

Abbildungsgrad und äquivariante Abbildungen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Philipp Wruck

angefertigt am Department Mathematik der
Universität Hamburg
unter der Anleitung von Prof. Dr. Reiner Lauterbach

Hamburg, im Wintersemester 06/07

Inhaltsverzeichnis

1	Der Grad äquivarianter Abbildungen bei topologischen Aktionen	7
1.1	Fundamentaltbereiche und der Satz von Kuratowski	7
1.2	Der Hauptsatz für topologische Aktionen	15
1.3	Einige Beispiele	22
2	Der Grad äquivarianter Abbildungen bei glatten Aktionen	25
2.1	Der Hauptsatz für glatte Aktionen	25
2.2	Beweis des Hauptsatzes	27
2.3	Folgerungen und Ausblicke	47
3	Verallgemeinerungen auf Banachräume	50
3.1	Zyklische Gruppenaktionen auf Hilberträumen	50
3.2	Eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf Banachräume	60
4	Ein Existenzsatz für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen	63
4.1	Elliptische Differentialgleichungen	63
4.2	Ein Existenzsatz für äquivariante Operatoren	65
4.3	Ein praktisches Beispiel	69
5	Anhang	71
5.1	Allgemeine G -Raum Theorie	71
5.2	G -Faserbündel	76
5.3	Dimensionstheorie	83
5.4	Abbildungsgrade	87
5.5	Thomklasse und \cap -Produkt	89
6	Literatur	91

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit soll das Verhalten von Abbildungsgraden unter der Präsenz von Gruppensymmetrien untersucht werden. Ein Satz von Hopf besagt, daß die Abbildung

$$\deg : [M, \mathbb{S}^n] \rightarrow \mathbb{Z}$$

zwischen den Homotopieklassen stetiger Abbildungen einer n -dimensionalen, kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M in die n -Sphäre und den ganzen Zahlen eine Bijektion ist. Zwei stetige Abbildungen sind also genau dann homotop, wenn sie gleichen Abbildungsgrad besitzen. Im Falle von Gruppensymmetrien gibt es kein ähnlich einfaches Ergebnis für den Grad äquivarianter Abbildungen und äquivariante Homotopieklassen. Man kann vielleicht erwarten, daß nicht beliebige Grade für äquivariante Abbildungen zulässig sind, sondern daß es gewisse Restriktionen aus den Symmetrien gibt und ferner, daß Abbildungen gleichen Grades nicht notwendig äquivariant homotop sein müssen (die Umkehrung gilt natürlich). Ein einfaches und gleichzeitig berühmtes Resultat ist der Satz von Borsuk, der besagt, daß ungerade Abbildungen zwischen Sphären ungeraden Abbildungsgrad besitzen.

Abbildungsgradtheorie ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Untersuchung nichtlinearer Probleme. Gleichzeitig besitzen viele der Probleme, die man studieren möchte, beispielsweise solche, die in der Physik ihren Ursprung haben, offene oder versteckte Symmetrien. Hierbei geht es nicht nur um die Lösbarkeit von Gleichungen, sondern auch um Phänomene wie Bifurkation von Lösungen oder Eigenschaften von äquivarianten Funktionalen. Es sei auch an Lusternik-Schnirelman-Theorie erinnert und das darauf aufbauende Konzept einer G -Indextheorie für beliebige kompakte Liegruppen. Die Untersuchung von Abbildungsgraden äquivarianter Abbildungen scheint also ein sinnvolles Unterfangen zu sein. Erinnert man sich an den topologischen Ursprung des Abbildungsgrades, dieser charakterisiert nämlich den Homomorphismus, den eine stetige Abbildung auf Homologieniveau induziert, so findet man aber auch reichliche Anwendungen des Grades innerhalb der reinen Mathematik. Als Beispiel sei die Klassifikation der Darstellungen einer kompakten Liegruppe G bis auf G -äquivariante Homotopie genannt, siehe etwa [Die].

Es gibt mehrere Herangehensweisen an äquivariante Gradtheorie. Diese Arbeit beruht auf dem Buch „Geometric Approach to Degree Theory of Equivariant Maps“ von Alexander Kulkuley und Zalman Balanov [BK]. Die Resultate, die hier erzielt werden, beruhen auf geometrischen Überlegungen, genauer auf der äquivarianten Fortsetzbarkeit äquivarianter Abbildungen. Ziel ist es, den Grad zweier äquivarianter Abbildungen $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$ zwischen einer kompakten, orientierbaren G -Mannigfaltigkeit und einer G -Sphäre, beide der Dimension n , zu vergleichen. Die Herangehensweise ist dabei die Folgende: Man bildet den Zylinder $M \times I$ und orientiert Deckel und Boden entgegengesetzt. Ebenso bildet man die Kugel $B = \mathbb{S}^+ \wedge I$ und betrachtet die Abbildung

$$F : M \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{S}, \quad F(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) & t = 0 \\ \psi(x) & t = 1 \end{cases}.$$

Setzt man F fort über den Zylinder in die Kugel B , so gilt

$$\deg F = \deg F|_{\partial M} = \pm(\deg \varphi - \deg \psi)$$

und Letzteres ist die Größe, die berechnet werden soll. Der Grad von F stimmt aber mit dem lokalen Grad um 0 von F überein und daher braucht man nur die während der Fortsetzung entstehenden Nullstellen so zu kontrollieren, daß eine Berechnung des lokalen Grades möglich ist. Die Fortsetzung von F wird dabei induktiv über die Orbittypen von M , das sind die Konjugationsklassen von Isotropieuntergruppen, erzeugt werden.

Die Ergebnisse, die hier vorgestellt werden, stammen größtenteils aus [BK]. Die Hauptaufgabe meiner Arbeit war es, die oft nur zum Teil ausgeführten Beweise zu vervollständigen und in eine für Studenten lesbare Form zu bringen. Ein kurzer Überblick über die Gliederung der Arbeit:

Im ersten Abschnitt wird zunächst eine äquivariante Version des Fortsetzungssatzes von Kuratowski für stetige Abbildungen bewiesen. Der Fortsetzungssatz selbst wird im Anhang wiedergegeben. Der Beweis veranschaulicht bereits das Prinzip der Induktion über die Orbittypen, welches immer wieder verwendet werden wird. Er beruht auf der Existenz von Fundamentalbereichen für freie Gruppenaktionen, welche davor hergeleitet wird. Diese beiden Sätze sind auch für sich betrachtet von Interesse.

Beruhend auf diesen beiden Resultaten wird der erste Hauptsatz bewiesen. Dieser beschäftigt sich mit topologischen Aktionen auf topologischen Mannigfaltigkeiten, es wird hier also keinerlei Glattheit verwendet. Unter gewissen Voraussetzungen, insbesondere an die Dimension der Fixmengen bzgl. der Orbittypen der Aktion, besagt dieser Satz, daß die Grade von φ und ψ folgende Relation erfüllen:

$$\deg \varphi \equiv \deg \psi \pmod{\left(\text{ggT} \left\{ |G/H_1|, \dots, |G/H_m| \right\}\right)},$$

wobei die H_i die verschiedenen Orbittypen repräsentieren. Der Beweis benutzt wenig mehr als die beiden zuvor bewiesenen Sätze und elementare Eigenschaften des Abbildungsgrades.

Das Kapitel wird abgeschlossen durch einige Beispiele für Anwendungen des ersten Hauptsatzes.

Das zweite Kapitel dient dem Beweis des zweiten Hauptsatzes, welcher die Voraussetzungen einerseits erheblich verschärft. So ist M nun Riemannsche Mannigfaltigkeit, \mathbb{S} eine Sphäre in einer orthogonalen Darstellung und alle beteiligten Abbildungen sind glatt. Andererseits entfällt hier die Dimensionsbedingung, der Satz ist für beliebige Aktionen endlicher Gruppen gültig. Der Beweis ist erheblich umfangreicher als der des ersten Hauptsatzes und nimmt, zusammen mit drei Hauptlemmata, auf denen er beruht, fast das ganze Kapitel ein. Am Ende folgen wieder Beispiele und Ausblicke, so kann man zum Beispiel auch Aussagen über Aktionen kompakter Liegruppen treffen, indem man zunächst Torusaktionen betrachtet, dort mittels der Dichtheit der p -Untergruppen für p prim die Resultate für endliche Gruppen überträgt und dann mit Hilfe der maximalen Tori in kompakten Liegruppen schließlich den allgemeinen Fall behandelt. Dies soll jedoch nur ein Ausblick sein, der Hauptbetrachtungsgegenstand der Arbeit sind endliche Gruppen.

Die Bedeutung der Abbildungsgradtheorie ist auch deshalb so groß, weil der Grad im Endlichdimensionalen mittels einfacher Konstruktionen auf unendlichdimensionale Situationen übertragen werden kann. Das einfachste Konzept ist hier der Leray-Schauder-Grad. Im dritten Kapitel soll daher, nach einer kurzen Rekapitulation der Konstruktionen, die Theorie auf Banachräume verallgemeinert werden. Hierbei werden nun Abbildungen $f : \Omega \rightarrow X$ für ein Gebiet Ω in einen Banachraum X betrachtet. Die Übertragung der Resultate ist in diesem Fall nicht besonders kompliziert. Der größte Teil des Kapitels befaßt sich daher mit einer modifizierten Frage und zwar mit zwei verschiedenen Aktionen derselben zyklischen Gruppe G auf einem Hilbertraum. Die verschiedenen Aktionen beinhalten nämlich eine signifikante Schwierigkeit für die Konstruktion des Grades im Unendlichdimensionalen, weil man im Allgemeinen keine endlichdimensionalen Unterräume findet, welche bzgl. beider Aktionen invariant sind. Dies würde jedoch für eine straight-forward-Übertragung nötig sein. Es müssen daher einige Konstruktionen durchgeführt werden die es erlauben, zu einem invarianten Unterraum bzgl. der einen Aktion einen invarianten Unterraum bzgl. der anderen zu finden, welcher genügend nah an ersterem anliegt. Die Ergebnisse in diesem Fall befassen sich mit Aktionen zyklischer Gruppen, auch wenn zumindest leichte Verallgemeinerungen sofort auf der Hand liegen. Das Kapitel wird abgeschlossen mit der bereits erwähnten Standardverallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes auf Banachräume, wenn G nur auf eine Weise operiert.

Das vierte Kapitel schließlich ist eine Anwendung der Resultate aus Kapitel 3, letztendlich also des zweiten Hauptsatzes, auf elliptische partielle Differentialgleichungen. Einem allgemeinen Existenzsatz folgt ein konkretes symmetrisches Problem. Dieses Kapitel soll die Nützlichkeit der erhaltenen Resultate veranschaulichen.

Im Anhang habe ich die nötigen Hilfsmittel aus allgemeiner G -Raum-Theorie, mengentheoretischer Topologie und Abbildungsgradtheorie zusammengestellt. Dabei ist das Kapitel über G -Raum-Theorie um einiges umfangreicher und enthält meistens auch die Beweise zu den Resultaten. Dies erschien mir sinnvoll, da auf diesen Tatsachen der tatsächliche geometrische Hintergrund der Resultate der ersten Kapitel beruht, wogegen die Sätze aus der allgemeinen Topologie nicht wesentlich zur Einsicht in die Probleme beitragen und eher Hilfscharakter besitzen. Die Fakten aus der Gradtheorie sind zwar unablässig, aber hier sind eher die Eigenschaften des Grades von Bedeutung als die konkrete Art und Weise, wie er konstruiert wird.

Danksagung

Ich möchte zuvorderst Herrn Professor Reiner Lauterbach danken sowohl für die Auswahl des äußerst interessanten Themas als auch für die Betreuung während der Anfertigung der Arbeit, während der er stets ein offenes Ohr für meine Fragen hatte, auch wenn ich sie bis nach England und Mexiko schicken mußte. Weiter danke ich Herrn Professor Roland Gunesch, der es mir ermöglichte, meine Ergebnisse in der AG Dynamische Systeme an der Universität Hamburg nach und nach vorzustellen. Herrn Professor Zalman Balanov und Herrn Professor Alexander Kushkuley gilt mein Dank für die E-Mail-Korrespondenz in der entscheidenden Phase der Arbeit, welche wesentlich zum Beweis des zweiten Hauptsatzes beitrug. Ferner bedanke ich mich herzlich bei Aljoscha Heß und Ferit Deniz :-| für die Durchsicht der Arbeit und

für viele Anmerkungen und Hinweise bzgl. verschiedener Probleme. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für den Rückhalt und die finanzielle Unterstützung während meines Studiums.

1 Der Grad äquivarianter Abbildungen bei topologischen Aktionen

In diesem Kapitel werden zunächst die beiden wichtigsten geometrischen Hilfsmittel bewiesen, die für die Beweise der Hauptsätze gebraucht werden, die Existenz von Fundamentalbereichen für freie Gruppenaktionen 1.1.2, sowie die äquivariante Version des Satzes von Kuratowski, 1.1.4, welcher das Fortsetzbarkeitsproblem für metrische Räume klärt. Das Kapitel gipfelt dann im Beweis des ersten Hauptsatzes 1.2.1. Die Resultate stammen größtenteils aus [BK], wobei als Hilfsmittel auch [Eng], [Bor], [Die] und [Bre] dienen.

Vorab möchte ich ein paar notationstechnische Dinge klären, die im Rest der Arbeit ohne weitere Erwähnung verwendet werden. I bezeichnet das Einheitsintervall $[0, 1]$, gegebenenfalls mit Grundpunkt 0. Der Kegel über einem topologischen Raum X wird gebildet durch $X^+ \wedge I$. Dabei ist X^+ der Raum X vereinigt mit einem disjunkten Grundpunkt und \wedge bezeichnet das Smashprodukt. Diese etwas komplizierte Darstellung des gewöhnlichen Kegels hat den Vorteil, daß man so direkt eine Gruppenoperation erhält, falls X G -Raum ist und G auf I sowie $\{+\}$ trivial operiert.

