest man ab, daß φ die Eckpunkte von $\triangle$ auf 3, 6, 9 abbildet, aus der zweiten Komponenten, daß φ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf 5 abbildet, Widerspruch!

2. $t' = \left(\varphi_{2,3}^{(1)}, \varphi_{2,5}^{(2)}\right)$ ist nicht kompatibel. Denn angenommen, φ induziere doch Kompatiblität. Aus der zweiten Komponenten von t' liest man ab, daß φ einen Eckpunkt $\triangle$ auf 5 und die Punkte der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite s_k nach Tabelle T_1 auf $\{1, 4, 6, 9\}$ abbildet, also $\Sigma_k^2\varphi \equiv 2 \bmod 3$. Aber nach der Regel $\mathbf{R}$ ist

$$\Sigma_k^2\varphi \bmod 3 = \Sigma\varphi_{2,3} \equiv 0(3),$$

Widerspruch!

3. $t = \left(\varphi_{2,2}^{(3)}, \varphi_{2,3}^{(1)}, \varphi_{2,5}^{(1)}\right)$ ist nicht kompatibel. Denn angenommen, φ induziere Kompatibilität. Aus der 3. Komponente von t liest man ab, daß φ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf 5 und

die Punkte s_k der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite auf $\{2,3,7,8\}$ abbildet, also $\Sigma_k^2\varphi \equiv 0(2)$. Nach der Regel **R** gilt

$$\Sigma_k^2\varphi \bmod 2 = \Sigma\varphi_{2,2}^{(3)} \equiv 1(2),$$

Widerspruch!

4. $t = \left(\varphi_{2,2}^{(2)}, \varphi_{2,3}^{(1)}, \varphi_{2,5}^{(1)}\right)$ ist kein kompatibles Tripel. Denn angenommen, φ induziere doch Kompatibilität. Aus der dritten Komponenten von t liest man wieder ab, daß φ die Punkte einer Seite s auf $\{2,3,7,8\}$ abbildet. Aus der ersten Komponenten von t folgt nun, daß φ die beiden Eckpunkte von s auf ungerade Zahlen abildet, also einen Eckpunkt von $\triangle$ auf 3. Aus der 2. Komponenten von t folgt aber, daß φ nur einen inneren Punkt einer Seite von $\triangle$ auf 3 abbilden kann, Widerspruch!

Damit ist das LEMMA bewiesen.

Wir beweisen nun, daß t^* in der Tat kompatibel ist. Sei $\varphi \in \mathcal{D}_2$ ein Kandidat, der Kompatibilität induziert, also

$$(*)\cdots \qquad \psi(\varphi) = \left(\gamma_1\varphi_{2,2}^{(1)}, \gamma_2\varphi_{2,3}^{(1)}, \gamma_3\varphi_{2,5}^{(1)}\right).$$

Aus der dritten Komponenten von t^* liest man ab, daß φ einen Eckpunkt e von $\triangle$ auf 5 abbildet. Wir wählen $e = 1$ und $\gamma_3 = \mathrm{id}$. Dann bildet nach Tabelle T_1 φ die Seite s_2 auf $\{2,3,7,8\}$ ab. Nun bildet $\varphi_{2,2}^{(1)}$ den Eckpunkt 1 auf $\overline{1}$ und die Eckpunkte 4, 7 von $\triangle$ auf $\overline{0}$ ab. Es gilt

$$(2)\ldots \qquad \overline{1} = 5^2 \bmod 2 = \varphi(1)^2 \bmod 2 = \gamma_1\varphi_{2,2}^{(1)}(1) = \varphi_{2,2}^{(1)} \cdot \gamma_1^{-1}(1).$$

Man schreibe (siehe Satz 1) $\gamma_1 = \gamma_H \cdot \gamma_K$, $\gamma_H \in H$, $\gamma_K \in K$. γ_K läßt alle Eckpunkte von $\triangle$ fest. Aus Gl (2) folgt nun $\gamma_1(1) = 1$, d.h. $\gamma_1 = \sigma_1^s$, $0 \le s \le 1$. Damit folgt nun, daß $\gamma_1\varphi_{2,2}^{(1)}$ eingeschränkt auf s_2 die Identität ist, so daß φ die Eckpunkte von s_2 auf $\{2,8\}$ abbilden muß. – Ferner erhält man $\gamma_2\varphi_{2,3}^{(1)}$ aus $\varphi_{2,3}^{(1)}$, indem man höchstens die Werte von $\varphi_{2,3}^{(1)}$ auf den inneren Punkten der Seiten von $\triangle$ vertauscht. – Zusammen erhält man daher für die Werte $x, y \in N$ von φ auf den inneren Punkten der Seiten s_1, s_3 von $\triangle$ die Gleichungen

$$(3)\begin{cases} x^2 \equiv 1(2) \\ \\ y^2 \equiv 0(2) \end{cases} \qquad (4)\begin{array}{l} x^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \bmod 3 \\ \\ y^2 \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \bmod 3. \end{array} \qquad (5)\begin{cases} x^2 \equiv 1(5) \\ \\ y^2 \equiv 1(5). \end{cases}$$

Aus Gl (3) und Gl (5) folgt nach Tabelle T_1 $x = 1$ oder $x = 9$ und $y = 4$ oder $y = 6$. Schreibt man die gemeinsamen Lösungen von Gl (3) und Gl (5) als Tupel $(x,y) \in N^2$, dann genügen die Tupel (1, 4) und (9, 6) nicht Gl (4). Man erhält als gemeinsame Lösungen $(x,y) \in N^2$ von Gl (3), (4), (5) die Tupel (1, 6), (9, 4).

Sei nun $\mathcal{M}'$ die Menge aller $\varphi \in S_N$, die man erhält, wenn man unabhängig voneinander die Eckpunkte $\{4,7\}$ von s_2 auf $\{2,8\}$, die inneren Punkte von s_2 auf $\{3,7\}$, die inneren Punkte von s_1 (resp. s_3) auf $\{1,6\}$, die inneren Punkte von s_3 (resp. s_1) auf $\{4,9\}$ und natürlich 1 auf 5 abbildet. Sei Γ' die Untergruppe aller $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(1) = 1$. Man rechnet nun leicht aus, daß für diese $\varphi \in S_N$ gilt, daß $\varphi_{2,2}$ im Γ'–Orbit von $\varphi_{2,2}^{(1)}$, $\varphi_{2,3}$ im Γ'–Orbit von $\varphi_{2,3}^{(1)}$ und $\varphi_{2,5}$ im Γ'–Orbit von $\varphi_{2,5}^{(1)}$ liegt, also gilt $\mathcal{M}' \subset \mathcal{D}_2$. –

Nun hängt die Menge $\mathcal{M}'$ von der „Anfangsbedingung" $\varphi(1) = 5$ ab. Sucht man die Kompatibilität von t^* induzierende $\varphi \in S_N$ mit $\varphi(4) = 5$ resp. $\varphi(7) = 5$, so gilt für $\widetilde{\varphi} := \sigma_3\varphi$ resp. $\widetilde{\varphi} := \sigma_2\varphi$, daß $\widetilde{\varphi}(1) = 5$ ist. Daher gilt nach dem oben Bewiesenen, daß $\widetilde{\varphi}$ und damit auch φ entweder zu $\varphi_{2;1}$ oder $\varphi_{2;2}$ Γ–äquivalent ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen. –

4. In diesem Abschnitt bestimmen wir Transversalen $\mathcal{T}_{3,p}$ $(p = 3, 5)$ für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3\langle\mathrm{mod}\ p\rangle$.

Zur besseren Übersicht folgende Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^3 \mathrm{mod}\ 3$	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
$x^3 \mathrm{mod}\ 5$	1	-2	2	-1	0	1	-2	2	-1

Tabelle T_3

(hier sind die Einträge in Zeile 2 in $\mathbb{F}_3$, diejenigen in Zeile 3 in $\mathbb{F}_5$ zu lesen).

Sei nun zunächst $p = 3$. Für $\varphi \in S_N$ nimmt $\varphi_{3,3}$ auf N jeden Wert aus $\mathbb{F}_3 =: \{x, y, z\}$ genau dreimal an. Für die (lokale) Werteverteilung von $\varphi_{3,3}$ auf der Seite s von $\triangle$ führen wir das Symbol

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \mathcal{W}\left(\varphi_{3,3}; s\right) \quad &= [x_\alpha y_\beta z_\gamma], \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 3, \quad &\alpha + \beta + \gamma = 4, \end{aligned}$$

ein: Es bedeutet, daß $\varphi_{3,3}$ auf s genau α–mal den Wert x, β–mal den Wert y und γ–mal den Wert z annimmt. Die α, β, γ heißen die (lokalen) Multiplizitäten der entsprechenden Werte. Einen Wert, der mit Multiplizität Null auftritt, lassen wir im Symbol gelegentlich auch weg.

Ein formales kommutatives Produkt

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}\mathcal{W}'\mathcal{W}''$$

von 3 Werteverteilungen, die nicht notwendig verschieden zu sein brauchen, nennen wir eine Pseudo–Werteverteilung. Ist $x \in \mathbb{F}_3$, so heißt die Summe der Multiplizitäten von x in den drei Faktoren der Pseudowerteverteilung $\widetilde{\mathcal{W}}$ die (Gesamt)–Multiplizität $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) = \mu\left(x\right)$.

Schließlich nennen wir eine Pseudowerteverteilung $\widetilde{\mathcal{W}}$ eine Werteverteilung, wenn es ein $\varphi \in S_N$ so gibt, daß

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \prod_{k=1}^{3} \mathcal{W}\left(\varphi_{3,3}; s_k\right) =: \widetilde{\mathcal{W}}\left(\varphi_{3,3}\right)$$

ist und diese Werteverteilung „glatt“, wenn gilt $\varphi_{3,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3\langle \text{mod } 3\rangle$.

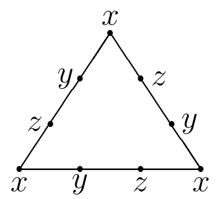
PROPOSITION 3.1 *Sei $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,3})$ eine Werteverteilung.*

i) Für $x \in \mathbb{F}_3$ gilt

$$3 \leq \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) \leq 6.$$

ii) Ist für $x \in \mathbb{F}_3$ $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) = 6$, dann bildet $\varphi_{3,3}$ (genau) die drei Eckpunkte $\triangle$ auf x ab, so daß die (lokale) Multiplizität von x auf allen Seiten von $\triangle$ gleich 2 ist.

iii) Ist $\widetilde{\mathcal{W}}$ glatt und gilt fr ein $x \in \mathbb{F}_3$ $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) = 6$, dann ist (mit $\{x, y, z\} = \mathbb{F}_3$) $\varphi_{3,3}$ Γ–äquivalent zu



Es gilt ferner $\Sigma\varphi_{3,3} = x$.
(Durch diese Aussage erhält man schon drei Elemente einer Transversalen $\mathcal{T}_{3,3}$.)

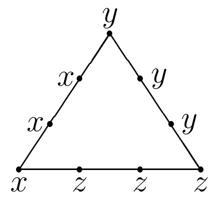
iv) Für jedes $u \in \mathbb{F}_3$ sei die (lokale) Multiplizität von u auf genau 2 Seiten von $\triangle$ größer als Null. Dann gilt mit $\{x, y, z\} = \mathbb{F}_3$ entweder

$$\widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,3}) = [x_3y_1][y_3z_1][z_3x_1]$$

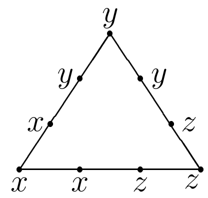
oder

$$\widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,3}) = [x_2y_2][y_2z_2][z_2x_2],$$

und $\varphi_{3,3}$ ist entweder Γ–äquivalent zu



oder zu



,

so daß $\widetilde{\mathcal{W}}$ n i c h t glatt ist.

Beweis:

Zu i) und ii): Man setze für $x \in \mathbb{F}_3$ und $k = 1, 2, 3$

$$N_k = \{j \mid j \in s_k, \varphi_{3,3}(j) = x\}.$$

Dann gilt nach der „Siebformel“

$$|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = \sum_{j=1}^{3} |N_j| - \sum_{j<k} |N_j \cap N_k| + |N_1 \cap N_2 \cap N_3|,$$

also

$$3 = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) - \sum_{j<k} |N_j \cap N_k|, \ |N_j \cap N_k| \leq 1.$$

Daraus folgen sofort die Behauptungen.

