Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

17.06.2010

Aufgabenblatt 10
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [10 Punkte] Beweisen Sie folgenden Satz von Schauder: Es seien X, Y Banachräume, $L \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Dann ist L genau dann kompakt, wenn der duale Operator $L' \in \mathfrak{L}(Y', X')$ kompakt ist (Hinweis: Ist $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{B}_1^{Y'}(0)$, so wenden Sie den Satz von Ascoli-Arzelà auf die Menge von Funktionen $y \mapsto y'_n(y)$ an für $y \in \overline{L(\mathbb{B}_1^X(0))}$).

Aufgabe 2: [6 + 4 Punkte] Es sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Zeigen Sie:

1. X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.
2. Ist $Y \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum, so ist Y reflexiv.

Aufgabe 3: [4 + 6 Punkte] Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, X ein $\mathbb{K}$-Banachraum.

1. Zeigen Sie per Induktion: Sind $v'_1, \dots, v'_n, v'$ Funktionale auf V und ist $\bigcap_{i=1}^n \ker v'_i \subseteq \ker v'$, so ist $v' \in \operatorname{span}(v'_1, \dots, v'_n)$.
2. Es sei $x' : X \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass x' genau dann ein Funktional ist, wenn x' ein schwaches Funktional ist.

Aufgabe 4: [10 Punkte] Es seien X, Y Banachräume, $L : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass L genau dann normstetig ist, wenn L stetig bezüglich der schwachen Topologien auf X, Y ist.
(Hinweis zur Rückrichtung: Betrachten Sie die Funktionale $L_x \in Y''$, $L_x(y') = y'(Lx)$ für $x \in \mathbb{B}_1^X(0)$ und verwenden Sie den Satz von Banach-Steinhaus.)

Abgabe: 24.06.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	Nukleare Operatoren $\mathfrak{N}(H)$, H Hilbertraum. (auch: Operatoren der Spurklasse).
Definition:	$\{L \in \mathfrak{L}(H) \mid L = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(\,\cdot\,)y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|_{H'}\,\|y_n\|_H < \infty\}$
Norm:	$\|L\|_{\mathfrak{N}} = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|_{H'}\,\|y_n\|_H \mid L = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(\,\cdot\,)y_n\}$
Dualraum:	$\mathfrak{L}(H)$
Weitere Eigenschaften:	W^*-Algebra, Schattenklasse c_1, Prädualraum $\mathfrak{K}(H)$.