Operiert G auf X und ist H Isotropieuntergruppe für ein $x \in X$, so bezeichnet die Äquivalenzklasse unter Konjugation, (H) , den Orbittyp (von x). Details findet man im Anhang über G -Raum-Theorie. Dort sind auch diverse Fixmengen definiert, die wichtigsten sind dabei für eine Untergruppe $H \subseteq G$:

$$X^H = \{x \in X \mid H \subseteq G_x\}$$

$$X^{>H} = \{x \in X \mid H \subsetneq G_x\}$$

$$X_{(H)} = \{x \in X \mid G_x = H\}$$

Die erste Menge kann unter gewissen Umständen als Faser in X , interpretiert als G -Faserbündel, aufgefaßt werden, die letzte Menge ist im Falle glatter Aktionen kompakter Liegruppen stets eine Untermannigfaltigkeit (siehe [Bre], S.309). Weitere Details findet man auch hier im Anhang.

Ist X ein metrischer Raum, so bezeichnet $\dim X$ die topologische oder Überdeckungsdimension von X , zur Definition und für die hier verwendeten Eigenschaften siehe das Kapitel über Dimensionstheorie im Anhang. An dieser Stelle sei nur kurz Folgendes bemerkt: Ist X Mannigfaltigkeit, so stimmt die topologische Dimension mit der Dimension als Mannigfaltigkeit überein. Daher sind hier keine Mißverständnisse zu befürchten. Immer wieder verwendet wird die Transitivität der Dimension auf Mannigfaltigkeiten, also $\dim A \leq \dim M$ für $A \subseteq M$ beliebig.

1.1 Fundamentalbereiche und der Satz von Kuratowski

Definition 1.1.1 Es sei G eine topologische Gruppe, welche auf einem metrischen Raum X operiert. Es sei $D_0 \subseteq X$ so, daß $D_0 \subseteq D = \overline{D_0}$ offen ist. Dann heißt D Quasifundamentalbereich der Aktion, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

FB1: $G(D) = X$.

FB2: $g(D_0) \cap h(D_0) = \emptyset$ für $g \neq h, g, h \in G$.

FB3: $X \setminus G(D_0) = G(D \setminus D_0)$.

Ist X endlichdimensional so heißt D Fundamentalbereich der Aktion, falls zusätzlich zu Obigem gilt:

FB4: $\dim D = \dim X/G, \dim (D \setminus D_0) < \dim D, \dim G(D \setminus D_0) < \dim X$.

Mit Hilfsmitteln der allgemeinen Topologie, welche ich im Anhang zusammengestellt habe, kann der folgende Satz über die Existenz von Fundamentalbereichen bewiesen werden, der auch für sich betrachtet von Interesse ist. Man beachte, daß das Verfahren zur Konstruktion eines Fundamentalbereichs zwar im Allgemeinen nicht konstruktiv, in Spezialfällen aber durchaus handhabbar ist.

Satz 1.1.2 *Es sei X ein metrischer G -Raum, G kompakte Liegruppe, welche frei auf X operiert. Dann existiert ein Quasifundamentalbereich der Aktion. Ist X endlichdimensional, so existiert ein Fundamentalbereich.*

BEWEIS. Da die Aktion frei ist, besitzt X insbesondere nur einen Orbittyp, und zwar den trivialen Typ ($\{e\}$). Nach 5.2.7 ist die kanonische Projektion $p : X \rightarrow X/G$ die Projektion eines Faserbündels mit Faser G . Man wähle einen Bündelatlant $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Der Satz von Stone besagt, daß metrische Räume parakompakt sind und das Bild parakompakter Räume unter abgeschlossenen Abbildungen ist parakompakt. Die Orbitabbildung p ist aber abgeschlossen (siehe 5.1.5), also ist der Orbitraum parakompakt, weshalb der Atlas als lokal-endlich angenommen werden kann. Man wähle eine Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$, so daß gilt:

- (1) $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.
- (2) $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$.
- (3) $\dim \partial V_\alpha \leq n - 1$.
- (4) $\{\overline{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ist eine Überdeckung von X/G .

Daß dies stets möglich ist garantiert Lemma 5.3.9. Die Einschränkung der Kartenabbildung φ_α auf $G \times V_\alpha$ werde mit $\tilde{\varphi}_\alpha : G \times V_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha)$ bezeichnet. Die Familie der V_i ist nach Konstruktion disjunkt, daher induzieren die Abbildungen $\tilde{\varphi}_\alpha$ einen Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi} : G \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} p^{-1}(V_\alpha).$$

Man definiere

$$D_0 = \tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right)$$

und $D = \overline{D_0}$. Dann ist D der gesuchte Quasifundamentalbereich und D_0 die entsprechende Menge aus der Definition desselben. Es sind also die folgenden 4 Eigenschaften zu verifizieren:

FB1: Da p abgeschlossen ist, gilt

$$p(D) = p(\overline{D_0}) = \overline{p(D_0)}.$$

Da $\tilde{\varphi}$ aber mittels Kartenabbildungen definiert wurde, ist $p(D_0) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ und daher

$$\overline{p(D_0)} \supseteq \bigcup_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} = X/G.$$

FB2: Es seien $g, h \in G$ beliebig, $g \neq h$. Die Karten eines G -Prinzipalbündels sind äquivariant, damit folgt

$$g(D_0) = g\tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right) = \tilde{\varphi} \left(\{g\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right)$$

und genauso natürlich

$$h(D_0) = \tilde{\varphi} \left(\{h\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right).$$

Da $\tilde{\varphi}$ Homöomorphismus ist, folgt $g(D_0) \cap h(D_0) = \emptyset$.

FB3: Da offenbar $G(D \setminus D_0) \cup G(D_0) = X$ gilt, ist die Bedingung verifiziert, falls $G(D \setminus D_0) \cap G(D_0) = \emptyset$ ist. Angenommen also es ist $x \in G(D \setminus D_0) \cap G(D_0)$. Es gibt dann $y \in D \setminus D_0$ und $z \in D_0$ mit $x = gy = hz$ mit $g, h \in G$, womit $p(y) = p(z)$ folgt. Es ist aber

$$y \in D \setminus D_0 \subseteq \partial D_0 = \partial \tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right)$$

und da $\tilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist und die V_α so gewählt waren, daß ihr Rand ganz in einer Kartenumgebung, also im Definitionsbereich von $\tilde{\varphi}$ liegen, folgt weiter, da der Rand der Vereinigung einer lokal-endlichen Familie Teilmenge der Vereinigung der Ränder ist (siehe Satz 5.3.8):

$$\partial \tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right) \subseteq \tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \partial \left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right) \right) \subseteq \tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right).$$

Schließlich liefert die Tatsache, daß $\tilde{\varphi}$ aus Kartenabbildungen zusammengesetzt ist:

$$\tilde{\varphi} \left(\{e\} \times \bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} p^{-1}(\partial V_\alpha) = p^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right),$$

letztendlich also

$$p(y) \in \bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha.$$

Andererseits ist

$$p(z) \in p(D_0) = p^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right) = X/G \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right).$$

Dieser Widerspruch zeigt FB3.

FB4: Es sei nun X endlichdimensional. Zur Vereinfachung der Notation sei $\tilde{\varphi}(\{e\} \times V_\alpha) = W_\alpha$. Ist $x \in \bigcup_{\alpha \in I} p^{-1}(V_\alpha)$, so liegt $p(x)$ in endlich vielen Mengen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, also $x \in p^{-1}(U_{\alpha_1}), \dots, p^{-1}(U_{\alpha_n})$. Wegen $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ und $W_\alpha \subseteq p^{-1}(U_\alpha)$ folgt die lokale Endlichkeit der Mengen \bar{W}_α . Nun gilt allgemein (siehe Satz 5.3.4), daß die Dimension eines Raumes abgeschätzt werden kann durch die Dimension der Mengen einer lokal-endlichen, abgeschlossenen Überdeckung. Damit folgt zunächst $\dim D = \max_\alpha (\dim \bar{W}_\alpha)$, und da \bar{W}_α homöomorph ist zu \bar{V}_α und diese Mengen wiederum X/G überdecken, erhält man $\dim D = \dim X/G$.

Da die Aktion frei ist, gilt $\dim X/G = \dim X - \dim G$ (siehe Satz 5.3.6). Mit der Tatsache, daß $\dim \partial V_\alpha \leq \dim X/G - 1$ ist, folgt weiter:

$$\begin{aligned} \dim G(D \setminus D_0) &= \dim p^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right) \\ &= \dim \left(G \times \bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \right) \\ &\leq \dim G + \dim \bigcup_{\alpha \in I} \partial V_\alpha \\ &\leq \dim G + \dim X/G - 1 \\ &= \dim G + \dim X - \dim G - 1 = \dim X - 1 \end{aligned}$$

Dies zeigt die zweite Bedingung von FB4. Für die letzte zu zeigende Ungleichung stellt man zunächst

$$D \setminus D_0 = \partial \left(\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha \right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \partial W_\alpha$$

mit Hilfe von Lemma 5.3.8 fest. Aber nach Satz 5.3.4 ist

$$\dim \bigcup_{\alpha \in I} \partial W_\alpha \leq \dim X/G - 1.$$

Zusammen ergibt sich

$$\dim D \setminus D_0 \leq \dim X/G - 1.$$

Dies zeigt FB4 und der Satz ist bewiesen. \square

Ausgerüstet mit Satz 1.1.2 wird nun eine äquivariante Version des Satzes von Kuratowski (Satz 5.3.10) hergeleitet. Von grundlegender Bedeutung sind hierbei zwei verschiedene Filtrierungen eines metrischen G -Raums X . Man spricht von X als einem G -Raum von endlichem Orbittyp, falls die Aktion nur endlich viele Orbittypen besitzt. Dies ist natürlich der Fall, wenn G endlich ist, aber auch jede glatte Aktion einer kompakten Liegruppe auf einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit erfüllt diese Bedingung (siehe [Die2], S.121). Es seien nun X, Y zwei metrische G -Räume mit endlichem Orbittyp. Die Menge aller auftretenden Orbittypen sei

$$\{(H_1), \dots, (H_m)\}.$$

Hierbei sei die Nummerierung so gewählt, daß gilt:

$$(H_j) < (H_i) \implies i < j.$$

Dies impliziert also zum Beispiel $(H_m) = (\{e\})$, falls $\{e\}$ Orbittyp der Aktion ist. Für glatte Aktionen im Allgemeinen ist (H_m) der prinzipale Orbittyp (zur Definition des prinzipalen Orbittyps siehe [Bre], S.179). Die Orbitfiltration von X ist jetzt definiert als

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_m = X$$

mit

$$X_i = \{x \in X \mid (G_x) = (H_j) \text{ für ein } j \leq i\}.$$

Analog filtert man $Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_m = Y$. Man beachte, daß für die Fixmengen X^{H_i} stets $X^{H_i} \subseteq X_i$ gilt. Lemma 5.2.10 impliziert, daß jede $W(H)$ -äquivalente Abbildung $f : X^{H_i} \rightarrow Y^{H_i}$ eine eindeutige G -äquivalente Fortsetzung $F : X_i \rightarrow Y_i$ besitzt. Diese Beobachtung wird später wichtig sein. Hier die genaue Formulierung.

Lemma 1.1.3 *Es seien X, Y G -Räume, G kompakte Liegruppe, G operiere auf X und Y mit endlich vielen Orbittypen $(H_1), \dots, (H_m)$. Es seien $X_1 \subseteq \dots \subseteq X_m, Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_m$ die jeweiligen Orbitfiltrationen der Räume. Die Weylgruppe $W(H_i)$ operiert auf den Fixräumen X^{H_i}, Y^{H_i} . Ist $f : X_{i-1} \rightarrow Y_{i-1}$ G -äquivalent und $F^{H_i} : X^{H_i} \rightarrow Y^{H_i}$ eine $W(H_i)$ -äquivalente Fortsetzung von $f|_{X_{i-1}^{H_i}}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte G -äquivalente Fortsetzung $F : X_i \rightarrow Y_i$, so daß $F|_{X_{i-1}} = f$ und $F|_{X^{H_i}} = F^{H_i}$.*

BEWEIS. Dies folgt sofort aus Korollar 5.2.10, siehe Anhang. \square

Die zweite Filtrierung geht von einer abgeschlossenen, invarianten Teilmenge $A \subseteq X$ aus, so daß die Aktion auf $X \setminus A$ frei ist. Es sei $X^{(0)} = X, L^{(0)} = X^{(0)} \setminus A$. Es seien nun $X^{(i)}, L^{(i)}$ definiert, so daß die Aktion von G auf $L^{(i)}$ frei ist. 1.1.2 liefert einen Fundamentalbereich $D^{(i)} \subseteq L^{(i)}$ und die dazugehörige Menge $D_0^{(i)}$. Man setze dann

$$X^{(i+1)} = A \cup G(D^{(i)} \setminus D_0^{(i)}),$$

$$L^{(i+1)} = X^{(i+1)} \setminus A.$$

Es ist klar, daß die Aktion auf $L^{(i+1)}$ frei ist, somit erhält man eine Filtration, die Fundamentalfiltration, von X :

$$A \subseteq \dots \subseteq X^{(2)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(0)} = X.$$

Falls $X \setminus A$ endlichdimensional ist, ist auch die Fundamentalfiltration endlich, das folgt sofort aus der Dimensionsbedingung FB4 aus der Definition des Fundamentalbereichs.