Zu iii): Nach ii) werden die Eckpunkte von $\triangle$ durch $\varphi_{3,3}$ auf x abgebildet. Angenommen, $\varphi_{3,3}$ nehme auf der Seite s_j von $\triangle$ 2–mal den Wert y an. Dann gibt es eine Seite s_k, auf der $\varphi_{3,3}$ genau einmal den Wert y annimmt. Es folgt

$$\Sigma_j \varphi_{3,3} = \overline{2}x + \overline{2}\overline{y} \neq 2x + y + z = \Sigma_k \varphi_{3,3},$$

Widerspruch! Also gilt

$$\widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,3}) = [x_2 y_1 z_1]^3.$$

Daraus folgt die erste Behauptung. – Nun ist

$$\Sigma \varphi_{3,3} = \overline{2}x + y + z = x + (x + y + z) = x.–$$

Zu iv): $\varphi_{3,3}$ kann nicht zwei Eckpunkte von $\triangle$ auf das gleiche $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ abbilden, da sonst x auf allen Seiten von $\triangle$ als Wert angenommen würde.

1. Fall: Angenommen, $\varphi_{3,3}$ nimmt auf der Seite s von $\triangle$ den Wert x dreimal an. Dann nimmt $\varphi_{3,3}$ den Wert x nach dem eben Bemerkten in genau einem Eckpunkt e von s an, im Eckpunkt $e' \neq e$ von s werde der Wert y angenommen. Da der Wert y nun schon auf 2 Seiten von $\triangle$ angenommen wird, wird durch $\varphi_{3,3}$ auf der e' gegenüberliegenden Seite der Wert x genau einmal und der Wert z genau 3–mal angenommen; damit bildet $\varphi_{3,3}$ den Eckpunkt $e'' \neq e, e'$ auf z ab. Auf der e gegenüberliegenden Seite wird nun der Wert y genau 3–mal und (wie wir schon wissen) der Wert z genau einmal angenommen. Es folgt

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,3}) = [x_3 y_1][y_3 z_1][z_3 x_1].$$

2. Fall: Angenommen, $\varphi_{3,3}$ nimmt auf einer Seite s von $\triangle$ den Wert x genau zweimal an.

2.1. $\varphi_{3,3}$ nimmt den Wert x auf den inneren Punkten von s an. In den Eckpunkten e, e' von s mögen die Werte y, z angenommen werden (nach dem zuerst Bemerkten). Dann wird der Wert x auch im dritten Eckpunkt e'' von $\triangle$ angenommen, so daß x auf allen Seiten von $\triangle$ angenommen wird, Widerspruch!

2.2. $\varphi_{3,3}$ nimmt also den Wert x in genau einem Eckpunkt e von s an. Angenommen, auf s werden auch die Werte y, z angenommen, etwa y im Eckpunkt $e' \neq e$ von s. Dann muß $\varphi_{3,3}$ nach der Eingangsbemerkung den dritten Eckpunkt e'' von $\triangle$ auf z abbilden, so daß dieser Wert auf allen Seiten von $\triangle$ angenommen wird, Widerspruch! – Also nimmt $\varphi_{3,3}$

auf s nur die Werte x, y an und diese in den beiden Eckpunkten e, e' von s. Dann wird im dritten Eckpunkt e'' notwendig der Wert z angenommen. Auf der e' gegenüberliegenden Seite s' kann der Wert y nicht mehr angenommen werden, also werden dort nur die Werte x, z angenommen. Ebenso werden auf der dritten Seite $s'' \neq s, s'$ nur die Werte y, z angenommen. Es folgt

$$\mathcal{W}(\varphi_{3,3}) = [x_2 y_2][y_2 z_2][z_2 x_2].$$

3. Fall: $\varphi_{3,3}$ nimmt auf einer Seite s von $\triangle$ den Wert x genau einmal an. Würde x in einem inneren Punkt von s angenommen, dann werden die Werte y, z auf den Eckpunkten von s angenommen, und x wird dann im s gegenüberliegenden Eckpunkt angenommen, also auf jeder Seite, Widerspruch! Also wird x in einem Eckpunkt von s angenommen. Angenommen, auf s werden alle Werte angenommen, etwa y im anderen Eckpunkt von s und dieser Wert zweimal. Wir sind dann im Fall 2.2 (wenn man dort x durch y ersetzt). Dieser Fall ist ausgeschlossen. Also wird auf s der Wert y dreimal angenommen, und wir können den 1. Fall anwenden. –

Aus der bisherigen Diskussion folgen sofort die restlichen Ausagen von iv).

Damit ist die Proposition bewiesen. –

Bemerkung: Wir haben die Aussage iv) der Proposition 3.1 wegen eines gewissen eigenständigen Interesses aufgenommen. Zur Bestimmung einer Transversale wird sie nicht unbedingt gebraucht; siehe auch dazu einen entsprechenden Hinweis im Beweis der folgenden Proposition.

Für eine (lokale) Werteverteilung $\mathcal{W} = [x_\alpha y_\beta z_\gamma]$ sei $\Sigma\mathcal{W} := \alpha \cdot x + \beta \cdot y + z \cdot \gamma$ die „Wertesumme“ von $\mathcal{W}$. – Um die (lokalen) Werteverteilungen $\mathcal{W}$ mit $\Sigma\mathcal{W} = \overline{0}$ oder $\overline{1}$ (Überqueren bedeutet bis auf weiteres Restklassenbildung mod 3) zu bestimmen, folgendes

LEMMA *Es gilt*

$$\alpha \cdot \overline{0} + \beta \cdot \overline{1} + \gamma \cdot (-\overline{1}) = \overline{0}$$

genau dann, wenn

$$\alpha \cdot \overline{1} + \beta \cdot \overline{0} + \gamma \cdot (-\overline{1}) = \overline{1}$$

ist.

Das rechnet man unter Berücksichtigung von $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \overline{1}$ leicht nach. –

Wir setzen nun (bis zum Ende des Beweises von Prop. 3.2)

$$\begin{aligned} x &= \overline{0}, \quad y = \overline{1}, \quad z = -\overline{1}, \\ x' &= \overline{1}, \quad y' = \overline{0}, \quad z' = -\overline{1}, \end{aligned}$$

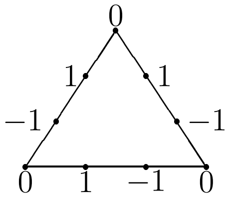
und haben: Genau dann ist $\mathcal{W} = [x_\alpha y_\beta z_\gamma]$ eine (lokale) Werteverteilung mit Wertesumme $\overline{0}$, wenn $\mathcal{W}' := [x'_\alpha y'_\beta z'_\gamma]$ eine (lokale) Werteverteilung mit Wertesumme $\overline{1}$ ist.

Die (lokalen) Werteverteilungen mit Wertesumme $\overline{0}$ sind

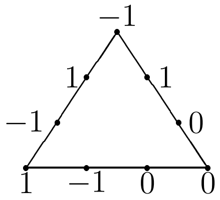
$$(6)\ldots \qquad \begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= [x_2 y_1 z_1], \\ \mathcal{W}_2 &= [x_0 y_2 z_2], \\ \mathcal{W}_3 &= [x_1 y_0 z_3], \\ \mathcal{W}_4 &= [x_1 y_3 z_0]. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen nun zur Bestimmung einer Transversale $\mathcal{T}_{3,3}$:

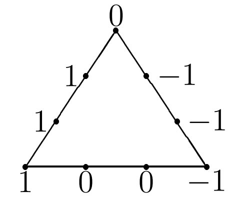
PROPOSITION 3.2 *Eine Transversale $\mathcal{T}_{3,3}$ für die Γ-Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3\langle mod\ 3\rangle$ wird gegeben durch die Elemente*



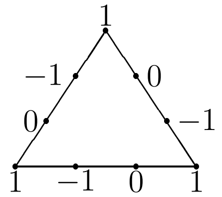
$\varphi_{3,3}^{(0.1)}$



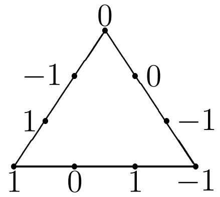
$\varphi_{3,3}^{(0.2)}$



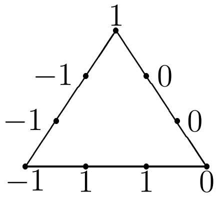
$\varphi_{3,3}^{(0.3)}$



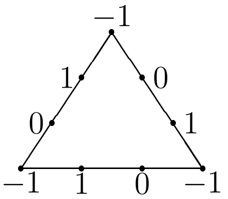
$\varphi_{3,3}^{(1.1)}$



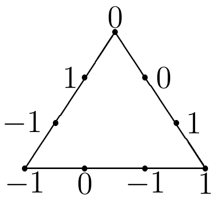
$\varphi_{3,3}^{(1.2)}$



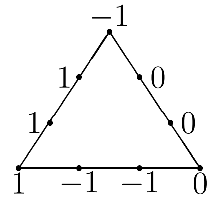
$\varphi_{3,3}^{(1.3)}$



$\varphi_{3,3}^{(2.1)}$



$\varphi_{3,3}^{(2.2)}$



$\varphi_{3,3}^{(2.3)}$

Dabei sind die Einträge auf $\triangle$ modulo 3 zu lesen; ferner ist die Durchnumerierung so gewählt, daß gilt

$$\Sigma\varphi_{3,3}^{(r.t)} = r \bmod 3 = \overline{r}.$$

Beweis: Man setze für $r = 0, 1, 2$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(r)}\langle \text{mod } 3\rangle = \{\varphi_{3,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3\langle \text{mod } 3\rangle \mid \Sigma\varphi_{3,3} = \overline{r}\};$$

$\mathcal{T}_{3,3}^{(r)}$ sei eine Transversale für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(r)}\langle \text{mod } 3\rangle$, so daß $\dot{\bigcup}_{r=0,1,2} \mathcal{T}_{3,3}^{(r)}$ eine Transversale $\mathcal{T}_{3,3}$ ist. –

Sei nun $\varphi_{3,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3^{(0)}\langle \text{mod } 3\rangle$. Dann treten in der WV (= Werteverteilung) $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,3})$ nur Faktoren aus der Menge (siehe Gl (6))

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}} := \{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4\}$$

auf. Ist umgekehrt $\widetilde{\mathcal{W}}$ eine PWV (= Pseudowerteverteilung) mit sämtlichen Faktoren in $\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}$, und ist diese eine WV, $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,3})$, so ist nach Voraussetzung $\widetilde{\mathcal{W}}$ glatt, d.h. $\varphi_{3,3} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3^{(0)}\langle \text{mod } 3\rangle$. Wir testen daher die PWV mit allen Faktoren in $\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}$, ob sie WV sind, mit Hilfe von Proposition 3.1 (= P).

1. Die PWV $\mathcal{W}_k^3$, $k = 2, 3, 4$ sind keine WV nach P, i); denn für $k = 2$ ist $\mu(x) = 0$, für $k = 3$ ist $\mu(y) = 0$, für $k = 4$ ist $\mu(z) = 0$.

2. Die PWV $\mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_k$, $k = 3, 4$ sind keine WV nach P, i); denn für $k = 3$ ist $\mu(y) = 2$, für $k = 4$ ist $\mu(z) = 2$.

3. Die PWV $\mathcal{W}_2^2\mathcal{W}_k$, $k \neq 2$ sind keine WV nach P, i); denn hier ist stets $\mu(x) \leq 2$.

4. Die PWV $\mathcal{W}_3^2\mathcal{W}_k$, $k \neq 3$ sind keine WV. Denn für $k = 1, 2$ ist $\mu(y) \leq 2$, wende P, i) an. – Angenommen, $\mathcal{W}_3^2\mathcal{W}_e$ sei eine WV. Hier ist $\mu(z) = 6$, also müßte nach P, ii), z mit Multiplizität 2 in $\mathcal{W}_4$ auftreten, was nicht der Fall ist.

5. Die PWV $\mathcal{W}_4^2\mathcal{W}_k$, $k \neq 4$ sind keine WV. Denn für $k = 1$ ist $\mu(y) = 7$, für $k = 2$ ist $\mu(y) = 8$; wende P, i) an. – Angenommen, $\mathcal{W}_4^2\mathcal{W}_3$ sei WV. Hier ist $\mu(y) = 6$, und nach P, ii), müßte y mit Multiplizität 2 in $\mathcal{W}_3$ auftreten, was nicht der Fall ist.

