Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

01.04.2010

Aufgabenblatt 1
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [10 Punkte] Es sei X ein Vektorraum, $L(X)$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass X eine Basis besitzt, indem Sie Zorns Lemma auf die Menge $L(X)$ mit der partiellen Ordnung „$\subseteq$" anwenden.

Aufgabe 2: [5 + 5 (+ 4) Punkte] Es sei X ein topologischer Hausdorffraum, $K \subseteq X$ kompakt.

1. Zeigen Sie: Ist $x \in X \setminus K$, so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $x \in U$, $K \subseteq V$.
2. Zeigen Sie: Ist $L \subseteq X$ kompakt und $L \cap K = \emptyset$, so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subseteq U$, $L \subseteq V$.
3. (Bonus) Gelten entsprechende Aussagen auch, wenn man Kompaktheit (von K, L) durch Abgeschlossenheit ersetzt?

Aufgabe 3: [5+5 Punkte] Es sei X eine Menge. Eine Umgebungsbasis von $x \in X$ bzgl. einer Topologie τ von X ist ein System $\mathcal{U}_x$ von offenen Mengen $x \in U \subseteq X$, so dass jede Umgebung von x Obermenge eines Elements von $\mathcal{U}_x$ ist. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis einer Topologie τ von X, wenn $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ eine Umgebungsbasis von x bzgl. τ ist für jedes $x \in X$.
2. Es sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge mit $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$, und

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{\text{endl.}} S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}, \ \tau = \left\{ \bigcup B_i \mid B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

($\mathcal{B}$ ist also die Menge aller endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$.) Dann ist τ eine Topologie auf X und $\mathcal{B}$ eine Basis dieser Topologie.

Aufgabe 4: [10 Punkte] Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\{X_i\}_{i \in I}$, für eine beliebige Indexmenge I, hat die „finite intersection property", falls für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt: $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset$. Zeigen Sie: X ist genau dann kompakt, wenn für jede Familie abgeschlossener Teilmengen, welche die „finite intersection property" besitzt, gilt:

$$\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

Abgabe: 08.04.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	ℓ^p, $1 < p < \infty$
Definition:	$\ell^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lvert x_i \rvert^p < \infty\}$
Norm:	$\lVert x \rVert_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \lvert x_i \rvert^p)^{\frac{1}{p}}$
Dualraum:	ℓ^q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Weitere Eigenschaften:	Reflexiv, separabel, Hilbertraum für $p = 2$.