Die Orbitfiltration wird durchgehend eine zentrale Rolle spielen, wogegen die Fundamentalfiltration nur in Zusammenhang mit dem ersten Hauptsatz auftreten wird.

Mit Hilfe der Orbit- und Fundamentalfiltration kann nun der Satz von Kuratowski 5.3.10 für den äquivalenten Fall formuliert und bewiesen werden. Dieser Beweis ist ein Paradebeispiel für das Prinzip der Induktion über die Orbittypen, welches noch mehrfach angewendet werden wird.

Theorem 1.1.4 *Es seien X, Y metrische G -Räume, G kompakte Liegruppe, $A \subseteq X$ abgeschlossen und invariant. Auf $X \setminus A$ operiere G mit endlich vielen Orbittypen $(H_1), \dots, (H_m)$, welche kanonisch geordnet seien. Die Menge Y^{H_i} sei lokal und global n_i -zusammenhängend für Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$. Gilt dann*

$$\dim (X_{(H_i)} \setminus A) / G \leq n_i + 1$$

für alle $i \leq m$, so besitzt jede äquivariante Abbildung $f : A \rightarrow Y$ eine äquivariante Fortsetzung $F : X \rightarrow Y$.

BEWEIS. Man betrachte die Orbitfiltration des Raumes $X \setminus A$. Diese ist einfach gegeben durch

$$X_1 \setminus A \subseteq X_2 \setminus A \subseteq \dots \subseteq X_m \setminus A.$$

Auf $X_1 \setminus A$ operiert G mit nur einem Orbittyp, eben (H_1) . Ferner operiert die Weylgruppe $W(H_1)$ frei auf $(X_1 \setminus A)^{H_1} = X_1^{H_1} \setminus A^{H_1}$. Somit steht hier, bzgl. $W(H_1)$, $X_1^{H_1}$ und A^{H_1} die Fundamentalfiltration zur Verfügung. Es gibt also eine endliche Filtration

$$A^{H_1} = X_1^{(l)} \subseteq X_1^{(l-1)} \subseteq \dots \subseteq X_1^{(0)} = X_1^{H_1}$$

und entsprechend der Definition dieser Filtration hat man die Fundamentalbereiche $D^{(j)}$, $D_0^{(j)}$ und die Mengen $L^{(j)} = X^{(j)} \setminus A^{H_1}$. Es sei nun $f : A \rightarrow Y$ beliebig äquivariant. Man setze

$$f^{H_1} = f|_{A^{H_1}} : A^{H_1} \rightarrow Y^{H_1} = Y_1^{H_1}.$$

Diese Abbildung soll nun nach dem Satz von Kuratowski in seiner nichtäquivalenten Version fortgesetzt werden über den zugehörigen Fundamentalbereich $D^{(0)}$. Zunächst kann man allgemein abschätzen:

$$\begin{aligned} \dim (D^{(j-1)}) &= \dim (L^{(j-1)} / W(H_1)) \\ &\leq \dim (L^{(0)} / W(H_1)) \\ &\leq \dim (X_1^{H_1} \setminus A^{H_1} / W(H_1)) \\ &\leq \dim ((X_{(H_1)} \setminus A) / G) \leq n_1 + 1 \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich

$$\dim ((X^{(l)} \cup D^{(l-1)}) \setminus X^{(l)}) \leq n_1 + 1.$$

Dies ist genau die Bedingung, um f^{H_1} von $X^{(l)} = A^{H_1}$ auf $X^{(l)} \cup D^{(l-1)}$ stetig fortzusetzen. Man beachte daß es hier keinen Sinn ergibt, von äquivanter Fortsetzung zu sprechen, da man auf einen Fundamentalbereich der Aktion fortsetzt. Mittels Lemma 5.2.11 findet man weiter eine $W(H_1)$ -äquivariante Fortsetzung über

$$W(H_1)(X^{(l)} \cup D^{(l-1)}) = X^{(l-1)}.$$

Dieses Verfahren kann nun induktiv für alle Elemente der Fundamentalfiltration durchgeführt werden, da die Dimensionsabschätzungen unabhängig vom speziellen Index waren. Man erhält also eine $W(H_1)$ -äquivalente Fortsetzung

$$F^{H_1} : X^{(0)} = X_1^{H_1} \rightarrow Y_1^{H_1}$$

der Abbildung f^{H_1} . Diese kann vermöge G -Äquivarianz eindeutig fortgesetzt werden zu einer äquivalenten Abbildung

$$f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$$

und $f_1|_{A_1} = f|_{A_1}$ gilt dann aus Äquivarianzgründen (vergleiche dazu 1.1.3). Damit ist der Induktionsanfang abgeschlossen. Der Induktionsschritt folgt aber fast genauso. Hat man bereits $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, so daß $f_i|_{A_i} = f|_{A_i}$ gilt, so setze man

$$f_i^{H_{i+1}} = f_i|_{X_i^{H_{i+1}}} : X_i^{H_{i+1}} \rightarrow Y_i^{H_{i+1}}.$$

Die Weylgruppe $W(H_{i+1})$ operiert frei auf $X_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus X_i^{H_{i+1}}$. Damit findet man in dieser Situation erneut eine Fundamentalfiltration mit $X_i^{H_{i+1}}$ anstelle von A . Auch die Dimensionsabschätzungen folgen genau wie oben (mit i anstelle von 1), so daß also eine $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung

$$F_{i+1} : X_{i+1}^{H_{i+1}} \rightarrow Y_{i+1}^{H_{i+1}}$$

von $f_i^{H_{i+1}}$ gefunden wird. Mit 1.1.3 folgt dann die Existenz einer G -äquivalenten Fortsetzung von f über ganz X . \square

Ein einfaches Korollar ist der Satz in einer lokalen Version.

Korollar 1.1.5 *Es seien dieselben Voraussetzungen gegeben wie in Satz 1.1.4 mit der Ausnahme, daß Y^{H_i} nicht notwendig global n_i -zusammenhängend sein muß. Ist dann der Kegel über Y metrisierbar, so besitzt f eine äquivalente Fortsetzung über eine invariante Umgebung $U \subseteq X$ von A .*

BEWEIS. Es sei $K = Y^+ \wedge I$ der Kegel über Y und G operiere in der offensichtlichen Weise. Dann ist $K^{H_i} = (Y^{H_i})^+ \wedge I$. Kegel sind kontrahierbar, also ist K^{H_i} lokal und global n_i zusammenhängend für $i = 1, \dots, m$. Die Komposition

$$A \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} K$$

besitzt daher eine äquivalente Fortsetzung $F : X \rightarrow K$. Man setze $U = F^{-1}(K \setminus \{*\})$, wobei $*$ der Grundpunkt des Kegels sei. Y ist ein Retrakt von $K \setminus \{*\}$ und die Komposition $r \circ F|_U : U \rightarrow Y$, wobei r die kanonische (äquivalente) Retraktion ist, ist dann die gewünschte lokale Fortsetzung von f . \square

Es ist von besonderem Interesse, wie sich im Verlauf einer Fortsetzung einer Abbildung in eine Kugel die Nullstellen verhalten. Darin geben die beiden folgenden Korollare einen Einblick.

Korollar 1.1.6 *Es sei G endliche Gruppe und G operiere auf der kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Es sei $A \subseteq M$ abgeschlossene und invariante Teilmenge von M , so daß die Aktion auf $M \setminus A$ frei ist. Es sei weiter V eine $(n + k)$ -dimensionale, orthogonale Darstellung von G , $k \geq 1$. Ist \mathbb{S} die Einheitskugel in V , so besitzt jede äquivariante Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{S}$ eine äquivariante Fortsetzung $F : M \rightarrow \mathbb{S}$.*

BEWEIS. Die Aktion von G auf $M \setminus A$ ist frei, besitzt also nur einen Orbittyp, und zwar $\{e\}$. Der Satz von Kuratowski besagt dann: Genau dann ist jede äquivariante Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{S}$ äquivariant fortsetzbar, wenn $\mathbb{S}^{\{e\}} = \mathbb{S}$ m -zusammenhängend ist und dann

$$\dim (X_{\{e\}} \setminus A / G) \leq m + 1.$$

Nun ist \mathbb{S} aber mindestens $(n - 1)$ -zusammenhängend und

$$\dim (X_{\{e\}} \setminus A / G) = \dim (X_{\{e\}} \setminus A) - \dim G \leq \dim X = n.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Für die zweite Folgerung ist noch das folgende Lemma vonnöten, dessen Beweis in [Bre] zu finden ist:

Lemma 1.1.7 *Es sei G eine endliche Gruppe, welche auf einer kompakten, glatten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M operiert. Es sei A eine abgeschlossene, invariante Teilmenge von M , so daß die Aktion auf $M \setminus A$ frei ist. Dann liegt in jeder Umgebung von A eine offene, invariante Umgebung U von A , so daß $M \setminus U$ eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Ferner besitzt $M \setminus U$ eine endliche, invariante Triangulation.*

Man beachte, daß dies insbesondere für $A = U = \emptyset$ gilt.

Korollar 1.1.8 *Es sei G eine endliche Gruppe, welche auf einer kompakten, glatten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M operiert. Es sei A eine abgeschlossene, invariante Teilmenge von M , so daß die Aktion auf $M \setminus A$ frei ist. Es sei V eine n -dimensionale Darstellung von G und \mathbb{B} die Einheitskugel in V . Dann besitzt jede äquivariante Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{B} \setminus \{0\}$ eine äquivariante Fortsetzung $F : M \rightarrow \mathbb{B}$, so daß die Menge $F^{-1}(0)$ endlich ist.*

BEWEIS. Die Kugel in V ist lokal k -zusammenhängend für jedes k und die Kugel in V ist metrisierbar. Die lokale Version des Satzes von Kuratowski 1.1.5, liefert daher eine Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{B} \setminus \{0\}$ von f über eine Umgebung \tilde{U} von A . Es sei $U \subseteq \tilde{U}$ eine offene Umgebung von A , wie sie in Lemma 1.1.7 gefunden wurde. Es sei M^{n-1} ein invariantes $(n - 1)$ -Skelett von $M \setminus U$, insbesondere also $(n - 1)$ -dimensional. Dann liefert der globale Satz von Kuratowski 1.1.4 eine äquivariante Fortsetzung

$$F : U \cup M^{n-1} \rightarrow \mathbb{B} \setminus \{0\}.$$

Die Aktion auf $M \setminus (M^{n-1} \cup U)$ ist frei, also existiert ein Fundamentalbereich. Dieser kann wieder nach Lemma 1.1.7 simplizial gewählt werden und man findet eine nichtäquivariante Fortsetzung über den Fundamentalbereich. Diese kann ebenfalls simplizial geschehen und besitzt damit insbesondere nur endlich viele Nullstellen. Das Standardargument (siehe Lemma 5.2.11) liefert die gewünschte Fortsetzung auf M . □

1.2 Der Hauptsatz für topologische Aktionen

Theorem 1.2.1 (Erster Hauptsatz): *Es sei G eine endliche Gruppe. G operiere auf einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M und auf der n -Sphäre $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}$. Es sei $N \subseteq M$ invariant und abgeschlossen. Auf $M \setminus N$ seien $(H_1), \dots, (H_m)$ die Orbitsarten der Aktion. Die Fixmengen \mathbb{S}^{H_i} seien lokal und global n_i -zusammenhängend, wobei $n_i = \dim M^{H_i} - 1$, $i = 1, \dots, m$. Dann gilt für je zwei äquivariante Abbildungen $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$, welche auf N äquivariant homotop sind:*

$$\deg \varphi \equiv \deg \psi \pmod{\text{ggT} \left(\left| G/H_1 \right|, \dots, \left| G/H_m \right| \right)}.$$

BEWEIS. Anfangen will ich mit einer Skizze des Beweises. Man definiere den Zylinder über M als

$$C = M \times I$$

und den Kegel über \mathbb{S} als

$$\mathbb{B} = \mathbb{S}^+ \wedge I.$$

Letzteres ist natürlich einfach die Kugel, welche von \mathbb{S} berandet wird. C und \mathbb{B} sind Mannigfaltigkeiten mit Rand. Man definiert nun eine Abbildung f von $M \times \{0, 1\} \cup N \times I$ in die Sphäre wie folgt: Auf $\partial C = M \times \{0, 1\}$ setze man f als φ auf dem Boden, ψ auf dem Deckel des Zylinders. Auf $N \times I$ sei f gegeben durch eine äquivariante Homotopie H zwischen φ und ψ . Diese Abbildung setze man äquivariant über ganz C fort. Im Allgemeinen wird dies keine Abbildung in die Sphäre mehr sein, sondern in die Kugel. Orientiert man C , so daß Boden und Deckel entgegengesetzt orientiert sind, dann ist der Grad solch einer Fortsetzung F gegeben durch die Differenz der Grade von φ und ψ , und dies ist die Größe, die interessiert. Der Grad von f ist dann identisch mit dem lokalen Grad um 0, da C kompakt ist. Es gilt also, die Nullstellen der Fortsetzung zu kontrollieren, um diesen lokalen Grad zu berechnen. Die Fortsetzung F wird induktiv über die Orbitsarten konstruiert, so daß gewisse Eigenschaften der Nullstellenmenge gegeben sind, aus denen dann leicht die gewünschte Aussage gefolgert werden kann.