6. $\mathcal{W}_2\mathcal{W}_3\mathcal{W}_4$ ist keine WV. Denn angenommen doch: Dann wäre nach P, iv) diese WV nicht glatt, Widerspruch. Hier kann man (einfacher) mit P, i) schließen; denn es gilt hier $\mu(x) = 2$.

7. $\mathcal{W}_1\mathcal{W}_2\mathcal{W}_k$, $k = 3, 4$ sind keine WV. Denn angenommen doch: Für $k = 3$ ist $\mu(z) = 6$. Nach P, ii) müßte z mit Multiplizität 2 in $\mathcal{W}_1$ auftreten! Für $k = 4$ ist $\mu(y) = 6$. Wiederum nach P, ii) müßte y mit Multiplizität in $\mathcal{W}_1$ auftreten!

Es bleiben also als einzige Kandidaten der eingangs betrachteten Art für WV

$$\mathcal{W}_1^3, \mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_2,\ \mathcal{W}_1\mathcal{W}_3\mathcal{W}_4.$$

In der Tat ist nach P, iii) $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,3}) = \mathcal{W}_1^3$ eine WV, und man erhält, daß $\varphi_{3,3}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,3}^{(0.1)}$ ist. – Im zweiten Fall setzen wir an $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,3}) = \mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_2$ mit gesuchtem $\varphi_{3,3}$. Sei die Werteverteilung von $\varphi_{3,3}$ auf den Seiten s, s' von $\triangle$ durch $\mathcal{W}_1$ gegeben. Angenommen, der Eckpunkt $e = s \cap s'$ von $\triangle$ werde durch $\varphi_{3,3}$ auf y oder z abgebildet. Dann würde $\varphi_{3,3}$ den Wert x viermal annehmen, Widerspruch! Also gilt $\varphi_{3,3}(e) = x$. Angenommen, $\varphi_{3,3}$ bilde die Eckpunkte der e gegenüberliegenden Seite s'' auf das gleiche Element w (= y oder z) ab. Dann wird der Wert $w_\bullet$ definiert durch $\{w_\bullet\} = \{y, z\} - \{w\}$ durch $\varphi_{3,3}$ in je einem inneren Punkt von s und s' und in den inneren Punkten von s'', also insgesamt viermal angenommen, Widerspruch! Also nimmt $\varphi_{3,3}$ (falls es existiert) in den Eckpunkten von s'' die Werte y und z an. In der Tat ist nun $\varphi_{3,3}$ wohldefiniert, und es folgt gleichzeitig, daß $\varphi_{3,3}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,3}^{(0.2)}$ ist.

Im dritten Fall setzen wir an $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,3}) = \mathcal{W}_1\mathcal{W}_3\mathcal{W}_4$ mit gesuchtem $\varphi_{3,3}$. Die Werteverteilung auf der Seite s sei durch $\mathcal{W}_3$, die auf der Seite $s' \neq s$ sei durch $\mathcal{W}_4$ gegeben. Dann muß $\varphi_{3,3}$ den Eckpunkt $e = s \cap s'$ auf x und gleichzeitig die inneren Punkte der e gegenüberliegenden Seite s'' auf x abbilden. In der Tat ist nun $\varphi_{3,3}$ wohldefiniert, und es folgt, daß $\varphi_{3,3}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,3}^{(0.3)}$ ist.

Insgesamt hat sich ergeben

$$\mathcal{T}_{3,3}^{(0)} = \left\{ \varphi_{3,3}^{(0.t)} \mid t = 1,2,3 \right\}.–$$

Man ersetzt nun im obigen Beweis alle ungestrichenen (lokalen) Werteverteilungen $\mathcal{W}_k$ durch die gestrichenen $\mathcal{W}'_k$, $k = 1,2,3,4$ und erhält als einzige Kandidaten für die gestrichenen Werteverteilungen

$$\mathcal{W}_1'^3, \mathcal{W}_1'^2\mathcal{W}'_2, \mathcal{W}'_1\mathcal{W}'_3\mathcal{W}'_4,$$

usw. und erhält

$$\mathcal{T}_{3,3}^{(1)} = \left\{ \varphi_{3,3}^{(1.t)} \mid t = 1,2,3 \right\}.–$$

Nun zeigt Tabelle T_3, daß mit $\varphi_{3,3}$ auch $-\varphi_{3,3}$ in $\widetilde{\mathcal{L}}_3\langle \mathrm{mod}\ 3\rangle$ liegt. Das ergibt

$$\mathcal{T}_{3,3}^{(2)} = \left\{ -\varphi_{3,3}^{(1.t)} = \varphi_{3,3}^{(2.t)} \mid t = 1,2,3 \right\}.$$

Damit ist die Proposition bewiesen.

Sei nun für den Rest dieses Abschnittes stets $p = 5$. – Eine Funktion $\varphi_{3,5}$ nimmt auf N den Wert $\overline{0}$ (Überqueren bedeutet jetzt Restklassenbildung mod 5) genau einmal und alle anderen Werte aus $\mathbb{F}_5$ genau 2–mal an. Wir definieren daher (analog zum eben behandelten Fall $p = 3$) eine (lokale) Werteverteilung durch das Symbol

$$\mathcal{W} = [0_\alpha v_\beta x_\gamma y_\delta z_\varepsilon],$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \leq 2, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 4,$$

wobei wir $\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, v, x, y, z\}$ gesetzt haben.

Die Gleichung

$$\mathcal{W}\left(\varphi_{3,5}; s\right) = [0_\alpha v_\beta x_\gamma y_\delta z_\varepsilon]$$

bedeutet, daß $\varphi_{3,5}$ auf der Seite s von $\triangle$ genau α–mal den Wert $\overline{0}$, β–mal den Wert $v, \ldots$, ε–mal den Wert z annimmt. Alle zu Beginn dieses Abschnittes gemachten Definitionen übertragen sich wohl selbsterklärend hier; so haben wir die Begriffe der (lokalen) Multiplizität eines Elements $w \in \mathbb{F}_5$ auf einer (lokalen) Werteverteiung, der Pseudowerteverteilung $\widetilde{\mathcal{W}}$, der (Gesamt–)Multiplizität $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x)$, die Definition einer Werteverteilung und die einer glatten Werteverteilung, also z.B.: Eine Pseudowerteverteilung $\widetilde{\mathcal{W}}$ ist Werteverteilung, wenn es eine Funktion $\varphi_{3,5}$ so gibt, daß

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \prod_{k=1,2,3} \mathcal{W}\left(\varphi_{3,5}; s_k\right) =: \widetilde{\mathcal{W}}\left(\varphi_{3,5}\right)$$

ist; diese heißt „glatt“, wenn gilt $\varphi_{3,5} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3\langle \mathrm{mod}\ 5\rangle$.

Für jedes $w \neq 0$ aus $\mathbb{F}_5$ ist die Homothetie („Multiplikation mit w“) $m_w : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$ bijektiv (mit inverser Abbildung $m_{w^{-1}}$). Tabelle T_3 zeigt damit, daß mit $\varphi_{3,5} : N \to \mathbb{F}_5$ auch die Abbildung $w \cdot \varphi_{3,5}$ definiert durch

$$(w\varphi_{3,5})\,(j) = w \cdot \bigl(\varphi_{3,5}(j)^3 \bmod 5\bigr)$$

von der Form $\psi_{3,5}(\varphi')$ für geeignetes $\varphi \in S_N$ ist. Zwar ist φ nicht eindeutig bestimmt, aber $\psi_{3,5}(\varphi')$ ist es.

Ferner folgt, daß für eine (lokale) Werteverteilung $\mathcal{W} = [0_\alpha v_\beta x_\gamma y_\delta z_\varepsilon]$ auch

$$w\mathcal{W} := \bigl[0_\alpha (wv)_\beta (wx)_\gamma (wy)_\delta (wz)_\varepsilon\bigr]$$

eine (lokale) Werteverteilung mit Wertesumme

$$\Sigma w\mathcal{W} = w\Sigma\mathcal{W}$$

ist. – Ist die Pseudowerteverteilung

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}\mathcal{W}'\mathcal{W}''$$

eine Werteverteilung, etwa $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,5})$, dann gilt für $w \neq 0$

$$\widetilde{\mathcal{W}}\,(w \cdot \varphi_{3,5}) = (w\mathcal{W})(w\mathcal{W}')(w\mathcal{W}'').$$

Es folgt, daß die Pseudowerteverteilung $\mathcal{W}\mathcal{W}'\mathcal{W}''$ genau dann eine Werteverteilung ist, wenn das für $(w\mathcal{W})(w\mathcal{W}')(w\mathcal{W}'')$, $w \neq 0$, gilt.

PROPOSITION 4.1 *Sei $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}\,(\varphi_{3,5})$ eine Werteverteilung.*

i) Es gilt $1 \leq \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(\overline{0}) \leq 2$ und $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(\overline{0}) = 2$ genau dann, wenn $\varphi_{3,5}$ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf $\overline{0}$ abbildet.

ii) Es gilt für $x \in \mathbb{F}_5$, $x \neq 0$

$$2 \leq \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) \leq 4.$$

Es gilt ferner $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) = 3$ genau dann, wenn $\varphi_{3,5}$ genau einen Eckpunkt von $\triangle$ auf x abbildet.

Es gilt $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x) = 4$ genau dann, wenn $\varphi_{3,5}$ zwei Eckpunkte von $\triangle$ auf x abbildet. In diesem Falle gilt für $x' \neq x$ stets $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x') \leq 3$.

Beweis: Wir erinnern daran, daß jede Funktion $\varphi_{3,5}$ auf $\triangle$ genau einmal den Wert $\overline{0}$ und alle anderen Werte aus $\mathbb{F}_5$ genau zweimal annimmt.

i) ist nun klar.

Zu ii) Man setze für $k = 1, 2, 3$

$$N_k = \{j \mid j \in S_k,\ \varphi_{3,5}(j) = x\}.$$

Dann gilt nach der Siebformel

$$|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = \sum_{k=1}^{3} |N_k| - \sum_{k<l} |N_k \cap N_l| + |N_1 \cap N_2 \cap N_3|,$$

also

$$2 + \sum_{k<l} |N_k \cap N_l| = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(x).$$

Daraus liest man die Aussagen unmittelbar ab. –

Durch (geduldiges) Ausprobieren bestimmt man nun die (lokalen) Werteverteilungen mit Wertesumme $\overline{0}$ und $\overline{1}$. Diese sind im Fall

Wertesumme $\overline{0}$

$$(7)\ldots \qquad \begin{array}{rl} \mathcal{U}_1 = & [0_1 1_2 (-2)_1] \\ \mathcal{U}_2 = & [0_1 (-1)_2 2_1] \\ \mathcal{U}_3 = & [0_1 1_1 2_2] \\ \mathcal{U}_4 = & [0_1 (-1)_1 (-2)_2] \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mathcal{V}_1 = & [1_1 (-1)_1 2_1 (-2)_1] \\ \mathcal{V}_2 = & [1_2 (-1)_2] \\ \mathcal{V}_3 = & [2_2 (-2)_2] \end{array}$$

und im Fall

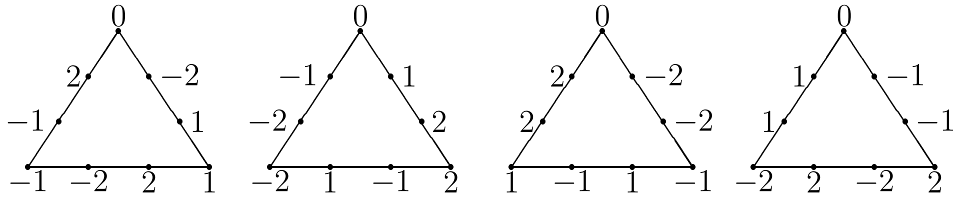
Wertesumme $\overline{1}$

$$(8)\ldots \qquad \begin{array}{rl} \mathcal{U}'_1 = & [0_1 1_2 (-1)_1] \\ \mathcal{U}'_2 = & [0_1 (-1)_2 (-2)_1] \\ \mathcal{U}'_3 = & [0_1 1_1 2_1 (-2)_1] \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mathcal{V}'_1 = & [1_1 (-1)_2 2_1] \\ \mathcal{V}'_2 = & [(-1)_1 2_2 (-2)_1] \\ \mathcal{V}'_3 = & [1_1 (-1)_1 (-2)_2] \\ \mathcal{V}'_4 = & [1_2 2_2], \end{array}$$

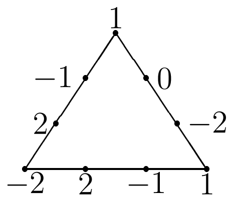
dabei sind alle Werte in den Symbolen modulo 5 zu lesen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun eine Transversale $\mathcal{T}_{3,5}$ angeben.

