Herbsttagung 2014

Zahlentheorie

Freitag, 14. November, Hörsaal H1 (Geomatikum)

16:00	Begrüßung und Einführung	
16.15 – 17.15	Ulf Kühn	*Multiple Zeta Werte*
17:15 – 17:40	Kaffeepause	
17:40 – 18:40	Walter Borho	*Befreundete Zyklen*

ab ca. 19.30 Uhr Nachsitzung im HanseGourmet, Im Hafen-Klub, Bei den Landungsbrücken 3, 20359 Hamburg.
Für das Essen wird ein Unkostenbeitrag von EUR 35,00 erhoben.
Um Anmeldung bis 7. Nov. wird gebeten.

Samstag, 15. November 2014, Hörsaal H1 (Geomatikum)

10:00 – 11:00	Helmut Müller	*Ein Streifzug durch die Welt der Primzahlen*
11:00 – 11:30	Kaffeepause	
11:30 – 12:30	Holger Stephan	*Zahlentheorie und Geometrie*

Walter Borho
Bergische Universität Wuppertal

Befreundete Zyklen

Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler $t(n)$ ist, Beispiel 6 oder 28. Zwei verschiedene Zahlen,

$$n_1, n_2 = t(n_1)$$

heißen befreundet, wenn $t(n_2) = n_1$ ist. Das erste Beispiel, 220 und 284, geht auf Pythagoras zurück. Vollkommene Zahlen bzw. befreundete Zahlenpaare, seit dem Altertum eifrig studiert, sind befreundete 1-Zyklen bzw. 2-Zyklen im Sinne folgender Definition: k verschiedene Zahlen

$$n_1, n_2 = t(n_1), n_3 = t(n_2), \ldots, n_k = t(n_{k-1})$$

heißen ein befreundeter k- Zyklus, wenn $t(n_k) = n_1$ ist.
Für k = 1 bzw. 2 haben Euklid bzw. Thabit ibn Kurrah algebraische Formeln zur Suche nach befreundeten k- Zyklen angegeben. Für k = 3 und 4 habe ich solche Formeln 1969 veröffentlicht- in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft, Hamburg.
Für k = 4 ergab sich daraus der erste je entdeckte, befreundete 4- Zyklus, erzeugt von $n_1 = 28\,158\,165 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 83 \cdot 359$. Auf dieses Ergebnis meines ersten Studienjahres bin ich erst am Ende meiner akademischen Laufbahn wieder zurück gekommen.
Gemeinsam mit Karsten Blankenagel haben wir mit Hilfe dieser konstruktiven Methode 103 neue, befreundete Vierzyklen entdeckt und bereits fünfzig davon in der Zeitschrift Mathematics of Computation veröffentlicht. Danach scheint meine konstruktive algebraische Methode dem üblichen reinen Probieren (probiere die natürlichen Zahlen der Reihe nach durch, so weit du kommst) weit überlegen zu sein. Aber ein befreundeter Dreizyklus ist bisher noch nicht entdeckt worden, weder durch meine algebraische Formel, noch durch Probieren.

*****

Helmut Müller
Universität Hamburg

Ein Streifzug durch die Welt der Primzahlen

Primzahlen zählen trotz ihrer einfachen Definiton zu den widerspenstigsten und geheimnisvollsten Objekten, mit denen sich Mathematiker beschäftigen und das seit Jahrtausenden.
An Hand wohlbekannter und auch weniger bekannter Probleme (z.B. Primzahlzwillinge, Goldbach-Vermutungen, Faktorisierungsverfahren) soll unter Einbezug einiger Aufsehen erregender Fortschritte in den letzten Jahren versucht werden, etwas von der Faszination dieser ziemlich spröden Zahlen zu vermitteln.

Holger Stephan
Weierstraß - Institut Berlin

Zahlentheorie und Geometrie

Zahlentheorie und Geometrie sind zwei Teilgebiete der Mathematik, die auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun haben.
Ein typischer Gegenstand der Zahlentheorie sind diophantische Gleichungen, wie z.B. die berühmte Fermatsche Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

bei der nach ganzzahligen oder rationalen Lösungen gesucht wird. Während es im Fall $n > 2$ keine Lösungen gibt (diese Frage war jahrhundertelang ungelöst), gibt es für n = 2 unendlich viele. Dieser Fall hängt offensichtlich mit dem Satz des Pythagoras zusammen.
Möchte man aus drei Seiten ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, muss man diesen Zusammenhang berücksichtigen und etwa aus den beiden Kathetenlängen die Länge der Hypotenuse berechnen und dabei die Wurzel ziehen, was im allgemeinen auf irrationale Zahlen führt. Deren Entdeckung durch antike griechische Mathematiker führte zur ersten Grundlagenkrise der Mathematik.
Man kann sich das Wurzelziehen sparen, indem man versucht ganzzahlige Seitenlängen zu finden, etwa

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Die Lösung einer diophantischen Gleichung erlaubt so die Umgehung der griechischen Krise. Dazu werden im Vortrag weitere, kompliziertere Beispiele zu allgemeinen Dreiecken und Sehnenvierecken besprochen.
Die Anwendung der Zahlentheorie auf die Geometrie hat aber noch weitere Konsequenzen. Sie offenbart eine den geometrischen Objekten zugrunde liegende Struktur, die unerkannt geblieben wäre, hätte man das Problem im Bereich der reellen Zahlen betrachtet. Diese Struktur ermöglicht es, auf einfache Weise komplizierte geometrische Zusammenhänge zu entdecken.
Die Beschränkung auf ganze und rationale Zahlen in der Zahlentheorie führt so zu einem tieferen Verständnis der Geometrie.

*****

Ulf Kühn
Universität Hamburg

Multiple Zeta Werte

Multiple Zeta Werte, die auch Euler Zagier Summen genannt werden, sind natürliche Verallgemeinerungen der Summen, die durch die Werte der Riemannschen Zetafunktion an den natürlichen Zahlen gegeben sind. Diese reellen Zahlen treten in verschiedensten Zusammenhängen in Mathematik (Perioden, Knoteninvarianten,...) und in Physik (Feynmann Diagramme,...) auf. Die rationalen Linearkombinationen der Multiplen Zeta Werte bilden eine Unteralgebra der reellen Zahlen. Im Vortrag soll über aktuelle Ergebnisse zur Struktur der Algebra der Multiplen Zeta Werte berichtet werden, auch soll die Verbindung zur Theorie der Modulformen diskutiert werden.