Seien also C, \mathbb{B} wie oben und die Orientierung von C entsprechend gewählt. Die Orbitfiltration von C und \mathbb{B} ist dann gegeben durch $C_i = M_i \times I$, $\mathbb{B}_i = \mathbb{S}_i^+ \wedge I$. Es sei $H : N \times I \rightarrow \mathbb{S}$ eine äquivariante Homotopie mit $H_0 = \varphi$, $H_1 = \psi$. Man definiere die Abbildung

$$f : (M \times \{0, 1\}) \cup (N \times I) \rightarrow \mathbb{S}, \quad f(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) & t = 0 \\ H(x, t) & 0 < t < 1 \\ \psi(x) & t = 1 \end{cases}.$$

f soll nun induktiv über die Orbitsarten so fortgesetzt werden, daß die Fortsetzung $F_i : C_i \rightarrow \mathbb{B}_i$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) Es gibt Mengen T_1^i, \dots, T_i^i mit

$$F_i^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^i T_j^i \text{ und } T_r^i \cap T_s^i = \emptyset \text{ für } t \neq s.$$

- (2) Ist h_1, \dots, h_{s_j} ein Repräsentantensystem von G/H_j , $s_j = |G/H_j|$, so gibt es eine H_j -invariante, kompakte Teilmenge $K_j^i \subseteq C_i$ mit

$$T_j^i = \bigcup_{k=1}^{s_j} h_k(K_j)$$

und die Vereinigung ist disjunkt.

Insbesondere ist $T_j^i = G(K_j^i)$.

Im Induktionsanfang muß also die Abbildung f auf die Menge C_1 fortgesetzt werden. $W(H_1)$ operiert auf $C_1^{H_1}$ und die Operation ist frei, denn da (H_1) der einzige Orbittyp in C_1 ist, gilt $C_1^{H_1} = (C_1)_{H_1}$, und auf dieser Menge ist die Aktion frei (siehe Anhang). Somit erhält man die, nach Voraussetzung endliche, Fundamentalfiltration:

$$C_1^{H_1} = C^{(0)} \supseteq C^{(1)} \supseteq \dots \supseteq C^{(l)} = ((M \times \{0, 1\}) \cup (N \times \mathbf{I}))^{H_1}.$$

Man setze $A = (M \times \{0, 1\}) \cup (N \times \mathbf{I})$. Es soll der äquivariante Satz von Kuratowski angewendet werden. Dazu schätzt man wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \dim \left(C_{(H_1)}^{(i)} \setminus A^{H_1} / W(H_1) \right) &= \dim \left(C^{(i)} \setminus A^{H_1} / W(H_1) \right) \\ &= \dim \left(C^{(i)} \setminus A^{H_1} \right) - \dim W(H_1) \\ &= \dim \left(C^{(i)} \setminus A^{H_1} \right) \\ &\leq \dim C^{H_1} \\ &= \dim M^{H_1} + 1 \end{aligned}$$

Hierbei wurden der Satz von Morita 5.3.5, die Formel

$$\dim X/G = \dim X - \dim G$$

für freie Aktionen kompakter Liegruppen, siehe 5.3.6, sowie $\dim W(H_1) = 0$, da $W(H_1)$ endlich, also diskret ist, verwendet.

Nach Konstruktion der Fundamentalfiltration ist

$$\dim C^{(i)} < \dim C^{(i-1)},$$

damit erhält man für $i \geq 1$ sogar die schärfere Abschätzung

$$\dim \left(C_{(H_1)}^{(i)} \setminus A^{H_1} / W(H_1) \right) \leq \dim M^{H_1}.$$

Nach Voraussetzung ist \mathbb{S}^{H_1} $(\dim M^{H_1} - 1)$ -zusammenhängend, also liefert der äquivariante Kuratowski 1.1.4 eine $W(H_1)$ -äquivariante Fortsetzung $F_0 : C^{(1)} \rightarrow \mathbb{S}^{H_1} \subseteq \mathbb{B}^{H_1} \setminus \{0\}$ von $f_0|_{A^{H_1}} \cdot C^{(1)}$ ist aber definiert als

$$C^{(1)} = A^{H_1} \cup W(H_1) \left(D^{(0)} \setminus D_0^{(0)} \right),$$

wobei $D^{(0)}$ ein Fundamentalbereich der $W(H_1)$ -Aktion auf $C^{H_1} \setminus A^{H_1}$ ist und $D_0^{(0)}$ die entsprechende Teilmenge aus der Definition eines Fundamentalbereichs. Die Menge \mathbb{B}^{H_1} ist kontrahierbar, also gibt es nach dem gewöhnlichen Satz von Kuratowski 5.3.10 eine nicht-äquivariante Fortsetzung

$$\tilde{F}_0 : C^{(1)} \cup D^{(0)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_1}$$

von F_0 . Es sei K_1 die Menge der Nullstellen von \tilde{F}_0 in $D^{(0)}$. Diese ist kompakt und trivialerweise H_1 -invariant, da sie sogar H_1 -fix ist. Die Abbildung \tilde{F}_0 besitzt eine eindeutige $W(H_1)$ -äquivariante Fortsetzung

$$F^{H_1} : C^{(1)} \cup W(H_1)(D^{(0)}) = C^{H_1} \rightarrow \mathbb{B}^{H_1}$$

(siehe 5.2.11), deren Nullstellenmenge gerade die disjunkte Vereinigung der Mengen $g(K_1)$ ist, $g \in W(H_1)$. Diese Abbildung wiederum besitzt eine eindeutige G -äquivariante Fortsetzung $F_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{B}_1$, da es zu jedem Element $x \in C_1 \setminus A$ ein $g \in G$ gibt mit $gx \in C^{H_1}$, also $F_1(x) = g^{-1}F_1^{H_1}(gx)$ gesetzt werden muß, siehe auch 1.1.3. Auf A^{H_1} stimmt diese Abbildung mit f überein. Setzt man also $F_1(x) = f(x)$ für $x \in A \cap C_1 = A_1$, so ist $F_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{B}_1$ wohldefiniert, äquivariant, setzt f fort und ist stetig, da sie auf den abgeschlossenen Mengen A_1 und $G(C^{H_1})$ stetig ist und $A_1 \cup G(C^{H_1}) = C_1$ gilt. Die Nullstellenmenge dieser Abbildung ist leicht bestimmt:

$$\begin{aligned} F_1(x) = 0 &\Leftrightarrow g^{-1}F_1^{H_1}(gx) = 0 \\ &\Leftrightarrow gx \in W(H_1)(K_1) \\ &\Leftrightarrow x \in G(K_1) =: T_1 \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß F_1 eine Fortsetzung mit den gewünschten Eigenschaften ist und der Induktionsanfang ist damit abgeschlossen.

Es sei jetzt $F_i : C_i \rightarrow \mathbb{B}_i$ eine Abbildung mit den gegebenen Eigenschaften. Man definiere

$$f_i : C_i \cup (\partial C \cap C_{i+1}) \rightarrow \mathbb{B}_{i+1}, \quad f_i(x) = \begin{cases} F_i(x) & x \in C_i \\ f(x) & x \in \partial C \cap C_{i+1} \end{cases}.$$

Es gilt nun, f_i über die Menge C_{i+1} fortzusetzen. Lemma 1.1.3 gibt auch die Anleitung, wie dies geschehen soll: Mit $V_{i+1} = C_i^{H_{i+1}} \cup (\partial C \cap C^{H_{i+1}})$ ist $f_i|_{V_{i+1}}$ fortzusetzen über $C^{H_{i+1}}$. Dann liefert besagtes Lemma eine Fortsetzung über C_{i+1} , welche aus Äquivarianzgründen auf Boden und Deckel mit f übereinstimmen muß. Dabei muß aber nun auf die Nullstellen geachtet werden. Es sei h_1, \dots, h_{s_j} wieder ein Repräsentantensystem von G/H_j , $j \leq i$. Nach Induktionsannahme, da die Mengen $h_k(K_j^i)$ paarweise disjunkt und kompakt sind und K_j^i H_j -invariant ist, gibt es H_j -invariante offene Umgebungen $U(K_j^i)$ von K_j^i , so daß

$$h_r(U(K_j^i)) \cap h_s(U(K_j^i)) = \emptyset$$

und

$$U(K_r^i) \cap U(K_s^i) = \emptyset \text{ für } s \neq r.$$

Dann ist

$$U(T_j^i) := \bigcup_{k=1}^{s_j} h_k(U(K_j^i))$$

eine offene, G -invariante Umgebung von T_j^i . Der Schnitt $\tilde{U}(T_j^i) = U(T_j^i) \cap C_{i+1}^{H_{i+1}}$ ist dann offensichtlich eine $W(H_{i+1})$ -invariante offene Umgebung von $T_j^i \cap C_{i+1}^{H_{i+1}}$ und diese Menge ist kompakt. Nach 5.3.3 gibt es dann eine abgeschlossene, $W(H_{i+1})$ -invariante Umgebung $V(T_j^i)$ von $T_j^i \cap C_{i+1}^{H_{i+1}}$, so daß

$$\dim \partial V(T_j^i) < \dim C_{i+1}^{H_{i+1}}$$

erfüllt ist. Die Menge

$$U^{(i)} := \bigcup_{j=1}^i V(T_j^i)$$

ist dann eine $W(H_{i+1})$ -invariante Umgebung der Nullstellenmenge von F_i in $C_{i+1}^{H_{i+1}}$ und es ist

$$\dim \partial U^{(i)} < \dim C_{i+1}^{H_{i+1}}.$$

Es sollen keine Nullstellen auf $\partial U^{(i)}$ erzeugt werden, die alten und die eventuell entstehenden neuen Nullstellen sollen also voneinander separiert sein. Ferner sollen die neuen Nullstellen nach wie vor die geforderten Bedingungen erfüllen. Um dies zu erreichen sind mehrere Fortsetzungsschritte nötig.

Schritt 1: $f_i|_{V_{i+1}}$ soll $W(H_{i+1})$ -äquivariant auf den Rand von $U^{(i)}$ fortgesetzt werden und dort nullstellenfrei sein. Die Weylgruppe $W(H_{i+1})$ operiert frei auf $C_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus C_i^{H_{i+1}}$, denn wie bereits in der Beweisskizze erwähnt ist dies eine Teilmenge von $C_{H_{i+1}}$. Ferner ist

$$\partial U^{(i)} \setminus (\partial U^{(i)} \cup V_{i+1}) \subseteq C_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus C_i^{H_{i+1}},$$

also operiert auch hier die Weylgruppe frei. Nach Annahme ist $\mathbb{B}^{H_{i+1}} \setminus \{0\}$ lokal und global $(\dim M^{H_{i+1}} - 1)$ -zusammenhängend und

$$\dim \partial U^{(i)} < \dim C_{i+1}^{H_{i+1}} = \dim M^{H_{i+1}} + 1,$$

also ist $\mathbb{B}^{H_{i+1}} \setminus \{0\}$ $(\dim \partial U^{(i)} - 1)$ -zusammenhängend. Es wird die äquivariante Version des Satzes von Kuratowski angewendet auf $V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \subseteq V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \cup \partial U^{(i)}$ und Einschränkung der Abbildung f_i auf diese Menge. Abzuschätzen ist also

$$\dim \left(\left(\left(V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \cup \partial U^{(i)} \right)_{(H_{i+1})} \setminus \left(V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \right) \right) / W(H_{i+1}) \right).$$

Wegen

$$\left(\left(V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \cup \partial U^{(i)} \right)_{(H_{i+1})} \setminus \left(V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \right) \right) \subseteq \partial U^{(i)}$$

folgt mit 5.3.6, daß diese Dimension kleiner oder gleich $\dim \partial U^{(i)}$ ist. Das bedeutet aber gerade, daß der äquivalente Satz von Kuratowski anwendbar ist und man erhält eine $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung von f_i , eingeschränkt auf $V_{i+1} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)}$, in die Menge $\mathbb{B}^{H_{i+1}} \setminus \{0\}$. Diese wird zu einer $W(H_{i+1})$ -äquivalenten Fortsetzung

$$f'_i : V_{i+1} \cup \partial U^{(i)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}}$$

von $f_i|_{V_{i+1}}$ erweitert, einfach durch $f'_i|_{V_{i+1} \cap \overset{\circ}{U}^{(i)}} = f_i|_{V_{i+1} \cap \overset{\circ}{U}^{(i)}}$. Das übliche Argument zeigt, daß diese Abbildung stetig ist, da sie auf den beiden beteiligten abgeschlossenen Teilmengen stetig ist. Nach Konstruktion hat f'_i dieselben Nullstellen wie f_i , insbesondere keine auf dem Rand $\partial U^{(i)}$.

Schritt 2: Die Menge $\mathbb{B}^{H_{i+1}}$ ist kontrahierbar, also besitzt wieder nach dem äquivalenten Kuratowski f'_i eine $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung

$$f''_i : V_{i+1} \cup U^{(i)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}}.$$

Diese besitzt eventuell neue Nullstellen in $U^{(i)}$, aber als Fortsetzung von f'_i keine auf $\partial U^{(i)}$. Da die Fortsetzung äquivalent ist, bleibt die Nullstellenmenge invariant.