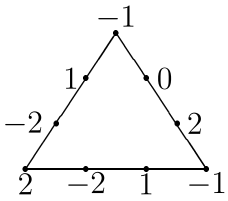
PROPOSITION 4.2 *Eine Transversale* $\mathcal{T}_{3,5}$ *für die* Γ*–Orbits von* $\widetilde{\mathcal{L}}_3\langle mod\ 5\rangle$ *wird gegeben durch die folgenden 24 Elemente*



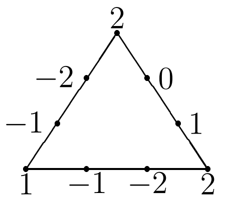
$\varphi_{3,5}^{(0.1)}$ $\varphi_{3,5}^{(0.2)}$ $\varphi_{3,5}^{(0.3)}$ $\varphi_{3,5}^{(0.4)}$



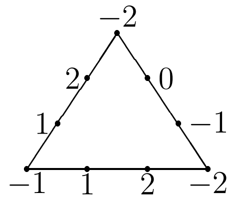
$\varphi_{3,5}^{(0.5)}$



$\varphi_{3,5}^{(0.6)}$

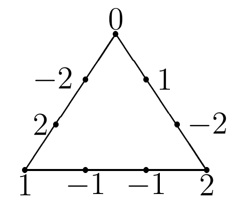


$\varphi_{3,5}^{(0.7)}$

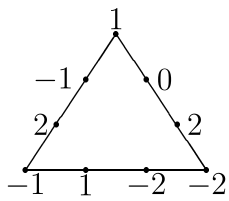


$\varphi_{3,5}^{(0.8)}$

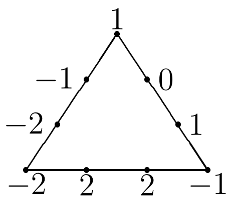
* * *



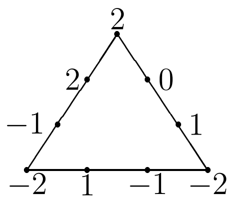
$\varphi_{3,5}^{(1.1)}$



$\varphi_{3,5}^{(1.2)}$

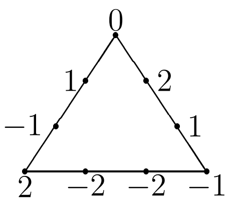


$\varphi_{3,5}^{(1.3)}$

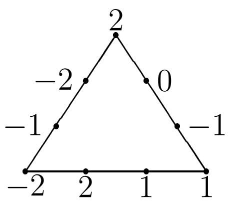


$\varphi_{3,5}^{(1.4)}$

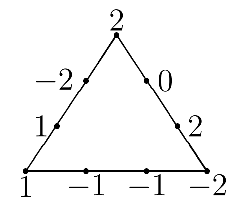
* * *



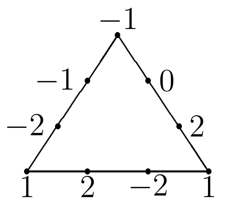
$\varphi_{3,5}^{(2.1)}$



$\varphi_{3,5}^{(2.2)}$

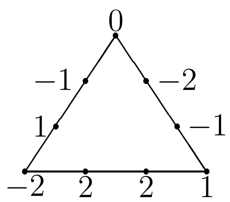


$\varphi_{3,5}^{(2.3)}$

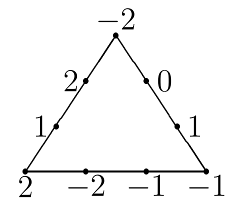


$\varphi_{3,5}^{(2.4)}$

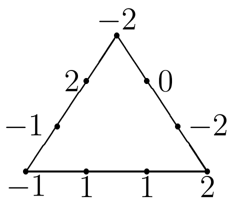
* * *



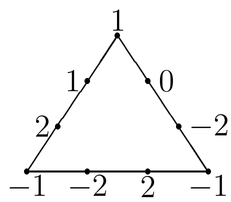
$\varphi_{3,5}^{(3.1)}$



$\varphi_{3,5}^{(3.2)}$

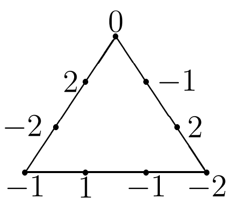


$\varphi_{3,5}^{(3.3)}$

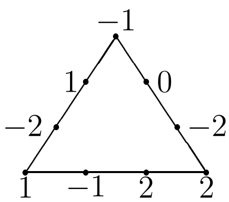


$\varphi_{3,5}^{(3.4)}$

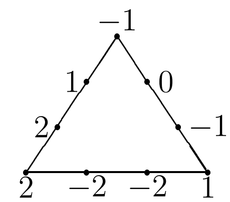
* * *



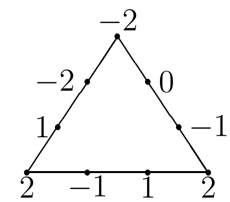
$\varphi_{3,5}^{(4.1)}$



$\varphi_{3,5}^{(4.2)}$



$\varphi_{3,5}^{(4.3)}$



$\varphi_{3,5}^{(4.4)}$

* * *

Dabei sind die Einträge auf $\triangle$ modulo 5 zu lesen.

Es gilt ferner

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi_{3,5}^{(0.u)} &= \overline{0},\ 1 \le u \le 8,\\ \Sigma\varphi_{3,5}^{(1.t)} &= \overline{1},\ 1 \le t \le 4,\\ \varphi_{3,5}^{(r.t)} = \overline{r}\cdot\varphi_{3,5}^{(1.t)}, &\quad \textit{also}\ \Sigma\varphi_{(3,5)}^{(r.t)} = \overline{r},\ 2 \le r \le 4,\ 1 \le t \le 4.\end{aligned}$$

Beweis: Analog zum Beweis von Prop. 3.2 setze man für $r = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(r)}\langle \text{mod } 5\rangle = \{\varphi_{3,5} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3\langle \text{mod } 5\rangle \mid \Sigma\varphi_{3,5} = \overline{r}\}.$$

$\mathcal{T}_{3,5}^{(r)}$ sei eine Transversale für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(r)}\langle\text{mod } 5\rangle$, so daß $\dot{\bigcup}_{r=0}^{4}\mathcal{T}_{3,5}^{(r)}$ eine (gesuchte) Transversale $\mathcal{T}_{3,5}$ ist. Ferner ist nach dem oben Bemerkten klar, daß man die Transversale $\mathcal{T}_{3,5}^{(r)}$, $r = 2, 3, 4$, aus der Transversalen $\mathcal{T}_{3,5}^{(1)}$ erhält, indem man die Elemente der letzteren Transversale mit $\overline{r}$ multipliziert. –

Zur Bestimung von $\mathcal{T}_{3,5}^{(0)}$ werden wir die PWV (= Pseudowerteverteilungen) $\widetilde{\mathcal{W}}$ mit Faktoren aus den Mengen

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}} := \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4\},\ \widetilde{\widetilde{\mathcal{V}}} := \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3\}$$

testen, ob sie WV (= Werteverteilungen) sind; in diesem Falle sind sie auch glatt und liefern Elemente aus $\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(0)}\langle\text{mod } 5\rangle$. Jede WV dieser Art muß sowohl Faktoren aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}$ als auch aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{V}}}$ enthalten, da sonst $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(0) = 0$ oder $\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(0) = 3$ wäre, Widerspruch zu Prop. 4.1, i).

Zunächst schließen wir PSW als WV aus wie folgt:

1. $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_2^2$, $j = 1, \ldots, 4$, sind keine WV. Denn für $k = 1$ ist $\mu(\overline{1}) = 6$, für $k = 2$ ist $\mu(-\overline{1}) = 6$, für $k = 3$ ist $\mu(\overline{1}) = 5$ und für $k = 4$ ist $\mu(-\overline{1}) = 5$. Wende nun Prop. 4.1, ii) an.

2. $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_3^2$ sind keine WV. Denn für $k = 1$ ist $\mu(-\overline{2}) = 5$, für $k = 2$ ist $\mu(\overline{2}) = 5$, für $k = 3$ ist $\mu(\overline{2}) = 6$, für $k = 4$ ist $\mu(-\overline{2}) = 6$. Wende Prop. 4.1, ii) an.

3. $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ sind keine WV. Denn für $k = 1$ ist $\mu(-\overline{2}) = 5$, für $k = 2$ ist $\mu(-\overline{1}) = 5$, für $k = 3$ ist $\mu(-\overline{2}) = 1$, für $k = 4$ ist $\mu(\overline{2}) = 1$. Wende Prop. 4.1, ii) an.

4. $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_1\mathcal{V}_3$ sind keine WV. Denn es gilt

$$\mathcal{U}_k\mathcal{V}_1\mathcal{V}_3 = (\pm\overline{2}\mathcal{U}_1)(\pm\overline{2}\mathcal{V}_1)(\pm\overline{2}\mathcal{V}_2),\ k = 3, 4$$

und

$$\mathcal{U}_k\mathcal{V}_1\mathcal{V}_3 = (\mp\overline{2}\mathcal{U}_3)(\mp\overline{2}\mathcal{V}_1)(\mp\overline{2}\mathcal{V}_2),\ k = 1, 2.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Ziffer 3.

5. $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ sind keine WV. Denn für $k = 1$ ist $\mu(\overline{1}) = 4$, $\mu(-\overline{2}) = 3$. Wäre $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ so bildete $\varphi_{3,5}$ nach Prop. 4.1, ii) genau 2 Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{1}$ und einen

Eckpunkt auf $-\overline{2}$ ab. Dann wird aber die Werteverteilung von $\varphi_{3,5}$ auf keiner Seite von $\triangle$ durch $\mathcal{V}_3$ gegeben, Widerspruch!

Daher ist auch $\mathcal{U}_2\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3 = (-\mathcal{U}_1)(-\mathcal{V}_2)(-\mathcal{V}_3)$ keine WV. –

Für $k = 3$ ist $\mu(\overline{1}) = 3$, $\mu(\overline{2}) = 4$. Angenommen, es sei $\mathcal{U}_3\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3 = \widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5})$. Dann bildet nach Prop. 4.1, ii) $\varphi_{3,5}$ genau 2 Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{2}$ und einen Eckpunkt auf $\overline{1}$ ab. Dann wird aber auf keiner Seite von $\triangle$ die Werteverteilung von $\varphi_{3,5}$ durch $\mathcal{V}_2$ gegeben, Widerspruch!

Die einzigen Kandidaten für WV sind also von der Form

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \mathcal{W} = \mathcal{U}_k\mathcal{U}_l = \mathcal{V}_m, \\ &\text{b)}\quad \mathcal{W} = \mathcal{U}_k\mathcal{V}_1^2. \end{aligned}$$

Zu a): Sei zunächst $m = 1$. Wir schreiben

$$\mathcal{V}_1 = [v_1x_1y_1z_1], \quad \mathbb{F}_5^* = \{v, x, y, z\},$$

und setzen an

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_k\mathcal{U}_l\mathcal{V}_1$$

mit gesuchtem k, l und $\varphi_{3,5}$. Die WV von $\varphi_{3,5}$ auf der Seite s_2 von $\triangle$ sei durch $\mathcal{V}_1$ gegeben.

