Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck 20.05.2010

Aufgabenblatt 7
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [10 Punkte] Es sei $w^{m,p}$ der Raum der Woche von Aufgabenblatt 4. Zeigen Sie, dass für $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Abbildung $T : w^{-m,q} \to (w^{m,p})'$, $Tx(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 2: [10 Punkte] Es seien Y_n normierte $\mathbb{K}$-Räume für $n \in \mathbb{N}$, X $\mathbb{K}$-Banachraum. Es sei $A_n \subseteq \mathfrak{L}(X; Y_n)$ eine unbeschränkte Teilmenge. Beweisen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt mit $\sup_{L \in A_n} \|Lx\|_{Y_n} = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genauer ist die Menge dieser x sogar von 2. Kategorie.

Aufgabe 3: [10 Punkte] Es sei $\mathcal{C}_{2\pi}$ der Banachraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[-\pi, \pi]$ mit $x(-\pi) = x(\pi)$ und der Supremumsnorm. Es sei $s_m(x,t)$ die m-te Partialsumme der Fourierreihe (siehe etwa: H.Amann, Analysis II, S. 76) von $x \in \mathcal{C}_{2\pi}$ an der Stelle $t \in [-\pi, \pi]$. Zeigen Sie, dass $s_m(\,\cdot\,, t) : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf $\mathcal{C}_{2\pi}$ ist und dass $\lim_{m\to\infty} \|s_m(\,\cdot\,, t)\|_{\mathcal{C}'_{2\pi}} = \infty$. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3, Blatt 4, aber beachten Sie, dass t hier konstant ist. Benutzen Sie ferner (ohne Beweis) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos(ku) = \frac{\sin((m+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$.)

Aufgabe 4: [4 + 6 Punkte]

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus und Aufgabe 3, dass es zu jedem $t \in [-\pi, \pi]$ ein $x \in \mathcal{C}_{2\pi}$ gibt, so dass die Fourierreihe von x an der Stelle t divergiert.

2. Finden Sie mit Aufgabe 2 und den Mengen $A_n = \{s_m(\,\cdot\,, t_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ für t_n aus einer abzählbar dichten Teilmenge von $[-\pi, \pi]$ ein $x \in \mathcal{C}_{2\pi}$, für das die Mengen $I_k = \{t \in [-\pi, \pi] \mid |s_m(x,t)| \leq k \;\forall\, m \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen und nirgends dicht sind. Folgern Sie, dass es eine stetige, 2π-periodische Funktion gibt, deren Fourierreihe an überabzählbar vielen Stellen divergiert.

Abgabe: 03.06.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	$\mathfrak{K}(X,Y)$, X, Y Banachräume.
Definition:	$\mathfrak{K}(X,Y) = \{K \in \mathfrak{L}(X,Y) \mid \overline{K(B_1(0))} \text{ kompakt}\}$
Norm:	$\|K\|_{\mathfrak{K}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Kx\|_Y$
Dualraum:	Operatoren der Spurklasse, falls $X = Y$ Hilbertraum.
Weitere Eigenschaften:	Nicht reflexiv falls $\dim X, \dim Y = \infty$, C^*-Algebra für $X = Y$ Hilbertraum.