Schritt 3: f''_i soll auf $C_{i+1}^{H_{i+1}}$ fortgesetzt werden. Zunächst ist $C_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus (V_{i+1} \cup U^{(i)})$ ein freier $W(H_{i+1})$ -Raum, wiederum als Teilmenge von $C_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus C_i^{H_{i+1}}$. Somit steht die Fundamentalfiltration zur Verfügung

$$V_{i+1} \cup U^{(i)} = C_{i+1}^{(s)} \subseteq C_{i+1}^{(s-1)} \subseteq \dots \subseteq C_{i+1}^{(0)} = C_{i+1}^{H_{i+1}},$$

und sie ist endlich. Man erhält folgende Abschätzung für die Dimensionen ($r \geq 1$):

$$\begin{aligned} \dim \left(C_{i+1}^{(r+1)} \setminus C_{i+1}^{(s)} \right) &< \dim \left(C_{i+1}^{(r)} \setminus C_{i+1}^{(s)} \right) \\ &\leq \dim C_{i+1}^{H_{i+1}} \\ &= \dim M^{H_{i+1}} + 1 \end{aligned}$$

wegen $\dim C_{i+1}^{(r+1)} < \dim C_{i+1}^{(r)}$. Also ist $\dim \left(C_{i+1}^{(r)} \setminus C_{i+1}^{(s)} \right) \leq \dim M^{H_{i+1}}$, da die Dimensionen der Räume in der Filtration streng monoton fallen. Wie in Schritt 1 soll nun f''_i ohne neue Nullstellen fortgesetzt werden auf $C_{i+1}^{(1)}$. Man betrachte also

$$f''_i|_{(V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)}} : (V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}} \setminus \{0\}.$$

Der äquivalente Satz von Kuratowski ist anwendbar auf (in der Notation von 1.1.4) die Mengen

$$A = (V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)}$$

und

$$X = \left((V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \right) \cup \left(C_{i+1}^{(1)} \setminus \overset{\circ}{U}^{(i)} \right),$$

da $X \setminus A \subseteq C_{i+1}^{(1)}$, also

$$\dim (X_{(H_{i+1})} \setminus A) / W(H_{i+1}) \leq \dim C_{i+1}^{(1)} \leq \dim M^{H_{i+1}}$$

ist. Es gibt also eine $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung von $f_i'' \big|_{(V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus U^{(i)}}$ auf

$$\left((V_{i+1} \cup U^{(i)}) \setminus U^{(i)} \right) \cup \left(C_{i+1}^{(1)} \setminus U^{(i)} \right)$$

in den Raum $\mathbb{B}^{H_{i+1}} \setminus \{0\}$ und wie in Schritt 1 kann diese wieder mit f_i'' zusammengesetzt werden zu einer $W(H_{i+1})$ -äquivalenten Abbildung

$$f_i''' : V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(1)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}},$$

so daß f_i''' dieselben Nullstellen besitzt wie f_i'' . Insbesondere liegen diese alle in $U^{(i)}$.

Schritt 4: $W(H_{i+1})$ operiert frei auf $C_{i+1}^{H_{i+1}} \setminus (V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(1)})$. Es gibt also einen Fundamentalbereich $D_{i+1}^{(0)}$ dieser Aktion. Da $\mathbb{B}^{H_{i+1}}$ kontrahierbar ist, gibt es eine nicht-äquivalente Fortsetzung

$$f_i^{iv} : V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(1)} \cup D_{i+1}^{(0)} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}}.$$

Diese besitzt eventuell neue Nullstellen in $D_{i+1}^{(0)}$. Die Menge der Nullstellen von f_i^{iv} in $D_{i+1}^{(0)}$ werde mit L_{i+1} bezeichnet.

Schritt 5: Nun gibt es wieder eine eindeutig bestimmt $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung

$$f_i^v : C_{i+1}^{H_{i+1}} \rightarrow \mathbb{B}^{H_{i+1}}$$

von f_i^{iv} und die Nullstellen von f_i^v sind genau die Menge $W(H_{i+1})(L_{i+1})$, wobei $g(L_{i+1}) \cap h(L_{i+1}) = \emptyset$ für $g, h \in W(H_{i+1}), g \neq h$. Dies ist klar, da L_{i+1} in einem $W(H_{i+1})$ -Fundamentalbereich liegt. Es ist also f_i^v eine $W(H_{i+1})$ -äquivalente Fortsetzung von $F_i \big|_{C_i^{H_{i+1}}}$ und Lemma 1.1.3 liefert daher eine eindeutige G -äquivalente Fortsetzung

$$F_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow \mathbb{B}_{i+1},$$

von f_i^v und F_i . Diese stimmt nach Konstruktion auf $(C_{i+1} \cap A)^{H_{i+1}} \cup (C_i \cap A)$ mit f überein und die Eindeutigkeit der Fortsetzung von f_i^v zu F_{i+1} impliziert daher, daß letztere Abbildung auch auf $C_{i+1} \cap A$ mit f übereinstimmt.

Nun ist nachzuprüfen, daß F_{i+1} tatsächlich eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften ist. Man setze dafür

$$K_{i+1}^{i+1} = L_{i+1}, \quad T_{i+1}^{i+1} = G(K_{i+1}^{i+1})$$

und

$$K_j^{i+1} = K_j^i \cup (F_{i+1}^{-1}(0) \cap U(K_j^i)), \quad T_j^{i+1} = G(K_j^{i+1})$$

für $1 \leq j \leq i$. Die K_j^{i+1} sind nach Konstruktion H_j -invariant und kompakt und es ist $h_r(K_j^{i+1}) \cap h_s(K_j^{i+1}) = \emptyset$ für $r \neq s$. Nun ist $F_{i+1}(x) = 0$ genau dann, wenn eine der folgenden Situationen eintritt:

- (1) $x \in G(L_{i+1})$, da L_{i+1} die Nullstellenmenge von f_i^v in einem Fundamentalbereich der $W(H_{i+1})$ -Aktion ist.
- (2) $x \in K_j^i$ für ein $j \leq i$, da F_{i+1} Fortsetzung von F_i ist.
- (3) Ist weder (1) noch (2) der Fall, so muß x nach Konstruktion in $U^{(i)}$ liegen, also $x \in F_{i+1}^{-1}(0) \cap U(K_j^i)$ für ein $j \leq i$.

Dies zeigt, daß die Nullstellenmenge tatsächlich gegeben ist durch

$$F_{i+1}^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^{i+1} T_j^{i+1}.$$

Induktiv liefert dies also die Existenz einer Fortsetzung $F : C \rightarrow \mathbb{B}$ mit einer Nullstellenmenge der Form

$$F^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^m T_j, \quad T_r \cap T_s = \emptyset \text{ für } r \neq s$$

und $T_j = G(K_j)$ mit den weiteren Eigenschaften wie oben. Hieraus wird nun der Satz abgeleitet. Man wähle Umgebungen U_j der Mengen T_j , so daß die Mengen U_j paarweise disjunkt sind. Dies ist möglich, da die Mengen T_j paarweise disjunkt und kompakt sind. Die Einschränkung von F auf U_j sei mit F_j bezeichnet. Dann liefert die Ausschneidungseigenschaft des Grades

$$\deg F = \sum_{j=1}^m \deg F_j.$$

Mit dem üblichen Repräsentantensystem h_1, \dots, h_{s_j} von G/H_j ist

$$T_j = \bigcup_{k=1}^{s_j} h_k(K_j).$$

Es sei nun V_j eine Umgebung von K_j . Dann kann, da K_j kompakt ist und $h_p(K_j) \cap h_r(K_j) = \emptyset$ für $p \neq r$ gilt, V_j so gewählt werden, daß auch $h_p(V_j) \cap h_r(V_j) = \emptyset$ für $p \neq r$ ist und $h_r(V_j)$ ist eine Umgebung von $h_r(K_j)$. Man bezeichne die Restriktion von F auf $h_r(V_j)$ mit $F_{j,r}$. Wegen der Äquivarianz von F gilt dann

$$F_{j,r} = (h_r^{\mathbb{B}})^{-1} \circ F_{j,1} \circ h_r^C,$$

wobei $h_r^C : C \rightarrow C$ der Homöomorphismus ist, als der h_r auf C operiert, genauso $h_r^{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ der, durch den h_r auf \mathbb{B} operiert. Als Homöomorphismen haben h_r^C und $h_r^{\mathbb{B}}$ Grad ± 1 . Angenommen, die Grade der Homöomorphismen $g^C, g^{\mathbb{B}}$ wären verschieden für irgendein $g \in G$. Dann folgte aus der Multiplikativitätseigenschaft des Grades:

$$\deg F = \deg (g^{\mathbb{B}})^{-1} \cdot \deg F \cdot \deg g^C = -\deg F,$$

also $\deg F = 0$. Wegen $\deg F = \pm(\deg \varphi - \deg \psi)$ (siehe Anhang) folgt dann sofort die Behauptung. Man kann also weiterhin annehmen, daß die Grade von g^C und $g^{\mathbb{B}}$ gleich sind für alle $g \in G$. Dann liefert wieder die Multiplikatitivität aber

$$\deg F_{j_r} = \deg F_{j_1}.$$

Setzt man dies in die obigen Summenformeln für die Grade ein, so ergibt sich

$$\deg F = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{s_j} \deg F_{j_1} = \sum_{j=1}^m s_j \cdot \deg F_{j_1}.$$

Mit $a_j = \deg F_{j_1} \in \mathbb{Z}$ und der Tatsache, daß $s_j = |G/H_j|$ gilt, ergibt sich

$$\pm(\deg \varphi - \deg \psi) = \deg F = \sum_{j=1}^m a_j \cdot |G/H_j|,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Im Beweis des Satzes wurde nirgends explizit verwendet, daß der Zielraum die n -Sphäre ist, genauer wäre er auch für jede beliebige n -dimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit N durchgegangen, solange die Dimensionsbedingungen erfüllt sind. Diese implizieren in vielen Fälle jedoch bereits $N = \mathbb{S}^n$. Ist etwa $\{e\}$ ein Orbittyp der Aktion, so ist eine der Bedingungen gerade, daß N $(n-1)$ -zusammenhängend sein muß, und dies impliziert, daß N homöomorph zur Sphäre ist (der Beweis im Fall $n = 3$ wurde kürzlich von Perelman erbracht). Im Falle von glatten Aktionen erhält man das gleiche Resultat unter Verwendung des prinzipalen Orbittyps der Aktion. Es ist mir momentan unklar, ob die Bedingungen für beliebige topologische Aktionen implizieren, daß $N = \mathbb{S}^n$ sein muß. Falls dem nicht so ist, könnte der Satz für beliebige Zielmannigfaltigkeiten N wie oben formuliert werden.

1.3 Einige Beispiele

In diesem Abschnitt sollen ein paar Beispiele für den ersten Hauptsatz gegeben werden, vor allem natürlich solche, die bei konkreten Problemen etwas einfacher zu verwenden sind als der Satz selbst. Die Situation vereinfacht sich, wenn man in der Notation von Satz 1.2.1 $M = \mathbb{S}$ hat mit der gleichen G -Aktion. Ist dann die Dimensionsbedingung erfüllt, so folgt

Korollar 1.3.1 *Unter den obigen Voraussetzungen ist für jede äquivariante Abbildung $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, welche auf einer abgeschlossenen, invarianten Teilmenge $N \subseteq \mathbb{S}$ äquivariant homotop zur Identität ist*

$$\deg \varphi \equiv 1 \pmod{\text{ggT} |G/H_i|}.$$

BEWEIS. Dies ist wortwörtlich eine Spezialisierung von 1.2.1. □

Natürlich macht das Korollar nur dann eine sinnvolle Aussage, wenn der größte gemeinsame Teiler nicht 1 ist. Insbesondere muß also $\mathbb{S}^G \subseteq N$ sein, um einen nichttrivialen Sachverhalt darzustellen.

Ein einfaches Korollar aus dem Hauptsatz ist der bekannte Satz von Borsuk.

Korollar 1.3.2 (Satz von Borsuk): *Es sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine Abbildung, welche $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Dann ist $\deg f \equiv 1 \pmod{2}$.*

BEWEIS. Die kanonische \mathbb{Z}_2 -Aktion ist frei auf \mathbb{S}^n , somit ist die Dimensionsbedingung in Hauptsatz 1 trivialerweise erfüllt. Ferner ist der einzige Orbittyp der Aktion $(\{e\})$, und $|\mathbb{Z}_2/\{e\}| = 2$. f ist äquivariant bzgl. dieser Aktion. Man setze $N = \emptyset$ und $\psi = \mathbb{1}$, so folgt also

$$\deg f \equiv \deg \mathbb{1} = 1 \pmod{2}. \quad \square$$

Als Nächstes sollen die Resultate in gewissen Fällen auch für kompakte Liegruppen hergeleitet werden. Der Ansatz hierzu ist natürlich der, daß jede kompakte Liegruppe einen maximalen Torus besitzt und in einem (unendlichen) maximalen Torus liegen die p -Untergruppen dicht. Ein wichtiges Hilfsresultat ist

Lemma 1.3.3 *Es sei T ein Torus, der auf einer kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M sowie der n -Sphäre \mathbb{S} operiert. Für eine Primzahl p sei $\{G_i\}$ eine geordnete Kette von p -Untergruppen von T , so daß $\bigcup_i G_i$ dicht in T liegt. Dann gibt es ein $i_0 > 0$ mit $M^{G_i} = M^T$ und $\mathbb{S}^{G_i} = \mathbb{S}^T$ für alle $i \geq i_0$.*

BEWEIS. Man setze

$$X = \bigcap_i M^{G_i}.$$

Dann folgt $X = M^{G_j}$ für ein $j > 0$, da man ansonsten eine unendliche Kette abgeschlossener Untermannigfaltigkeiten erhält. Wäre nun $x \in X \setminus M^T$, dann gäbe es ein $t \in T$ mit $tx \neq x$. Man wähle eine Folge $g_i \in G_i$, so daß $g_i \rightarrow t$ gilt. Es gilt dann

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = tx \neq x.$$

Widerspruch. Das selbe Argument liefert ein \tilde{j} , so daß $\mathbb{S}^{G_{\tilde{j}}} = \mathbb{S}^T$ und mit $i_0 = \max(j, \tilde{j})$ folgt die Behauptung. \square

Mit diesem Resultat kann nun ein einfacher Satz über Aktionen kompakter Liegruppen aus dem Hauptsatz über endliche Gruppen hergeleitet werden.