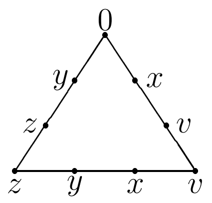


Fig. 6

Nach Gl (7) nimmt $\varphi_{3,5}$ (falls es existiert) auf den Seiten s_1, s_3 genau 2 von Null verschiedene Werte an, davon einen mit Multiplizität 1 und den anderen mit Multiplizität 2. Da $\varphi_{3,5}$ jeden von Null verschiedenen Wert genau 2–mal, und den Wert $\overline{0}$ genau einmal annimmt, muß die WV von $\varphi_{3,5}$ auf $\triangle$ wie in Fig. 6 angegeben sein (hier kann man noch x mit y vertauschen, was aber – wie sich zeigen wird – unerheblich ist). Wiederum kommen nach Gl (7) folgende Fälle in Frage:

$$\begin{aligned} &\text{a}_1)\quad v = \overline{1}, &&\text{dann notwendig}\quad x = -\overline{2}, y = \overline{2}, z = -\overline{1}. \\ &\text{a}_2)\quad v = -\overline{1}, &&\text{dann notwendig}\quad x = \overline{2}, y = -\overline{2}, z = \overline{1}. \\ &\text{a}_3)\quad v = \overline{2}, &&\text{dann notwendig}\quad x = \overline{1}, y = -\overline{1}, z = -\overline{2}. \\ &\text{a}_4)\quad v = -\overline{2}, &&\text{dann notwendig}\quad x = -\overline{1}, y = \overline{1}, z = \overline{2}. \end{aligned}$$

In der Tat werden dadurch die gesuchten Funktionen $\varphi_{3,5}$ mit den vorgegebenen Eigenschaften eindeutig definiert. In den Fällen a_1), a_2) erhält man, daß $\varphi_{3,5}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0.1)}$ ist; in den Fällen a$_3$), a$_4$) ist $\varphi_{3,5}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0.2)}$. (Es hat sich noch ergeben $k = 1, l = 2$.)

Ist nun die WV von $\varphi_{3,5}$ auf einer Seite $s \neq s_2$ durch $\mathcal{V}_1$ gegeben, dann wird die WV von $\sigma_2\varphi_{3,5}$ oder $\sigma_3\varphi_{3,5}$ auf s_2 durch $\mathcal{V}_1$ gegeben. Es folgt wieder, daß $\varphi_{3,5}$ existiert und entweder zu $\varphi_{3,5}^{(0.1)}$ oder $\varphi_{3,5}^{(0.2)}$ Γ–äquivalent ist.

Wir sind weiter im Fall a) und setzen nun $m = 2$, $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_k\mathcal{U}_l\mathcal{V}_2$ mit gesuchtem $\varphi_{3,5}$. Die WV von $\varphi_{3,5}$ auf der Seite s von $\triangle$ sei durch $\mathcal{V}_2$ gegeben. Dann bildet $\varphi_{3,5}$ den s gegenüberliegenden Eckpunkt auf $\overline{0}$ ab. Angenommen, $\varphi_{3,5}$ bildet beide Eckpunkte von s auf das gleiche Element $w = \pm\overline{1}$ ab. Im ersten Fall zeigt Gl (7), daß dann $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_3^2\mathcal{V}_2$, im zweiten Falle, daß $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_4^2\mathcal{V}_2$ ist. Dann nimmt aber $\varphi_{3,5}$ den Wert $+\overline{2}$, oder den Wert $-\overline{2}$ genau viermal an, Widerspruch. –

Wir wählen nun $s = s_2$, und $\varphi_{3,5}(4) = 1$, $\varphi_{3,5}(7) = -1$. Dann zeigt Gl (7), daß $\varphi_{3,5}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0.3)}$ ist.

Wählt man als s die Seiten s_1, s_3, dann sind die entsprechenden $\varphi_{3,5}$ wiederum Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0.3)}$. –

Sei nun $m = 3$, und $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_k\mathcal{U}_l\mathcal{V}_3$ mit gesuchtem $\varphi_{3,5}$. Angenommen $\varphi_{3,5}$ existiert. Dann ist

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\overline{2}\varphi_{3,5}) = (\overline{2}\mathcal{U}_k)(\overline{2}\mathcal{U}_l)(\overline{2}\mathcal{V}_3) = (\overline{2}\mathcal{U}_k)(\overline{2}\mathcal{U}_l)\mathcal{V}_2.$$

Nach dem Fall $m = 2$ folgt nun

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\overline{2}\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_3\mathcal{U}_4\mathcal{V}_2.$$

Es folgt, daß $\overline{2}\varphi_{3,5}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0.3)}$ und daher $\varphi_{3,5}$ Γ–äquivalent zu $-\overline{2}\varphi_{3,5}^{(0.3)} = \varphi_{3,5}^{(0.4)}$ ist. Damit ist der Fall a) abgeschlossen. –

Zu b): In der Tat sind hier für alle k die $\mathcal{U}_k\mathcal{V}_1^2$ WV, was man so einsieht: Man setzt an

$$\widetilde{\mathcal{W}}\left(\varphi_{3,5}^{(k)}\right) = \mathcal{U}_k\mathcal{V}_1^2,\ k = 1, 2, 3, 4,$$

mit gesuchtem $\varphi_{3,5}^{(k)}$. Sei etwa die WV von $\varphi_{3,5}^{(k)}$ auf den Seiten s_1, s_2 von $\triangle$ durch $\mathcal{V}_1 = [v_1x_1y_1z_1]$ gegeben.

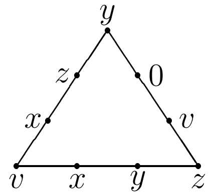


Fig. 7

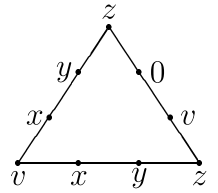


Fig. 8

Dann kann $\varphi_{3,5}^{(k)}$ nicht alle Eckpunkte von $\triangle$, wie in Fig. 7 beschrieben, auf (paarweise) verschiedene Elemente von $\mathbb{F}_5$ abbilden. Denn dann wäre die Wertesumme von $\varphi_{3,5}^{(k)}$ auf der Seite s_3

$$v + y + z = \overline{0} = \sum_{w \in \mathbb{F}_5^*} w,$$

also $x \neq 0$, Widerspruch. Also ist die WV von $\varphi_{3,5}^{(k)}$ auf $\triangle$ wie durch Fig. 8 beschrieben gegeben. Wieder zeigt Gl (7), daß nun folgende Fälle auftreten können: Für

$$\begin{aligned}
k = 1 : z = \overline{1},\ v = -\overline{2}, &\quad \{x, y\} = \{-\overline{1}, \overline{2}\} \\
k = 2 : z = -\overline{1},\ v = \overline{2}, &\quad \{x, y\} = \{\overline{1}, -\overline{2}\} \\
k = 3 : z = \overline{2},\ v = \overline{1}, &\quad \{x, y\} = \{-\overline{1}, -\overline{2}\} \\
k = 4 : z = -\overline{2},\ v = -\overline{1}, &\quad \{x, y\} = \{\overline{1}, \overline{2}\}.
\end{aligned}$$

In der Tat sind die $\varphi_{3,5}^{(k)}$ dadurch eindeutig definiert, leisten das Verlangte, und es folgt, daß $\varphi_{3,5}^{(k)}$ Γ–äquivalent zu $\varphi_{3,5}^{(0,4+k)}$ ist (daß die letzteren Elemente paarweise nicht Γ–äquivalent sind, ist evident).

Damit haben wir eine Transversale $\mathcal{T}_{3,5}^{(0)}$ bestimmt. –

Nun zur Bestimmung einer Transversale $\mathcal{T}_{3,5}^{(1)}$:
Jedes $\varphi_{3,5} \in \widetilde{\mathcal{L}}_3\langle\text{mod } 5\rangle$ hat eine Werteverteilung $\widetilde{\mathcal{W}}'(\varphi_{3,5})$, bei der sowohl Faktoren aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}' =: \{\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \mathcal{U}'_3\}$ als auch aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{V}}}' := \{\mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2, \mathcal{V}'_3, \mathcal{V}'_4\}$ vorkommen. Wir untersuchen daher PWV $\widetilde{\mathcal{W}}'$ mit Faktoren aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}'$ *und* gleichzeitig aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{V}}}'$ darauf, ob sie WV sind, um eine Transversale $\mathcal{T}_{3,5}^{(1)}$ zu konstruieren.

LEMMA *Die einzigen Kandidaten für Werteverteilungen unter den Pseudowerteverteilungen $\widetilde{\mathcal{W}}$ mit Faktoren sowohl aus $\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}'$ als auch $\widetilde{\widetilde{\mathcal{V}}}'$ sind*

$$\mathcal{U}_3'^2\mathcal{V}'_1,\ \mathcal{U}'_3\mathcal{V}'_1\mathcal{V}'_3,\ \mathcal{U}'_1\mathcal{V}'_2\mathcal{V}'_3,\ \mathcal{U}'_3\mathcal{V}'_2\mathcal{V}'_3.$$

Beweis: Nach Prop. 4.1 müssen für WV (= Werteverteilungen) $\widetilde{\mathcal{W}}$ insbesondere die Ungleichungen

$$(*)\ldots \qquad 2 \leq \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(w) = \mu\,(w) \leq 4,\ w \in \mathbb{F}_5,\ w \neq 0$$

gelten. Im ersten Beweisschritt bestimmen diejenigen PWV, für die die Ungleichungen $(*)$ gelten. Wir überlassen die etwas langwierige, aber elementare Verifikation dem Leser, daß das genau die folgenden PWV sind:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{U}_1'^2\mathcal{V}_k', & \text{für alle } k,\ 1 \le k \le 4,\\
\mathcal{U}_2'^2\mathcal{V}_k', & \text{für } k = 1,2,3,\\
\mathcal{U}_3'^2\mathcal{V}_k', & \text{für } k = 2,3,4,\\
\mathcal{U}_1'\mathcal{U}_2'\mathcal{V}_k', & \text{für } k = 1,3,\\
\mathcal{U}_2'\mathcal{U}_3'\mathcal{V}_k', & \text{für } k = 2,3,\\
\mathcal{V}_1'^2\mathcal{U}_l', & \text{für alle } l,\ 1 \le l \le 3,\\
\mathcal{V}_2'^2\mathcal{U}_l', & \text{für } l = 2,3,\\
\mathcal{V}_k'^2\mathcal{U}_l', & \text{für alle Paare } k,l \text{ mit } k = 3,4, \text{ und } 1 \le l \le 3,\\
\mathcal{V}_1'\mathcal{V}_2'\mathcal{U}_2', & \\
\mathcal{V}_1'\mathcal{V}_3'\mathcal{U}_l', & \text{für } l = 1,2,\\
\mathcal{V}_1'\mathcal{V}_4'\mathcal{U}_l', & \text{für alle } l,\ 1 \le l \le 3,\\
\mathcal{V}_2'\mathcal{V}_3'\mathcal{U}_2', & \\
\mathcal{V}_1'\mathcal{V}_4'\mathcal{U}_l', & \text{für alle } l,\ 1 \le l \le 3,\\
\mathcal{V}_2'\mathcal{V}_3'\mathcal{U}_2', & \\
\mathcal{V}_2'\mathcal{V}_4'\mathcal{U}_l', & \text{für } l = 1,3,\\
\mathcal{V}_3'\mathcal{V}_4'\mathcal{U}_l', & \text{für } l = 1,3.
\end{array}$$

Z.B. gilt für $\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{U}_2'\mathcal{U}_3'\mathcal{V}_3' : \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}}(\overline{2}) = 1.$ –

Für die nicht soeben angeführten PWV sind also stets die Ungleichungen $(*)$ erfüllt. Im zweiten Beweisschritt zeigt man, daß diese mit Ausnahme der im Lemma aufgezählten (trotzdem) keine WV sind. Dabei verwendet man die folgenden Schlußweisen, die nun an Beispielen erläutert werden:

Für die erste Schlußweise sei $\widetilde{\mathcal{W}}' = \mathcal{V}_2'\mathcal{V}'{}_4\mathcal{U}_2'$. Dann gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = 3,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = 4,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 3.$$

Angenommen, es sei $\widetilde{\mathcal{W}}' = \widetilde{\mathcal{W}}'(\varphi_{3,5})$. Dann muß nach Prop. 4.1, ii), $\varphi_{3,5}$ 2 Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{2}$ und einen auf $-\overline{1}$ *und* einen weiteren auf $-\overline{2}$ abbilden. Das ist unmög–lich. –

Die zweite Schlußweise erläutern wir an zwei Beispielen. Sei zunächst $\widetilde{\mathcal{W}}' = \mathcal{U}_1'\mathcal{U}_2'\mathcal{V}_2'$. Hier gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = 4.$$

Angenommen, es sei $\widetilde{\mathcal{W}}' = \widetilde{\mathcal{W}}'(\varphi_{3,5})$. Dann bildet $\varphi_{3,5}$ nach Prop. 4.1, i) etwa den Eckpunkt e von $\triangle$ auf $\overline{0}$ ab, und die anderen Eckpunkte nach Prop. 4.1, ii) auf $-\overline{1}$. Sei s die Seite, deren Eckpunkte auf $-\overline{1}$ abgebildet werden; diese liegt e gegenüber. Die

Werteverteilung von $\varphi_{3,5}$ auf s wird daher durch $\mathcal{V}_2'$ gegeben. Aber in $\mathcal{V}'$ tritt $-\overline{1}$ mit der Multiplizität 1 auf, Widerspruch.

