Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

24.06.2010

# Aufgabenblatt 11
# Funktionalanalysis

**Aufgabe 1:** [10 Punkte] Es sei $X$ ein Banachraum, $T$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie: $f : T \to X$ ist genau dann schwach stetig, wenn $x' \circ f : T \to \mathbb{K}$ stetig ist für alle $x' \in X'$.

**Aufgabe 2:** [7 + 3 Punkte]

1. Es sei $X$ ein Banachraum, $L \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Zeigen Sie: Besitzt Bild$L$ ein endlich-dimensionales algebraisches Komplement, so ist Bild$L$ bereits abgeschlossen (die Forderung an einen Fredholm-Operator, abgeschlossenes Bild zu besitzen, ist also überflüssig).
2. Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus 1. im Allgemeinen nicht gilt, wenn es sich nicht um das Bild eines stetigen Operators handelt. Finden Sie also einen endlich-kodimensionalen Unterraum, welcher nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 3:** [3 + 7 Punkte] Berechnen Sie das Spektrum der folgenden Operatoren. Achten Sie dabei auf die Unterteilung in Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum und Residualspektrum.

1. $A : \mathcal{C}^0([0,1]\,;\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^0([0,1]\,;\mathbb{C}),\ Af(x) = x \cdot f(x)$.
2. $\sigma_{R,L} : \ell^p(\mathbb{C}) \to \ell^p(\mathbb{C})$ die Shiftoperatoren auf $\ell^p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$.

**Aufgabe 4:** [2 + 3 + 5 Punkte] Es sei $X$ ein unendlichdimensionaler Banachraum, $K : X \to X$ ein kompakter Operator. Zeigen Sie:

1. 0 liegt im Spektrum von $K$.
2. Es sei $n(\lambda)$ die kleinste natürliche Zahl mit $\ker(K - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)} = \ker(K - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)+1}$. Dann ist das Spektrum von $K\big|_{\text{Bild}(K-\lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)}}$ gegeben durch $\Sigma_K \setminus \{\lambda\}$.
3. Der einzige mögliche Häufungspunkt des Spektrums ist 0.

**Abgabe:** 01.07.10 in den Übungen.

**Raum der Woche**

| | |
|---|---|
| Bezeichnung: | Orlicz-Räume $\mathcal{L}^\varphi(\Omega; X)$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-endlicher Maßraum, $X$ Banachalgebra, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ konvex, $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. |
| Definition: | $\{f : \Omega \to X \mid f \text{ meßbar}, \int_\Omega \varphi(\|f(\omega)\|_X)\, d\mu < \infty\}$ |
| Norm: | $\|f\|_\varphi = \sup\{\|fg\|_1 \mid \int_\Omega \varphi(\|g(\omega)\|_X)\, d\mu \leq 1\}$ |
| Dualraum: | |
| Weitere Eigenschaften: | Verallgemeinerung der $\mathcal{L}^p$-Räume. |