Korollar 1.3.4 *Es seien alle Voraussetzungen des ersten Hauptsatzes erfüllt mit der Ausnahme, daß G nun eine unendliche kompakte Liegruppe ist. Es gelte ferner $M^G \subseteq N$. Dann ist*

$$\deg \varphi = \deg \psi.$$

BEWEIS. Es sei T ein maximaler Torus in G und H eine p -Untergruppe von T , p prim, so daß $M^H = M^T$. Diese existiert nach dem vorangehenden Lemma. Dann gilt also $M^H \subseteq N$ und nach dem ersten Hauptsatz ist

$$\deg \varphi \equiv \deg \psi \pmod{\text{ggT} \left| \frac{H}{H_i} \right|},$$

wenn H_i die Orbits der H -Aktion auf $M \setminus N$ sind. Nach Annahme ist aber $H_i \neq H$ und da H p -Gruppe ist, sind also alle Ausdrücke $\left| \frac{H}{H_i} \right|$ durch p teilbar. Dies liefert

$$\deg \varphi \equiv \deg \psi \pmod{p}.$$

p war aber eine beliebige Primzahl. Dies liefert die Behauptung. \square

Als letzte Anwendung soll noch ein interessantes Resultat über die Existenz äquivarianter Abbildungen von Sphären in beliebige Mannigfaltigkeiten bewiesen werden.

Satz 1.3.5 *Es sei G eine kompakte Liegruppe, welche frei auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension m sowie auf der k -Sphäre \mathbb{S}^k operiert. Gibt es eine äquivariante Abbildung $f : \mathbb{S}^k \rightarrow M$, so ist $k \leq m$ und ist $k = m$, so ist $\deg f$ relativ prim zu $|G|$, falls G endlich ist und $\deg f = \pm 1$, falls G unendlich ist.*

BEWEIS. Die Dimensionsbedingung folgt sofort aus dem äquivarianten Satz von Kuratowski, denn genau dann besitzt die leere Abbildung eine Fortsetzung über die ganze Sphäre, wenn $k \leq m$ ist, da es keine kompakten, n -dimensionalen, n -zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten gibt. Es sei nun $k = m$ und G endlich. Dann gibt es eine äquivariante Abbildung $h : M \rightarrow \mathbb{S}^k$ und es ist

$$\deg h \circ f = 1 \pmod{|G|}$$

nach Korollar 1.3.1, also ist $\deg f$ relativ prim zu $|G|$. Ist G unendlich, so findet man p -Untergruppen für beliebiges primes p und es folgt

$$\deg h \circ f = \deg h \cdot \deg f = 1,$$

also $\deg f = \pm 1$. \square

2 Der Grad äquivarianter Abbildungen bei glatten Aktionen

2.1 Der Hauptsatz für glatte Aktionen

Um eine schärfere Version des ersten Hauptsatzes für glatte Aktionen zu formulieren und letztlich zu beweisen ist eine umfangreichere Maschinerie vonnöten, als sie bisher verwendet wurde. Der erste Hauptsatz ist äquivalent zu der Aussage, daß unter den dortigen Bedingungen für die Abbildungen φ, ψ gilt:

$$\deg \varphi - \deg \psi = \sum_{i=1}^m a_i \cdot |G/H_i|.$$

In der Version für glatte Aktionen wird nicht mehr über alle Orbittypen summiert, sondern nur über „hinreichend schöne“. Um dies auszuformulieren wird wieder die Orbitfiltration von G -Räumen herangezogen. Es seien also X, Y G -Räume, G kompakte Liegruppe, die mit endlich vielen Orbittypen auf X und Y operiert. Die Orbittypen seien

$$(H_1), \dots, (H_m)$$

mit der üblichen Halbordnung. Die so entstehende Orbitfiltration

$$X_1 \subseteq \dots \subseteq X_m$$

werde mit F_X bezeichnet, analog

$$Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_m$$

mit F_Y .

Definition 2.1.1 Das Paar (X, Y) heißt (G, F_X, F_Y) -fortsetzbar, falls folgende zwei Bedingungen gelten.

- (a) Es gibt eine äquivariante Abbildung $f : X \rightarrow Y$.
- (b) Jede äquivariante Abbildung $g : X_i \rightarrow Y_i$ besitzt eine äquivariante Fortsetzung $G : X \rightarrow Y$.

Allgemeiner seien $A \subseteq X, B \subseteq Y$ H -invariante Unterräume für eine Untergruppe H von G , dann heißt das Paar (A, B) (H, F_X, F_Y) -erweiterbar, falls die Eigenschaften aus obiger Definition erfüllt sind für die Filtrationen $A_1 = A \cap X_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m = A \cap X_m = A$, $B_1 = B \cap Y_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_m = B \cap Y_m = B$ in Bezug auf H -äquivariante Abbildungen.

Das folgende Korollar klärt die Fortsetzbarkeitsfrage in einigen wichtigen Fällen. Es folgt sofort aus dem äquivarianten Satz von Kuratowski.

Korollar 2.1.2 Seien X, Y G -Räume und F_X, F_Y die Orbitfiltrationen. Gibt es eine äquivariante Abbildung $f : X_1 \rightarrow Y_1$ und ist für jedes $x \in X \setminus X_1$ die Menge Y^{G_x} lokal und global $(\dim X^{G_x} - \dim W(G_x))$ -zusammenhängend, dann ist das Paar (X, Y) (F, F_X, F_Y) -fortsetzbar.

BEWEIS. Der Satz von Kuratowski liefert die äquivariante Fortsetzbarkeit jeder Abbildung $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ über X und die Existenz einer äquivarianten Abbildung von X nach Y ist daher wegen der Existenz der Abbildung f gesichert. \square

Im Folgenden bezeichnet $Or(M)$ die Menge der Orbits von M . Sind $(H), (K) \in Or(M)$ und $(H) < (K)$, so ist H konjugiert zu einer Untergruppe von K und die Repräsentanten werden daher so gewählt, daß $H \subseteq K$ gilt. In diesem Fall ist $M^K \subseteq M^H$ und es ist dann von Interesse, wie sich M^K in M^H verhält. Die folgenden Gruppen operieren in kanonischer Weise auf den so entstehenden Mengen.

Es sei G eine kompakte Liegruppe, $K \subseteq H$ abgeschlossene Untergruppen von G . Man setze

$$W(H, K) = N(K) \cap H / K$$

$$N(K, H) = N(K) / N(K) \cap H.$$

Man beachte, daß $N(K, H)$ im Allgemeinen keine Gruppe ist. $N(K)$, der Normalisator von K , ist die größte Untergruppe von G , welche auf M^K operiert. Die Gruppe $W(H, K)$ stellt also, anschaulich gesprochen, den Teil der Aktion dar, welcher zwischen M^H und M^K liegt, denn auf M^H operiert $W(H, K)$ trivial. Die Mengen $N(H, K)$ spielen später eine Rolle in der Formulierung des Hauptsatzes. Translatiert man einen Punkt $x \in C^H \setminus C^K$ mit $W(H)$, so ist $|N(K, H)|$ gerade die Mächtigkeit seines Orbits.

Die folgende Situation sei für den Rest des Kapitels zugrunde gelegt. Die kompakte Liegruppe G operiere glatt auf kompakten, glatten, n -dimensionalen, orientierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N durch Isometrien. Die $W(H)$ -Aktionen auf N^H und M^H seien konkordant, das heißt $\deg g_M = \deg g_N$ für alle $g \in W(H)$ (im Beweis zum ersten Hauptsatz hat man gesehen, daß diese Forderung nicht einschränkend ist, da sonst der Grad beliebiger äquivarianter Abbildungen Null ist). Es sei $f : M \rightarrow N$ äquivariant. Man unterscheidet nun einige Klassen von Orbits:

Definition 2.1.3 Es sei (B) ein Orbit von M und $\dim M^B = \dim N^B$. Dann bezeichne $O_*(M, N, B)$ die Menge aller Orbits (H) von M mit $(B) \leq (H)$ und $\dim M^H = \dim N^H$. Ferner sei $O_*(M, N) = O_*(M, N, \{e\})$ die Menge aller Orbits, die die Dimensionsbedingung erfüllen. Für $(A) \in O_*(M, N, B)$ bezeichne $O_*(M, N, A, B)$ die Menge aller Orbits $(K) \in O_*(M, N)$ mit $(B) \leq (K) \leq (A)$.

Die Orbits in $O_*(M, N)$ werden diejenigen sein, die überhaupt eine Rolle in der Vergleichsformel spielen. Für die restlichen wird gezeigt werden, daß sie für den Abbildungsgrad irrelevant sind.

Es sei nun $N = S(V) = S$ eine Sphäre in einer n -dimensionalen, orthogonalen Darstellung V der Gruppe G . Dies wird der Fall sein, der dem Vergleichssatz zu Grunde liegt. Man unterscheidet die Orbits in $O_*(M, S)$ noch genauer. Es sei $(B) \in O_*(M, S)$ und $(A) \in O_*(M, S, B)$. Es sei $p \in M^A$ ein Punkt mit Isotropiegruppe A . M^A besitzt eine tubulare Umgebung in M^B , diese ist gegeben durch eine äquivariante Einbettung des Normalenbündels $N(M^A)$ in M^B . Insbesondere kann man also das Bild der Einheitssphäre in $N_p(M^A)$ als Sphäre um p orthogonal zu M^A ansehen. Diese Sphäre sei mit $\sigma_p(A, B)$ bezeichnet. Weiter sei W das orthogonale Komplement von V^A in V^B . Der Normalisator $N(B)$ von

B operiert auf M^B , ebenso A , also operiert $N(B) \cap A$ auf $\sigma_p(A, B)$. Ferner operiert diese Gruppe natürlich auf der Einheitskugel $S(W) = S(A, B)$ in W . Man betrachte wie oben definiert die Filtrationen F_M und F_S der Räume M und S .

Definition 2.1.4 Es sei B gewählt wie oben. $O_{**}(M, S, B)$ bezeichne die Menge aller Orbittypen $(A) \in O_*(M, S, B)$, so daß das Paar $(\sigma_p(A, B), S(A, B))$ $(N(B) \cap A, F_M, F_S)$ -erweiterbar ist. Ebenso sei $O_{**}(M, S) = O_{**}(M, S, \{e\})$ und für $(A) \in O_{**}(M, S, B)$ sei $O_{**}(M, S, A, B)$ die Menge aller $(K) \in O_{**}(M, S, B)$ mit $(B) \leq (K) \leq (A)$.

Für Orbittypen in O_{**} sind also äquivariante Abbildungen, die auf einem Filtrationsunterraum einer Sphäre bereits definiert sind, über diese fortsetzbar und man muß nicht aus der Sphäre „hinauslaufen“. Die nächste Definition ist von fundamentaler Bedeutung für die Vergleichsformel.

Definition 2.1.5 Es sei $(B) \in O_*(M, S)$ und $(A) \in O_{**}(M, S, B)$ sowie $(A) \neq (B)$. Nach Definition von $O_{**}(M, S, B)$ gibt es dann eine $W(A, B)$ -äquivariante Abbildung (man beachte, daß $W(A, B)$ und $N(B) \cap A$ auf gleiche Weise auf den beteiligten Mengen operieren) $f_{A,B} : \sigma_p(A, B) \rightarrow S(A, B)$. Nach Definition eines erweiterbaren Paares kann die Abbildung $f_{A,H} : \sigma_p(A, H) \rightarrow S(A, B)$ für $(H) \in O_{**}(M, S, A, B)$ so gewählt werden, daß $f_{A,B}|_{\sigma_p(A,H)} = f_{A,H}$ ist. Mit solch einer konsistenten Wahl sei dann der Äquivarianzindex $\alpha(M, S, A, B)$ definiert durch

$$\alpha(M, S, A, B) = \alpha(A, B) = \deg f_{A,B}.$$

Außerdem sei $\alpha(B, B) = 1$.

Damit kann der Vergleichssatz für glatte Aktionen formuliert werden:

Theorem 2.1.6 (Zweiter Hauptsatz): *Es sei G eine endliche Gruppe, M eine kompakte, orientierbare Riemannsche G -Mannigfaltigkeit und G operiere durch Isometrien. V sei eine orthogonale G -Darstellung, $S(V) = \mathbb{S}$ die Einheitskugel in V . G operiere effektiv auf M und alle Fixmengen M^H seien orientierbar. Es seien $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$ äquivariante Abbildungen. Dann gibt es für $(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S})$ Zahlen $b(K) \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ gilt:*

$$\deg \varphi|_{M^H} - \deg \psi|_{M^H} = \sum_{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|$$

wobei die $\alpha(K, H)$ die entsprechenden Äquivarianzindizes bezeichnen.

2.2 Beweis des Hauptsatzes

Zunächst möchte ich wieder eine grobe Beweisskizze angeben. Das Prinzip ist genau das gleiche wie im ersten Hauptsatz, man betrachtet den Zylinder über M , legt die Abbildung φ auf den Boden, ψ auf den Deckel, und sucht eine Fortsetzung dieser Abbildung über den ganzen Zylinder in die Kugel in V . Behält man die Nullstellen dieser Fortsetzung unter Kontrolle, so kann man den lokalen Grad um 0 berechnen, welcher aber mit dem Grad selbst übereinstimmt

und dies liefert das Resultat. In der Vergleichsformel stehen nun nur Orbittypen aus O_{**} . Es ist also Folgendes zu tun: Orbittypen (H) mit $\dim M^H < \dim S^H$ sollen keine Rolle spielen. Dies ist auch anschaulich klar, denn da die Dimension des Zielraums echt größer ist, als die des Urbildraums kann man erwarten, daß der Grad lokal verschwindet. In der Tat wird es hier keine Probleme geben, das entscheidende Hilfsmittel ist Korollar 1.1.6, welches unter geeigneten Voraussetzungen die äquivariante Fortsetzung ohne neue Nullstellen gestattet, also so, daß in diesem Fall die Fortsetzung den lokalen Grad nicht ändert.