Als zweites Beispiel wählen wir $\widetilde{\mathcal{W}}' = \mathcal{U}_2'\mathcal{U}_3'\mathcal{V}_1'$. Hier ist

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = 4.$$

Angenommen, es sei $\widetilde{\mathcal{W}}' = \widetilde{\mathcal{W}}'(\varphi_{3,5})$. Dann bildet nach Prop. 4.1 $\varphi_{3.5}$ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf $\overline{0}$ und die beiden anderen Eckpunkte auf $-\overline{1}$ ab. Seien s, s' die Seiten, deren Eckpunkte auf $\{\overline{0}, -\overline{1}\}$ abgebildet werden. Auf einer dieser Seiten muß die WV von $\varphi_{3,5}$ durch $\mathcal{U}_3'$ gegeben sein. Aber -1 tritt mit Multiplizität Null in $\mathcal{U}_3'$ auf, Widerspruch.

Wir überlassen es dem (geduldigen) Leser nachzuprüfen, daß man mit diesen beiden Schlußweisen im zweiten Beweisschritt auskommt. Damit ist das Lemma bewiesen. –

In der Tat sind die im LEMMA genannten PWV sogar WV:
Sei also $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_3'\mathcal{V}_1'$ mit gesuchten $\varphi_{3,5}$. Es gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = 3,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 2.$$

Nach Prop. 4.1 bilden daher die $\varphi_{3,5}$ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ ab. In der Tat sieht man sofort, daß dadurch die $\varphi_{3,5}$ definierbar sind und alle im Γ–Orbit von $\varphi_{3,5}^{(1.1)}$ liegen.

Sei nun $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_3'\mathcal{V}_1'\mathcal{V}_3'$. Es gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 1,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 3,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = 2.$$

Nach Prop. 4.1 müssen daher die $\varphi_{(3,5)}$ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\{\overline{1}, -\overline{1}, -\overline{2}\}$ abbilden. Dann müssen (wie Gl (8) zeigt), die Werteverteilungen der $\varphi_{3,5}$ auf derjenigen Seite, deren Eckpunkte auf $\{-\overline{1}, -\overline{2}\}$ abgebildet werden, durch $\mathcal{V}_3'$ gegeben sein; die Werteverteilungen der $\varphi_{3,5}$ auf derjenigen Seite, deren Eckpunkte auf $\{-\overline{1}, -\overline{1}\}$ abgebildet werden, durch $\mathcal{V}_1'$ gegeben sein und die Werteverteilungen der $\varphi_{3,5}$ auf der dritten Seite durch $\mathcal{U}_3'$ gegeben sein. In der Tat sind die $\varphi_{3,5}$ dadurch definierbar und liegen alle im Γ–Orbit von $\varphi_{3,5}^{(1.2)}$.

Sei nun $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_1'\mathcal{V}_2'\mathcal{V}_3'$ mit gesuchten $\varphi_{3,5}$. Hier gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 1,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 3,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 2.$$

Die $\varphi_{3,5}$ bilden also die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\{\overline{1}, -\overline{1}, -\overline{2}\}$ ab. Die Werteverteilungen der $\varphi_{3,5}$ auf derjenigen Seite, deren Eckpunkte auf $\{\overline{1}, -\overline{2}\}$ abgebildet werden, müssen durch $\mathcal{V}_3'$ gegeben sein, die Werteverteilungen auf den anderen Seiten durch $\mathcal{U}_1', \mathcal{V}_2'$ gegeben sein. In der Tat sind nun die $\varphi_{3,5}$ definierbar und liegen im Γ–Orbit von $\varphi_{3,5}^{(1.3)}$.

Sei nun $\widetilde{\mathcal{W}}(\varphi_{3,5}) = \mathcal{U}_3'\mathcal{V}_2'\mathcal{V}_3'$ mit gesuchten $\varphi_{3,5}$. Hier gilt

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{0}) = 1,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{1}) = \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{1}) = 2,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(\overline{2}) = 3,\ \mu_{\widetilde{\mathcal{W}}'}(-\overline{2}) = 4.$$

Die $\varphi_{3,5}$ müssen also die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\{\overline{2}, -\overline{2}\}$ abbilden. Die Werteverteilungen der $\varphi_{3,5}$ auf der Seite, deren Eckpunkte auf $-\overline{2}$ abgebildet werden, müssen (nach Gl (8)) durch $\mathcal{V}_3'$, die Werteverteilungen auf den Seiten, deren Eckpunkte auf $\{\overline{2}, -\overline{2}\}$ abgebildet werden, durch $\mathcal{V}_2', \mathcal{U}_3'$ gegeben sein. In der Tat sind die $\varphi_{3,5}$ dadurch definierbar und alle im Γ–Orbit von $\varphi_{3,5}^{(1.4)}$. –

Damit ist gezeigt, daß

$$\mathcal{T}_{3,5}^{(1)} = \left\{ \varphi_{3,5}^{(1.t)} \mid 1 \leq t \leq 4 \right\}$$

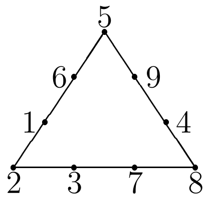
eine Transversale für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(1)}\langle \text{mod } 5 \rangle$ ist. Nach dem zu Beginn des Beweises Bemerkten sind dann

$$\mathcal{T}_{3,5}^{(r)} = \left\{ \overline{r} \cdot \varphi_{3,5}^{(1.t)} \mid 1 \leq t \leq 4,\ 2 \leq r \leq 4 \right\}$$

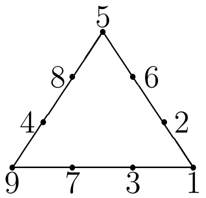
Transversalen für die Γ–Orbits von $\widetilde{\mathcal{L}}_3^{(r)}\langle \text{mod } 5 \rangle,\ 2 \leq r \leq 4$. Damit ist die Proposition bewiesen.

5. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir nun mit dem im Abschnitt **2.** dargelegten Verfahren die folgenden Sätze:

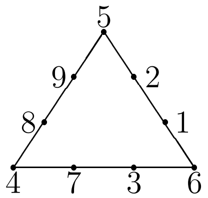
Satz 3.1 *Die Γ–Menge $\mathcal{D}_3$ hat drei Orbits; eine Transversale $\mathcal{T}_3$ für die Orbits ist $\{\varphi_{3;1}, \varphi_{3;2}, \varphi_{3;3}\}$ mit*



$\varphi_{3;1}$



$\varphi_{3;2}$



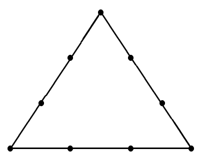
$\varphi_{3;3}$

Es gilt für $k = 1, 2, 3$

$$\Sigma^3 \varphi_{3;k} \equiv \begin{cases} 0 \mod 2 \\ -1 \mod 3 \\ 0 \mod 5. - \end{cases}$$

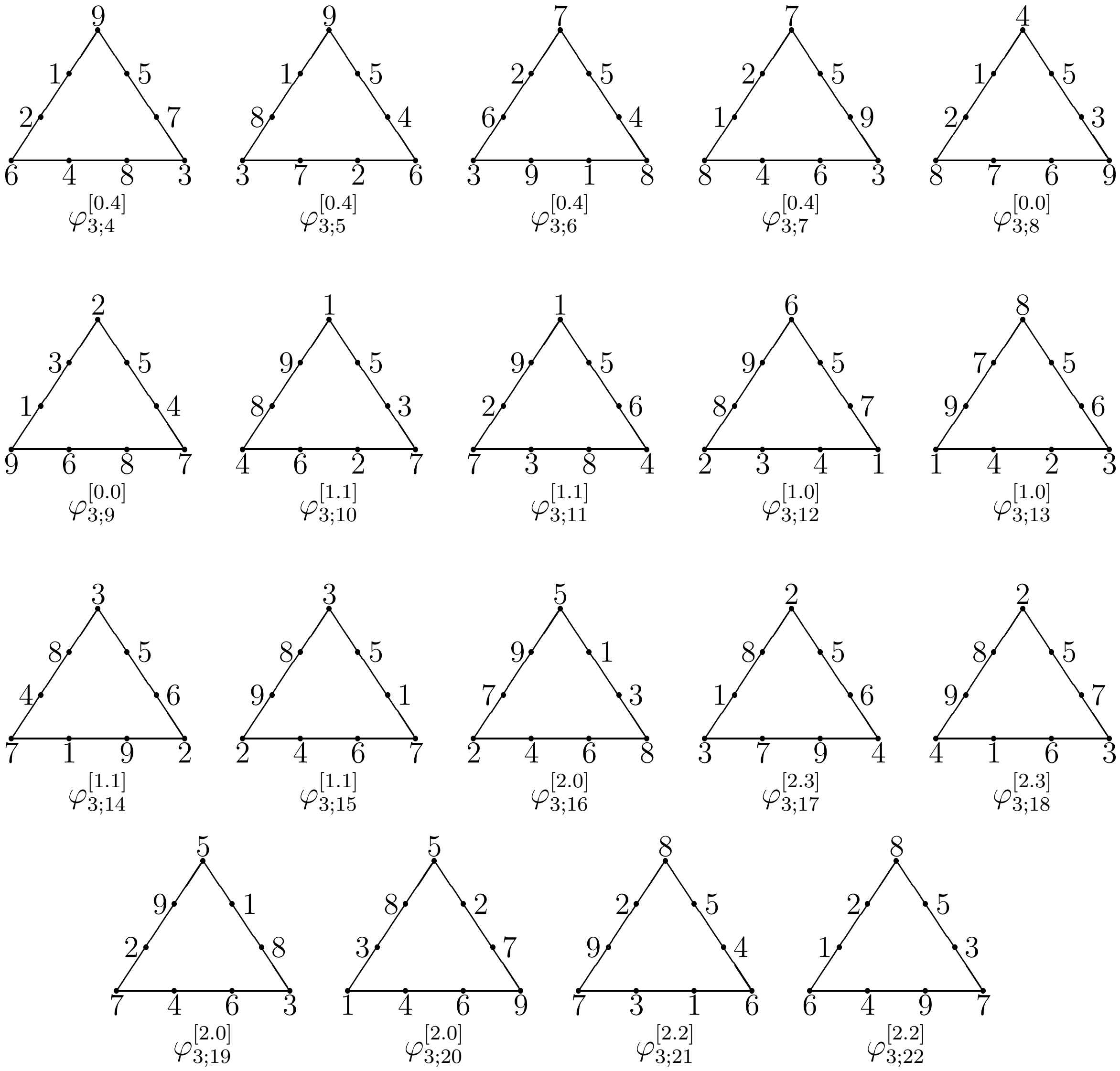
Im Anschluß an Satz 2 hatten wir bereits festgestellt daß $\varphi_{3;1} = \varphi_{2;2}$ auch in $\mathcal{D}_2$ liegt. – Es folgt weiter, daß $\mathcal{L}_3$ leer ist: Ersetzt man in der Formulierung der „Logelei" die Quadrate durch Kuben, so ist die neue Logelei nicht lösbar, mit anderen Worten:

> Es ist nicht möglich, die ersten neun natürlichen Zahlen so auf die neun Punkte des Dreiecks



zu verteilen, daß die Summe der Kuben dieser Zahlen längs jeder Dreiecksseite gelesen den gleichen Wert ergibt.