Ebenso sollen Orbittypen (H) mit $\dim M^H > \dim S^H$ keine Rolle spielen. Um diese wird sich das erste Hauptlemma, derer es drei geben wird, kümmern. Man betrachtet für eine Fortsetzung von $C^{>H}$ auf C^H für einen festen Orbittyp die Nullstellen, welche in $C^H \setminus C^{>H}$ liegen. Das Hauptlemma liefert nun das Verschwinden des Grades lokal um diese Nullstellen, falls dieser Orbittyp eben $\dim M^H > \dim S^H$ erfüllt. Gleichzeitig liefert es auch ein Verfahren, um die Beiträge der O_* -Orbittypen durch O_{**} -Orbittypen auszudrücken. Was damit gemeint ist, wird im Beweis selbst klar werden.

Die zwei weiteren Hauptlemmata befassen sich allgemein damit, eine handhabbare Fortsetzung auf den Zylinder zu finden. Genauer findet sich eine Art tubulare Umgebung um die Menge $M^{>H}$ in M^H für einen festen Orbittyp (H) , welche eine invariante Blätterung besitzt. Der Rand dieser Umgebung wird eine glatte Mannigfaltigkeit sein. Hauptlemma 3 liefert gewisse äquivariante Abbildungen auf dem Rand, deren Nullstellen kontrolliert werden können. Mittels der invarianten Blätterung wird dann eine Abbildung, die auf $M^{>H}$ bereits gegeben ist, einfach per konvexer Homotopie mit diesen vorgefertigten Abbildungen auf dem Rand der Umgebung verbunden. Es wird sich dann zeigen, daß keine neuen Nullstellen innerhalb dieser Umgebung erzeugt wurden und außerhalb nur endlich viele. Dies gestattet dann die Berechnung des Grades der Fortsetzung, wenn man das Verfahren induktiv über alle Orbittypen anwendet.

Es werden also nun die drei Hauptlemmata präsentiert. Das erste beruht auf einer tieferen Verbindung von Abbildungsgrad und Thomklasse, für Details siehe Anhang oder [Do].

Lemma 2.2.1 *Es sei M eine n -dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit, V ein n -dimensionaler Vektorraum, $D \subseteq V$ ein k -dimensionaler Unterraum und $f : M \rightarrow V$ sei eigentlich und stetig. Es sei $W \subseteq V$ offen, so daß $D \setminus \{0\}$ ein Deformationsretrakt von W ist und*

$$W \cup (V \setminus D) = V \setminus \{0\}$$

gilt, etwa eine ε -Aufdickung von $D \setminus \{0\}$. Es bezeichne K die Nullstellenmenge von f . Existiert dann eine offene Menge $U \subseteq f^{-1}(W)$, so daß $U \cup (M \setminus E) = M \setminus K$ für eine Obermenge E von $f^{-1}(D)$ ist, dann gilt: Ist $f^(\tau_D^V) = 0$, so ist auch $\deg_0 f = 0$.*

BEWEIS. Es sei \mathcal{O}_0^V die Fundamentalklasse um $\{0\}$ in V und \mathcal{O}_K^U die Fundamentalklasse um K in U . f induziert eine Abbildung von Tripeln

$$f : (M, U, U \setminus E) \rightarrow (V, W, V \setminus D).$$

Es folgt zunächst mit 5.5.2

$$0 \neq \tau_D^V \cap \mathcal{O}_0^V = i_*(\mathcal{O}_0^D) \in H_k(V, W) \cong H_k(D, D \setminus \{0\}),$$

da \mathcal{O}_0^D ein Erzeuger ist und $H_k(D, D \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ ist. Da f aber die besagte Abbildung von Tripeln induziert, schließt man mit Hilfe von 5.5.1

$$\begin{aligned} f_*(f^*(\tau_D^V) \cap \mathcal{O}_K^U) &= \tau_D^V \cap f_*(\mathcal{O}_K^U) \\ &= \tau_D^V \cap (\deg_0 f \cdot \mathcal{O}_0^V) \\ &= \deg_0 f \cdot (\tau_D^V \cap \mathcal{O}_0^V) \\ &= \deg_0 f \cdot i_*(\mathcal{O}_0^D). \end{aligned}$$

Ist nun $\deg_0 f \neq 0$, so auch der obige Ausdruck und dies impliziert $f^*(\tau_D^V) \neq 0$. \square

Dieses Resultat wird helfen, das erste Hauptlemma zu beweisen. Dieses wird dazu dienen die Orbittypen (H) mit $\dim M^H > \dim \mathbb{S}^H$ aus der Vergleichsformel zu eliminieren. Man stelle sich die Situation in diesem Lemma wie folgt vor: M ist die Mannigfaltigkeit C^H , $C = M \times I$, für einen Orbittyp (H) , N ist die Mannigfaltigkeit C^L für ein $(L) > (H)$, und die Mannigfaltigkeiten N_i sind gegeben durch C^{K_i} für Orbittypen (K_i) mit $(H) < (K_i) < (L)$. Die Unterräume D_i entsprechen in dieser Interpretation dann natürlich den Räumen mit Einheitskugel B^{K_i} , $B = \mathbb{S}^+ \wedge I$.

Hauptlemma 1 *Es sei M eine kompakte, orientierbare, n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $N \subseteq M$ kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension l . $U \subseteq M$ sei offen und $N \cap U$ zusammenhängend. V sei ein n -dimensionaler Vektorraum und $D \subseteq V$ ein k -dimensionaler Unterraum mit $l \geq k \geq 1$. Es sei $f : U \rightarrow V$ stetig und eigentlich. Man setze $K = f^{-1}(0)$. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(I) *Es gibt kompakte Untermannigfaltigkeiten N_1, \dots, N_s von M sowie Untervektorräume D_1, \dots, D_s von V , $\dim D_j < \dim V$, mit $N = N_0 \subseteq N_j$ und $D = D_0 \subseteq D_j$ für alle $1 \leq j \leq s$. Weiter sei $f(N_j \cap U) \subseteq D_j$ für $0 \leq j \leq s$.*

(II) *Zu jedem $z \in U$, welches in mindestens einer der Mannigfaltigkeiten N_i enthalten ist, gibt es einen Index j_z , so daß gilt*

$$z \in N_i \implies N_{j_z} \subseteq N_i.$$

(III) *Es sei*

$$E = \{z \in \bigcup_{j=0}^s N_j \mid \dim N_{j_z} > \dim D_{j_z}\}.$$

Dann ist $f^{-1}(D) \subseteq N \cup E$.

(IV) *f besitzt Nullstellen in N , also $N \cap K \neq \emptyset$.*

(V) *Ist $\dim N > \dim D$, so gibt es einen echten Oberraum P von D , $D \subsetneq P \subseteq V$, so daß in jeder Umgebung von 0 Punkte aus $P \setminus D$ liegen, welche das Bild von f nicht trifft.*

Dann gilt:

(a) *Ist $l > k$ so ist $\deg_0 f = 0$.*

- (b) Ist $l = k$, so ist entweder ebenfalls $\deg_0 f = 0$, oder um jedes $x \in N \cap K$ gibt es eine Scheibe $\sigma \subseteq U$ in einer tubularen Umgebung von N in U orthogonal zu N , so daß $f(\partial\sigma) \subseteq V \setminus D$.

BEWEIS. Die Bedingung $f^{-1}(D) \subseteq E$ dient dazu, Lemma 2.2.1 anwenden zu können. Es sei nämlich W ein eindimensionaler Unterraum, welcher keinen der Unterräume D_j mit $\dim D_j < \dim N_j$ nichttrivial schneidet. Die Menge $W_1 = V \setminus W$ erfüllt dann $N_k \setminus K \subseteq f^{-1}(D_k \setminus \{0\}) \subseteq f^{-1}(W_1)$, also ist

$$(U \setminus (N \cup E)) \cup f^{-1}(W_1) = U \setminus K.$$

Damit liegt also die gewünschte Verbindung von Thomklasse und Abbildungsgrad vor. Es werden nun die beiden Fälle unterschieden.

- (a) Der lokale Grad $\deg_0 f$ ist lokal konstant, also gilt $\deg_0 f = \deg_y f$ für jedes y in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0. Wählt man gemäß Bedingung (V) ein y , welches nicht im Bild von f liegt, so daß $\deg_0 f = \deg_y f$ ist, so folgt wegen $\deg_y f = 0$ die Behauptung.
- (b) Ist $\deg_0 f = 0$, so ist nichts zu zeigen. Also sei $\deg_0 f \neq 0$. Damit ist auch $f^*(\tau_D^V) \neq 0$, wie anfangs festgestellt wurde. Da $U \cap N$ zusammenhängend ist, ist nach Definition der Thomklasse (siehe [Bre2], S.371) diese repräsentiert durch eine Kokette dual zu einer Transversalklasse von N , also einer Kette, welche durch eine Scheibe transversal zu D in V repräsentiert wird. Dies bedeutet aber gerade, daß $f(\partial\sigma) \cap D$ nicht trifft für eine hinreichend kleine Scheibe σ um jeden beliebigen Punkt in N , da sonst $f^*(\tau_D^V) = 0$ wäre. Insbesondere gilt dies für Scheiben um die Punkte in $N \cap K$. \square

Das zweite Hauptlemma soll nun hinreichend schöne Umgebungen von $M^{>H}$ in M^H liefern. Man beachte, daß $M^{>H}$ genau die Menge der nichtprinzipalen Orbits in M^H bzgl. der Aktion der Weylgruppe $W(H)$ ist. Da dies die einzige Situation ist, in der die weiteren Resultate benötigt werden, wird im Folgenden angenommen, daß $\{e\}$ der prinzipale Orbittyp der Aktion ist. Dies erleichtert lediglich die Notation, die Beweise funktionieren analog bei beliebigem prinzipalen Orbittyp. Es wird zunächst ein (gewöhnliches) Lemma bewiesen, aus dem das Hauptlemma auf triviale Weise folgen wird.

Lemma 2.2.2 *Es sei G eine endliche Gruppe, welche durch Isometrien auf der glatten, kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M operiert. Es sei M' die Menge aller nichtprinzipalen Orbits, $\{e\}$ der prinzipale Orbittyp. Dann gibt es eine abgeschlossene invariante Umgebung $U \subseteq M$ von M' , ein glattes G -invariantes Funktional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $c > 0$ mit*

- f ist nicht negativ auf U und $f^{-1}(0) = M'$.
- $\nabla f \neq 0$ in $f^{-1}((0, c])$.

BEWEIS. Nach Annahme ist der prinzipale Orbittyp der Aktion $\{e\}$, daher ist

$$M' = \bigcup_{(H) \in \text{Or}(M), H \neq \{e\}} M^H$$

Es sei $Or_0(M)$ die Menge der minimalen nichtprinzipalen Orbittypen von M bzgl. der Standardordnung auf $Or(M)$. Für $(H) \in Or_0(M)$ ist dann $H \neq \{e\}$ und M^H ist in keinem M^K enthalten für $(K) \in Or(M)$, $(\{e\}) \neq (K) \neq (H)$. Man setze

$$\delta_1 = \min \{d(M^H, M^K), (H), (K) \in Or_0(M), M^H \cap M^K = \emptyset\}.$$

Dabei bezeichnet d die Riemannsche Abstandsfunktion. Es sei $F_H(x) = d(x, M^H)$ für $(H) \in Or_0(M)$. Dann ist F_H glatt in einer Umgebung von M^H . Da $Or_0(M)$ endlich ist gibt es also ein δ_2 mit $0 < \delta_2 < 1$, so daß F_H glatt ist auf der Menge $F_H^{-1}([0, \delta_2])$ für alle $(H) \in Or_0(M)$. Man wähle $0 < \delta < \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Es sei $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine glatte Funktion mit $\omega(\frac{\delta}{2}) = 1$ und

$$\omega \begin{cases} \text{ist Identität} & \text{auf } [0, \frac{\delta}{3}] \\ \text{ist streng monoton steigend} & \text{auf } [\frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{2}] \\ \text{ist konstant 1} & \text{auf } [\frac{\delta}{2}, \infty). \end{cases}$$

Dann ist das Funktional

$$r_{\delta, H} = \omega \circ F_H : M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

glatt und es gilt

$$r_{\delta, H}(x) \neq 1 \implies d(x, M^H) < \frac{\delta}{2}.$$

Man definiere nun ein Funktional

$$r_\delta(x) = \prod_{(H) \in Or_0(M)} r_{\delta, H}(x).$$

r_δ ist offensichtlich glatt. Ferner besitzt r_δ die folgenden weiteren Eigenschaften:

- (i) r_δ ist invariant.
- (ii) $(r_\delta)^{-1}(0) = M'$.
- (iii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in M$ mit $0 < r_\delta(x) < 1$ gilt:

$$L_\delta := \bigcap_{r_{\delta, H}(x) \neq 1} M^H \neq \emptyset$$

und

$$d(x, L_\delta) < \varepsilon.$$

- (iv)

$$\nabla r_\delta(x) = r_\delta(x) \cdot \sum_{r_{\delta, H}(x) \neq 1} \frac{\omega'(F_H)(x)}{r_{\delta, H}(x)} \cdot \nabla F_H(x)$$

Im Einzelnen sieht man das so ein:

(i)

$$\begin{aligned} r_\delta(gx) &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} r_{\delta, H}(gx) \\ &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} \omega \circ F_H(gx) \\ &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} \omega \circ d(gx, M^H) \\ &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} \omega \circ d(x, g^{-1}M^H) \\ &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} \omega \circ d(x, M^{g^{-1}Hg}) \\ &= \prod_{(H) \in Or_0(M)} \omega \circ d(x, M^H) \\ &= r_\delta(x) \end{aligned}$$

wobei die Invarianz der Riemannschen Abstandsfunktion verwendet wurde.