Satz 3.2 *Die Γ–Menge $\mathcal{D}_3'$ hat zweiundzwanzig Orbits. Eine Transversale $\mathcal{T}_3'$ für die Orbits besteht aus den oben angegebenen Elementen $\varphi_{3;k}$, $k = 1, 2, 3$ und den*



Dabei gilt für $4 \leq k \leq 20$

$$\Sigma^3 \varphi_{3;k}^{[l.m]} \equiv \begin{cases} l & \bmod 3, \\ m & \bmod 5. \end{cases}$$

Wir beweisen die Sätze 3.1 und 3.2 gleichzeitig. Nach Abschnitt 2. haben wir zunächst die Menge $\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}_3'$ der kompatiblen Tupel $t' = \left(\varphi_{3,3}''\varphi_{3,5}'''\right)$ in $\widetilde{\mathcal{T}}_3'$ zu bestimmen, wobei $\varphi_{3,3}'', \varphi_{3,5}'''$ Elemente der in Prop. 4.1, 4.2 bestimmten Transversalen sind. Um zu entscheiden, ob

t' kompatibel ist, versucht man also eine Funktion $\varphi \in S_N$ so anzugeben, daß (siehe Abschnitt **2.**)

$$(*)\ldots \qquad \psi'(\varphi) = \left(\gamma_2\, \varphi''_{3,3}, \gamma_3\, \varphi'''_{3,5}\right)\,;\ \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma,$$

ist. Hier kann eins der γ_2, γ_3 beliebig vorgeben; wir wählen stets $\gamma_3 = e$ (= Einselement von Γ – es sei denn $\varphi^{(2)}_{3,3} = \varphi^{(r.3)}_{3,5}$, $r = 0, 1, 2$. In diesen Fällen ist, wie wir gleich sehen werden $\mathcal{M}\,(t')$ leer.) Angenommen, φ existiert, also $\mathcal{M}\,(t') \neq \emptyset$. Dann konstruiert man gleichzeitig eine Transversale $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')}$ für die Γ–Orbits von $\mathcal{M}\,(t')$. Es wird sich herausstellen, daß eine solche Transversale höchstens zwei Elemente besitzt.

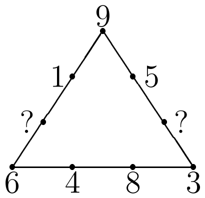
1. Alle Tupel $t' \in \widetilde{\mathcal{T}}'_3$ mit erster Komponente $\varphi^{(r.3)}_{3,3}$, $r = 0, 1, 2$, sind nicht kompatibel. Denn angenommen, $\mathcal{M}\,(t') \neq \emptyset$, $\varphi \in \mathcal{M}\,(t')$. Wir setzen in Gl $(*)$ $\gamma_2 = e$. Dann folgt für $r = 0$ und $k \in \{3, 6, 9\}$

$$\begin{aligned} \Sigma^3_1\, \varphi &= 1^3 + 4^3 + 7^3 + k^3 &&\equiv -2 + k^3 \bmod 5, \\ \Sigma^3_3\, \varphi &= 2^3 + 5^3 + 8^3 + k^3 &&\equiv k^3 \bmod 5, \end{aligned}$$

also $\Sigma^3_1\varphi \not\equiv \Sigma^3_3\varphi \bmod 5$, Widerspruch zur Regel (R) (siehe Abschnitt **2.**). Analog schließt man in den Fällen $r = 1, 2$.

2. Wir bestimmen nun alle $t' = \left(\varphi^{(0.1)}_{3,3}, \varphi'''_{3,5}\right) \in \mathcal{K}\widetilde{\mathcal{T}}'_3$. Angenommen, es sei $\mathcal{M}\,(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}\,(t')$. Aus $\varphi_{3,3} = \gamma_2 \cdot \varphi^{(0.1)}_{3,3}$ folgt, daß φ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $3, 6, 9$ abbilden muß, deren Kuben kongruent zu $2, 1, -1$ modulo 5 sind. Aus $\varphi_{3,5} = \varphi'''_{3,5}$ folgt, daß $\varphi'''_{3,5}$ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{2}, \overline{1}, -\overline{1}$ (Überqueren bedeutet Restklassenbildung mod 5) abbilden muß. Nach Prop. 4.2 leisten das nur $\varphi'''_{3,5} = \varphi^{(4.2)}_{3,5}$ oder $\varphi'''_{3,5} = \varphi^{(4.3)}_{3,5}$. Im ersten Fall gilt nach Tabelle T_3

$\varphi =$



wobei die Werte von φ auf den Fragezeichen 2 oder 7 sind. Da nach der Regel (R) gelten muß $\Sigma^3_1\varphi \equiv \Sigma^3_3\varphi \equiv 0 \bmod 3$, folgt $\varphi\,(3) = 2$, $\varphi\,(8) = 7$. In der Tat liegt φ in $\mathcal{D}'_3 \backslash \mathcal{D}_3$; es ist $\varphi = \varphi^{[0.4]}_{3;4}$. Gleichzeitig folgt, daß $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{\varphi^{[0.4]}_{3,4}\right\}$ ist. – Im zweiten Falle erhält man nach Tabelle T_3 sofort $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{\varphi^{[0.4]}_{3;5}\right\}$. —

3. Die Bestimmung des kompatiblen Tupel $t' = \left(\varphi^{(0.2)}_{3,3},\ \varphi'''_{3,5}\right), \varphi'''_{3,5} \in \mathcal{T}_{3,5}$ ist etwas aufwendiger. Angenommen, es sei $\mathcal{M}\,(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}\,(t')$. Aus der ersten Komponente von t' liest man ab, daß φ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf $k \in \{3, 6, 9\}$ und je einen inneren Punkt der mit diesem Eckpunkt inzidenten Seiten von $\triangle$ auf $\{3, 6, 9\} \backslash \{k\}$ abbilden

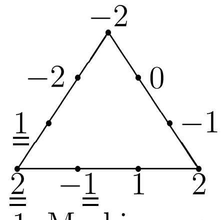
muß. Da die Kuben von $3, 6, 9$ kongruent $2, +1, -1$ modulo 5 sind, kommen als „$\mathcal{K}$–Kandidaten“ (Kompatibilitäts–Kandidaten) aus $\mathcal{T}_{3,5}$ bezüglich $\varphi_{3,3}^{(0.2)}$ nur diejenigen in Frage, die einen Eckpunkt e von $\triangle$ auf $\kappa \in \{+\overline{1}, -\overline{1}, \overline{2}\}$ und (mindestens) einen inneren Punkt der mit e inzidenten Seiten s_e, s'_e auf Elemente aus $\{+\overline{1}, -\overline{1}, \overline{2}\}\backslash\{\kappa\}$ abbilden, wobei die Werte auf diesen inneren Punkten der Seiten s_e, s'_e verschieden sein müssen. Ein solcher $\mathcal{K}$–Kandidat bestimmt nun φ bereits auf N mit Ausnahme der j_1, j_2, die durch $\varphi'''_{3,5}$ auf $-\overline{2}$ abgebildet werden. Ist diese „eingeschränkte“ Abbildung φ bereits auf einer Seite von $\triangle$ definiert und verletzt φ die Regel (R), dann scheidet $\varphi'''_{3,5}$ als $\mathcal{K}$–Kandidat aus. Das gleiche ist der Fall, wenn beide Fortsetzungen von φ in die Punkte j_1, j_2 hinein, wo φ die Werte 2,7 annehmen muß, die Regel (R) verletzen. Erfüllt (mindestens) eine dieser Fortsetzungen die Regel (R), so liefert der $\mathcal{K}$–Kandidat ein kompatibles Tupel, und man kann $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')}$ ausrechnen. Nennen wir ein Tripel (e, s_e, s'_e) ein ausgezeichnetes Tripel, so kommt es vor, daß ein $\mathcal{K}$–Kandidat zwei ausgezeichnete Tripel zuläßt (mit notwendig verschiedenen Eckpunkten). Solche $\mathcal{K}$–Kandidaten werden wir im folgenden durch ein (eingeklammertes) d bezeichnen. – Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) $\kappa = \overline{2}$.

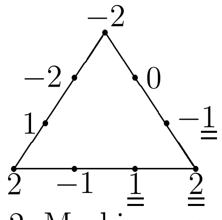
Hier haben wir nach Prop. 4.2 folgende Kandidaten (um Schreibarbeit zu ersparen, geben wir von den $\varphi'''_{3,5}$ nur die „oberen“ Indizes an)

$$(0.2), (0.7)(d),\ (1.1), (1.4), (3.2), (4.4)(d).$$

Nach dem oben beschriebenen Ausschlußverfahren scheiden bis auf den letzten alle Kandidaten aus. Zur besseren Übersicht markieren wir noch einmal die ausgezeichneten Eckpunkte und die entsprechenden inneren Punke auf den mit dem Eckpunkt inzidenten Seiten durch doppeltes Unterstreichen

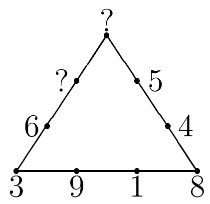


1. Markierung



2. Markierung

Für die erste Markierung erhält man mit Tabelle T_3, daß φ bis auf die mit ? markierten Punkte von $\triangle$ gegeben ist durch



Nach Regel (R) muß φ (falls es existiert) die Bedingungen

$$\Sigma_1^3 \varphi \equiv \Sigma_3^3 \varphi \equiv 0(3)$$

erfüllen. Das liefert $\varphi\,(1) = 7,\ \varphi\,(2) = 2$.

In der Tat ist φ zu t' assoziiert; $\varphi = \varphi_{3,6}^{[0.4]}$. Wir überlassen es dem Leser nachzuprüfen, daß im Falle der zweiten Markierung man $\varphi = \varphi_{3,7}^{[0.4]}$ erhält. Gleichzeitig folgt

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3,6}^{[0.4]}, \varphi_{3,7}^{[0.4]} \right\}.$$

b) $\kappa = \overline{1}$.

Nur diejenigen $\varphi'''_{3,5} \in \mathcal{T}_{3,5}$ mit oberem Index

$$(0.3), (1.1), (1.2), (2.2), (3.1)$$

sind nach Prop. 4.2 $\mathcal{K}$-Kandidaten; jedoch liefert keiner zusammen mit $\varphi_{3,3}^{(0.2)}$ ein kompatibles Tupel.

c) $\kappa = -\overline{1}$.

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen $\varphi'''_{3,5}$ mit oberem Index

$$(0.6)(d),\ (0.8),\ (1.2), (1.3), (3.3), (3.4), (4.1).$$

Mit Hilfe des Ausschlußverfahrens stellt man fest, daß höchstens die ersten beiden (zusammen mit $\varphi_{3,3}^{(0.2)}$) kompatible Tupel bilden.

Für den ersten Kandidaten ergibt das Berechnungsverfahren, daß für beide Markierungen zu $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(0.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.6)}\right)$ assoziierte $\varphi, \varphi' \in S_N$ existieren; diese sind aber Γ–äquivalent. Es folgt

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;8}^{[0.0]} \right\}.$$

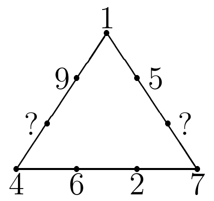
Für den zweiten Kandidaten erhält man mit $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(0.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.8)}\right)$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;9}^{[0.0]} \right\}.$$

4. Die Bestimmung der kompatiblen Tupel $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.1)}, \varphi'''_{3,5}\right), \varphi'''_{3,5} \in \mathcal{T}_{3,5}$ erfordert nicht so viel Mühe. Denn angenommen, es sei $\mathcal{M}(t') \neq \emptyset,\ \varphi \in \mathcal{M}(t')$. Aus der ersten Komponente von t' liest man mit Tabelle T_3 ab, daß φ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $1, 4, 7$ abbildet, deren Kuben kongruent zu $1, -1, -2$ modulo 5 sind. Nur diejenigen $\varphi'''_{3,5}$ sind also $\mathcal{K}$–Kandidaten (wir benutzen hier den in 3. eingeführten Begriff des Kandidaten), die die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{1}, -\overline{1}, -\overline{2}$ abbilden. Nach Prop. 4.2 sind die $\varphi'''_{3,5}$ mit oberen Indizes

$$(1.2), (1.3)$$

die einzigen $\mathcal{K}$–Kandidaten. Sei also zunächst $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.1)}, \varphi_{3,5}^{(1.2)}\right)$. Angenommen, es sei $\mathcal{M}(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}(t')$. Aus $\varphi_{3,5} = \varphi_{3,5}^{(1.2)}$ folgt, daß φ bis auf die durch das ?–Zeichen markierten Punkte von $\triangle$ gegeben ist durch



In den Punkten 3 und 8 von N kann φ die beiden Werte $3, 8$ annehmen. Da nach der Regel (R) gelten muß $\Sigma_1^3\varphi \equiv \Sigma_3^3\varphi \equiv 1 \bmod 5$, folgt (falls φ überhaupt existiert) $\varphi(3) = 8,\ \varphi(8) = 3$.

In der Tat ist φ zu t' assoziiert, und man erhält

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{\varphi_{3;10}^{[1.1]}\right\}.$$

Im Falle $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.1)}\varphi_{3,5}^{(1.3)}\right)$ rechnet man sofort aus, daß

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{\varphi_{3;11}^{[1.1]}\right\}$$

ist. –

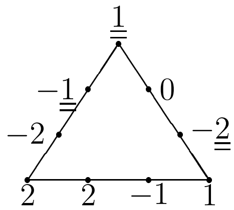
5. Die Bestimmung der kompatiblen Tupel $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.2)}, \varphi_{3,5}'''\right), \varphi_{3,5}''' \in \mathcal{T}_{3,5}$, erfolgt analog zu dem in 3. benutzten Verfahren: Angenommen, es sei $\mathcal{M}(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}(t')$. Aus der ersten Komponente von t' liest man ab, daß φ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf $k \in \{1, 4, 7\}$ und je einen inneren Punkt der mit diesem Eckpunkt inzidenten Seiten auf ein Element aus $\{1, 4, 7\}\backslash\{k\}$ abbilden muß. Da die Kuben von $1, 4, 7$ kongruent zu $1, -1, -2$ modulo 5 sind, kommen als $\mathcal{K}$–Kandidaten aus $\mathcal{T}_{3,5}$ nur diejenigen in Frage, die einen Eckpunkt e von $\triangle$ auf $\kappa \in \{\overline{1}, -\overline{1}, -\overline{2}\}$ und (mindestens) einen inneren Punkt der mit e inzidenten Seiten s_e, s_e' auf Elemente aus $\{\overline{1}, -\overline{1}, -\overline{2}\}\backslash\{\kappa\}$ abbilden, wobei die Werte auf diesen inneren Punkten der Seiten s_e, s_e' verschieden sein müssen. Ein solcher $\mathcal{K}$–Kandidat bestimmt nun bereits φ auf N mit Ausnahme derjenigen j_1, j_2, die durch $\varphi_{3,5}'''$ auf $\overline{2}$ abgebildet werden. Das $\mathcal{K}$–Kandidatenausschlußverfahren erfolgt nun auf sich selbst erklärende Weise analog zum Verfahren wie in 3., ebenso die Konstruktion von zu t assoziierten Funktionen. Der Zusatz (d) hinter Kandidaten ist analog wie in 3. definiert. Wir haben nun die folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) $\kappa = \overline{1}$.

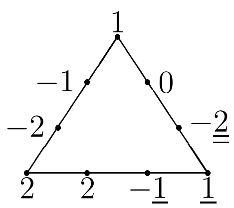
$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit den oberen Indizes

$$(0.5)(d),\ (0.7), (1.1), (2.3), (2.4), (4.2), (4.3).$$

Das Abschlußverfahren sondert alle bis auf die ersten beiden Kandidaten aus. –
Sei zunächst $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.5)}\right)$. Wir haben zwei Markierungen für $\varphi_{3,5}^{(0.5)}$



1. Markierung



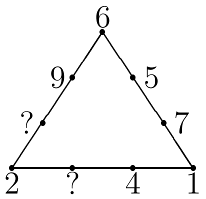
2. Markierung

Angenommen, $\varphi \in \mathcal{M}(t')$ sei durch die erste Markierung definiert. Dann gilt

$$\varphi(4) = \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}, \quad \varphi(5) = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}, \quad \varphi(6) = 9, \ \varphi(7) = 6;$$

also in jedem Falle $\Sigma_2^3 \varphi \equiv -1 \mod 3$, Widerspruch zur Regel (R) (es müßte $\Sigma_2^3 \varphi \equiv 1 \mod 3$ sein).

Angenommen, $\varphi \in \mathcal{M}(t')$ sei durch die zweite Markierung definiert. Dann ist φ bis auf die durch das ?–Zeichen markierten Punkte gegeben durch



wobei die Werte von φ in den Punkten 3 und 5 gleich 3 oder 8 sind. Da nach Regel (R) gelten muß $\Sigma_1^3 \varphi \equiv \Sigma_2^3 \varphi \equiv 1 \mod 3$, folgt $\varphi(3) = 8, \ \varphi(5) = 3$. Es folgt

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;12}^{[1.0]} \right\}. -$$

Sei nun $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(1.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.7)} \right)$ und $\varphi \in \mathcal{M}(t')$. Man erhält mit dem eingangs beschriebenen Konstruktionsverfahren analog zum gerade betrachteten Fall

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;13}^{[1.0]} \right\}. -$$

b) $\kappa = -\overline{1}$.

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit oberen Indizes

$$(0.3), (2.1), (3.2), (3.4), (4.1), (4.2).$$

Keiner dieser Kandidaten liefert ein kompatibles Tupel.

c) $\kappa = -\overline{2}$.

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit den oberen Indizes

$$(0.2), (0.8)(d), \ (1.4)(d), \ (2,2), (4.1), (4.4).$$

Nur der dritte Kandidat liefert ein kompatibles Tupel t'. Wir geben gleich das Ergebnis an:

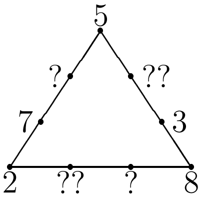
$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;14}^{[1.1]}, \varphi_{3;15}^{[1.1]} \right\}. -$$

6. Sei nun $t' = \left(\varphi_{3;3}^{(2.1)}, \varphi_{3,5}''' \right), \varphi_{3,5}''' \in \mathcal{T}_{3,5}$. Angenommen, es sei $\mathcal{M}(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}(t')$. Aus der ersten Komponente von t liest man zusammen mit Tabelle T_3 ab, daß φ die Eckpunkte von $\triangle$ auf $2, 5, 8$ abbilden muß, deren Kuben kongruent $-2, 0, 2$ modulo 5

sind. $\mathcal{K}$–Kandidaten sind daher nur diejenigen $\varphi'''_{3,5}$, die die Eckpunkte von $\triangle$ auf $\overline{0}, \overline{2}, -\overline{2}$ abbilden. Nach Prop. 4.2 sind diejenigen mit oberem Index

$$(0.2), (0.4)$$

die einzigen Kandidaten. Im ersten Fall sind die $\varphi \in \mathcal{M}(t')$ gegeben durch



wobei in den mit einem ? markierten Punkten φ die Werte 4,9 und in den mit ?? markierten Punkten φ die Werte 1,6 annehmen muß. Nach Regel (R) muß

$$\Sigma_1^3 \varphi \equiv \Sigma_3^3 \varphi \equiv 2 \bmod 3$$

sein. Das liefert $\varphi(2) = 9,\ \varphi(6) = 4$ und $\varphi(8) = 1,\ \varphi(5) = 6$. In der Tat ist nun auch $\Sigma_2^3 \equiv 2 \bmod 3$, und man erhält

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;16}^{[2.0]} \right\}. -$$

Im zweiten Fall $\left(\text{d.h. } \varphi'''_{3,5} = \varphi_{3,5}^{(0.4)}\right)$ erhält man sofort

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \{\varphi_{3;1}\}$$

(wir haben das erste Mal ein Element aus $\mathcal{D}_3$ gefunden). –

7. Nun die letzten Fälle $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(2.2)}, \varphi'''_{3,5}\right), \varphi'''_{3,5} \in \mathcal{T}_{3,5}$. Angenommen, es sei $\mathcal{M}(t') \neq \emptyset$ und $\varphi \in \mathcal{M}(t')$. Aus der ersten Komponente von t' liest man ab, daß φ einen Eckpunkt von $\triangle$ auf $k \in \{2, 5, 7\}$ und je einen inneren Punkt der mit diesem Eckpunkt inzidenten Seite auf $\{2, 5, 7\} \backslash \{k\}$ abbilden muß. Als $\mathcal{K}$–Kandidaten $\varphi'''_{3,5}$ kommen also nur diejenigen in Frage, die einen Eckpunkt e von $\triangle$ auf ein $\kappa \in \{\overline{0}, \overline{2}, -\overline{2}\}$ und (mindestens) einen inneren Punkt der mit e inzidenten Seite s_e, s'_e von $\triangle$ auf Werte aus $\{\overline{0}, \overline{2}, -\overline{2}\} \backslash \{\kappa\}$ abbilden; dabei müssen die Werte von $\varphi'''_{3,5}$ auf diesen inneren Punkten verschieden sein. Für einen solchen $\mathcal{K}$–Kandidaten $\varphi'''_{3,5}$ ist nun φ auf N mit Ausnahme derjenigen vier Elemente definiert, auf denen $\varphi'''_{3,5}$ die Werte $+\overline{1}$ oder $-\overline{1}$ annimmt. In diesen muß φ Werte aus $\{1, 6\}$ bzw. $\{4, 9\}$ annehmen. Mit Hilfe der Regel (R) schließt man nun entweder $\mathcal{K}$–Kandidaten aus oder konstruiert $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')}$. Der Zusatz (d) hinter einem Kandidaten ist analog zur entsprechenden Bezeichnung in 3. oder 5. definiert.

Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) $\kappa = -\overline{2}$.

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit den oberen Indizes

$$(0.8)(d),\ (3.2), (3.3).$$

Der erste Kandidat scheidet nach unserem Entscheidungsverfahren aus. Für den zweiten und dritten Kandidaten und die entsprechenden Tupel erhält man

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;17}^{[2.3]} \right\}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;18}^{[2.3]} \right\}.$$

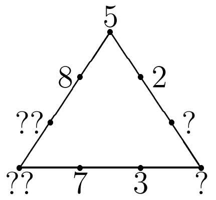
Wir dürfen die Rechnungen nun dem Leser überlassen.

b) $\kappa = \overline{0}$.

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind nach Prop. 4.2 diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit den oberen Indizes

$$(0.1), (0.2), (0.3), (1.1), (4.1).$$

In der Tat liefern nur die ersten drei Kandidaten kompatible Tupel. Sei zunächst $t = \left(\varphi_{3,3}^{(2.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.1)} \right)$. Dann werden die $\varphi \in \mathcal{M}(t')$ bis auf die „Ausnahmepunkte" von $\triangle$ gegeben durch



Die Werte von φ in den mit ? markierten Punkten sind aus $\{1, 6\}$, die in den mit ?? markierten Punkten aus $\{4, 9\}$. Die Regel (R) erfordert $\Sigma_2^3 \varphi \equiv 2 \mod 3$.

Das ergibt die beiden notwendigen Bedingungen $\varphi(4) = 9$, $\varphi(7) = 1$ oder $\varphi(4) = 4$, $\varphi(7) = 6$. In der Tat liefert die erste Bedingung $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \{\varphi_{3;2}\}$, die zweite Bedingung $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;3}^{[2.0]} \right\}$ (damit sind alle im Satz 3.1 angegebenen Elemente von $\mathcal{T}_3$ gefunden).

Sei nun $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(2.2)}, \varphi_{3;1}^{(0.2)} \right)$. Wir dürfen uns hier wieder kurz fassen und geben gleich das Ergebnis an:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;19}^{[2.0]} \right\}.$$

Im Falle $t' = \left(\varphi_{3,3}^{(2.2)}, \varphi_{3,5}^{(0.3)} \right)$ erhält man

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;20}^{[2.0]} \right\}. -$$

c) $\kappa = \overline{2}$

$\mathcal{K}$–Kandidaten sind diejenigen Elemente aus $\mathcal{T}_{3,5}$ mit den oberen Indizes

$$(0.7)(d),\ (2.2), (2.3).$$

In der Tat liefern nur die beiden letzten Kandidaten kompatible Tupel t; man erhält nacheinander

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;21}^{[2.2]} \right\},\ \mathcal{T}_{\mathcal{M}(t')} = \left\{ \varphi_{3;22}^{[2.2]} \right\}. -$$

Damit sind auch die Sätze 3.1 und 3.2 bewiesen.

LITERATUR

[Fi] Fischer, G.: *Lineare Algebra.* Braunschweig/Wiesbaden 1997 (vieweg studium)

[Hu] Huppert, B.: *Endliche Gruppen* I. Berline/Heidelberg/New York 1967 (Springer Grundlehren)

[Sch] Scheid, H.: *Zahlentheorie.* Mannheim/Wien/Zürich 1991 (B.I. Wissenschaftsverlag)