(ii) Das ist klar nach Definition von r_δ und der obigen Darstellung von M' .

(iii) Alle Mengen M^H sind kompakt und nach bisheriger Wahl von δ sind die beteiligten M^H paarweise nicht-disjunkt. Es gilt allgemein für kompakte, paarweise nicht-disjunkte Teilmengen K_1, \dots, K_m eines metrischen Raums M : Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß für alle $x \in M$ mit $d(x, K_j) < \delta$ für mindestens ein j gilt:

$$L_\delta = \bigcap_{d(x, K_i) < \delta} K_i \neq \emptyset, \quad d(x, L_\delta) < \varepsilon.$$

Denn für kompakte Mengen A, B findet man stets $\delta' > 0$ mit

$$d(x, A) < \delta'', \quad d(x, B) < \delta'' \implies d(x, A \cap B) < 2 \cdot \delta''$$

für alle $\delta'' < \delta'$. Man wähle daher δ' so klein, daß diese Eigenschaft für je zwei Mengen der Form $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_r}$ und $K_{i_{r+1}} \cap \dots \cap K_{i_s}$, $s \leq m$, erfüllt ist. Man setze weiter

$$\tilde{\delta} = \min \{d(K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_r}, K_{i_{r+1}} \cap \dots \cap K_{i_s}) \mid s \leq m, \\ d(K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_r}, K_{i_{r+1}} \cap \dots \cap K_{i_s}) > 0\}$$

und damit

$$\delta = \min\left(\frac{\tilde{\delta}}{5}, \delta', \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Gelte nun

$$d(x, K_{i_1}) < \delta, \dots, d(x, K_{i_s}) < \delta$$

und $s \geq 1$. Angenommen, es wäre $L_\delta = \emptyset$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß dann

$$K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_r} \neq \emptyset, \quad K_{i_{r+1}} \cap \cdots \cap K_{i_s} \neq \emptyset.$$

Also ist

$$5 \cdot \delta \leq \tilde{\delta} \leq d(K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_r}, K_{i_{r+1}} \cap \cdots \cap K_{i_s}).$$

Aber

$$\begin{aligned} d(K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_r}, K_{i_{r+1}} \cap \cdots \cap K_{i_s}) &\leq d(x, K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_r}) + d(x, K_{i_{r+1}} \cap \cdots \cap K_{i_s}) \\ &\leq 2 \cdot \delta + 2 \cdot \delta = 4 \cdot \delta, \end{aligned}$$

Widerspruch. Somit ist $L_\delta \neq \emptyset$ und nach Wahl von δ folgt auch sofort $d(x, L_\delta) < \varepsilon$.

(iv) Dies ist einfache Anwendung der Kettenregel.

Man wähle nun $\delta > 0$ so klein, daß einerseits $\delta < \min \{\delta_1, \delta_2\}$ und andererseits L_δ in obiger Notation nicht leer ist für alle $x \in M$ mit $0 < r_\delta(x) < 1$. Es sei nun $x \in M$ mit dieser Eigenschaft. Es sei γ die Geodätische mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = \nabla F_H(x)$. Entlang γ wird also $F_H(\gamma(t))$ kleiner und da M kompakt ist, gibt es ein minimales $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $F_H(\gamma(t_0)) = 0$. Es sei $y = \gamma(t_0)$. Dann ist natürlich $y \in M^H$ und nach Definition ist die Länge der Geodätischen zwischen x und y , bezeichnet mit $[x, y]$, gerade $F_H(x)$. Man wähle weiter ein $z \in L_\delta$, so daß die Länge der Geodätischen zwischen x und z gerade $l = d(x, L_\delta)$ ist. Es bezeichne $v \in T_x(M)$ den Geschwindigkeitsvektor dieser Geodätischen im Punkt x und α_H den Winkel zwischen $\nabla F_H(x)$ und v . Dann gilt

$$\cos \alpha_H = \frac{F_H(x)}{l} + \tau_H(x).$$

Da $L_\delta \subseteq M^H$ ist, folgt, daß für hinreichend kleines l der Ausdruck τ_H ebenfalls klein wird. Da M kompakt ist, gibt es also ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß gilt:

$$d(x, L_\delta) < \varepsilon_0 \implies \left| \cos \alpha_H(x) - \frac{F_H(x)}{d(x, L_\delta)} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{F_H(x)}{d(x, L_\delta)}.$$

Man verkleinere also gegebenenfalls nochmals δ , so daß Eigenschaft (iii) für $\varepsilon = \varepsilon_0$ erfüllt ist. Für dieses δ und ein beliebiges $c \in (0, 1)$ erfüllt r_δ dann die Anforderungen. Es ist nur noch nachzuweisen, daß $\nabla r_d(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ mit $0 < r_d(x) < 1$ ist. Dazu berechne man $\langle v, \nabla r_d(x) \rangle$. Nach (iv) gilt wegen $\|\nabla F_H(x)\| = 1$:

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla r_d(x) \rangle &= r_d(x) \cdot \sum_{r_{d,H}(x) \neq 1} \frac{\omega'(F_H(x))}{r_{d,H}(x)} \cdot \langle v, \nabla F_H(x) \rangle \\ &= r_d(x) \cdot \sum_{r_{d,H}(x) \neq 1} \frac{\omega'(F_H(x))}{r_{d,H}(x)} \cdot \cos(\alpha_H(x)) \cdot \|v\| \\ &\geq \frac{\|v\| \cdot r_d(x)}{2} \cdot \sum_{r_{d,H}(x) \neq 1} \frac{\omega'(F_H(x)) \cdot F_H(x)}{l \cdot r_{d,H}(x)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Hauptlemma 2 *Es sei G eine endliche Gruppe und G operiere effektiv auf einer glatten kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit M durch Isometrien. Es sei M' die Menge der nicht-prinzipalen Orbits. Dann gibt es eine abgeschlossene, invariante Umgebung U von M' , so daß gilt:*

- ∂U ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von M .
- Es gibt eine glatte Abbildung

$$\Gamma : \partial U \times I \rightarrow U$$

mit $\Gamma(x, 0) \in M'$, $\Gamma(x, 1) = x$ und die Mengen $\Gamma(x, (0, 1])$ für $x \in \partial U$ bilden eine invariante Blätterung von $U \setminus M'$.

BEWEIS. Es sei f eine Funktion wie in Lemma 2.2.2. Dann ist das dort definierte c ein regulärer Wert von f . Mit $U = f^{-1}([0, c])$ ist also U eine invariante Umgebung von M' und ∂U eine glatte Untermannigfaltigkeit. Für Γ wähle man dann einfach den Gradientenfluß von f , dieser erfüllt offensichtlich alle Bedingungen. \square

Es folgt das dritte Hauptlemma, welches gemäß den einleitenden Bemerkungen Abbildungen definieren soll, die auf dem Rand einer solchen tubularen Umgebung, wie sie in Hauptlemma 2 konstruiert wurde, leben sollen. Die spezielle Form dieser Abbildungen gestattet es dann, die Nullstellen der fortgesetzten Abbildung zu kontrollieren. Es wird eine topologische Konstruktion hierfür benötigt, der Join oder auch Palais-Join zweier Räume.

Definition 2.2.3 Es seien X, Y topologische Räume. Der Join $X * Y$ von X und Y ist definiert als der Quotient der Menge

$$X \times Y \times I,$$

in dem alle Teilmengen der Form

$$\{x\} \times Y \times \{0\}$$

und

$$X \times \{y\} \times \{1\}$$

je zu einem Punkt geschrumpft werden.

Anschaulich hat man alle Punkte von X und Y durch Linien miteinander verbunden. Diese Linien „schneiden“ sich aber, und man merkt sich stets, zwischen welchen Punkten man sich gerade befindet. Man vergißt allerdings zwischen welchen Punkten man steht, wenn man sich im Start- oder Endpunkt einer solchen Linie befindet.

Nun also das

Hauptlemma 3 *Es sei V eine orthogonale, $(d+1)$ -dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe G und B sei die Einheitskugel in V . G operiere frei auf einer $(d-k)$ -dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit X , $k \geq 1$. Sind dann $L_j, j = 1, \dots, m$ endlich viele Unterräume von V mit $\dim L_j \geq k$, so gibt es eine äquivariante Abbildung $f : X \rightarrow B$ mit*

$$\dim (f^{-1}(G(B \cap L_j))) \leq \dim L_j - k - 1.$$

BEWEIS. Zur Vereinfachung der Notation sei $B \cap L_j = B_j$, dies ist natürlich die Einheitskugel in L_j , sowie $r_j = \dim L_j$. Weiter kann man $r_m \leq \dots \leq r_1$ annehmen. Nach 1.1.7 besitzt X eine invariante Triangulierung. Man kann also annehmen, daß G simplizial operiert. Es bezeichne dann X^i ein i -Skelett von X . Man betrachte die Menge

$$B \setminus G \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right).$$

Da G endlich ist, ist dies die Einheitskugel, aus der endlich viele Einheitskugeln niedrigerer Dimension entfernt wurden. Da die maximale Dimension solch einer entfernten Kugel r_1 ist, ist diese Menge $(d - r_1 - 1)$ -zusammenhängend. Die Aktion ist frei, somit liefert der äquivariante Satz von Kuratowski wegen $\dim(X^{d-r_1}) = d - r_1$ eine Fortsetzung der leeren Abbildung zu einer äquivarianten Abbildung

$$f_{d-r_1} : X^{d-r_1} \rightarrow B \setminus G \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right).$$

Es sei nun $k+1 \leq i \leq r_1$. Man nehme induktiv die Existenz einer Abbildung $f_{d-i} : X^{d-i} \rightarrow B$ an, so daß das Bild $f(X^{d-i})$ ein Simplicialkomplex der Dimension $d - i$ ist und

$$\dim(f_{d-i}^{-1}(G(B_j))) \leq r_j - i - 1.$$

Man wähle einen Fundamentalbereich $D^{(d-i+1)}$ in X^{d-i+1} , welcher nach 1.1.2 existiert und simplizial gewählt werden kann, da die Aktion simplizial ist. Ziel ist es nun, f_{d-i} über jedes einzelne Simplex des Fundamentalbereichs stetig fortzusetzen, so daß das Bild dieses Simplex unter der fortgesetzten Abbildung kein B_j trifft, falls $r_j < d - i$ und andernfalls die Dimension des Urbildes eines B_j um Eins erhöht wird.

Es sei also σ ein Simplex in $D^{(d-i+1)}$ und p das Baryzentrum von σ . Man definiere zunächst $f_{d-i+1}(p) = 0$. Dies wird später eventuell noch verändert. Für ein beliebiges $x \in \sigma$ sei $z(x)$ der kanonische Punkt in $\partial\sigma$, den man durch baryzentrische Projektion bzgl. p erhält. Damit definiere man

$$f_{d-i-1}(x) = \frac{d(p, x)}{d(p, z(x))} \cdot f_{d-i}(z(x)),$$

wobei d wiederum die Riemannsche Abstandsfunktion ist. f_{d-i} wird sozusagen „linear“ über das Simplex fortgesetzt. Diese Fortsetzung ist offensichtlich stetig und verträglich mit weiteren Fortsetzungen über angrenzende Simplizes. Man beachte weiter, daß das Simplex σ einfach in den Kegel über $f_{d-i}(\partial\sigma)$ abgebildet wird, dessen Spitze in $0 \in V$ liegt. Es sei

$$Q_j = f_{d-i}^{-1}(G(B_j)) \cap \partial\sigma$$

also der Anteil des Urbildes von $G(B_j)$ unter f_{d-i} , welcher das aktuelle Simplex trifft. Nach Konstruktion ist dann $f_{d-i+1}^{-1}(G(B_j)) \cap \partial\sigma$ der Kegel über Q_j , also

$$\dim(f_{d-i+1}^{-1}(G(B_j))) = \dim(f_{d-i}^{-1}(G(B_j))) + 1 \leq r_j - i.$$

Es soll aber zusätzlich erreicht werden, daß $f_{d-i+1}(\sigma) \cap G(B_j) = \emptyset$ für $r_j < d - i$. Zu diesem Zweck wird das Bild des Baryzentrums, welches bisher 0 war, geeignet verschoben, und zwar sei

$$J_i = f_{d-i}(\partial\sigma) * \bigcup_{\dim L_j < d-i} B_j$$

der Join von $f_{d-i}(\partial\sigma)$ mit allen B_j , so daß $r_j < d - i$. Dies sind also alle möglichen Verbindungslinien von Punkten in solch einem B_j zu Punkten in $f_{d-i}(\partial\sigma)$. Man kann sich den Join als Teilmenge von V denken, einfach als Menge aller Punkte auf Verbindungslinien zwischen den beteiligten Mengen. Offensichtlich ist dann $\dim J_i \leq d$, also gibt es einen Punkt $v_0 \in B \setminus J_i$. Statt des Nullpunktes als Spitze des Kegels wird die ganze Konstruktion so verschoben, daß die Spitze in v_0 liegt. Dann wird also durch die oben beschriebene Fortsetzung kein Punkt in B_j von f_{d-i+1} getroffen, falls $r_j < d - i$, also ist $f_{d-i+1}(\sigma) \cap B_j = \emptyset$ für diese j , was zu erreichen das Ziel war. Diese Konstruktion führe man für alle endlich vielen Simplexe von D_{d-i+1} durch. 5.2.11 liefert dann die gewünschte äquivariante Abbildung f_{d-i+1} auf dem ganzen $(d - i + 1)$ -Skelett und induktiv erhält man so das gesuchte f . \square

Ausgerüstet mit den drei Hauptlemmata kann nun der Beweis des Hauptsatzes für glatte Aktionen in Angriff genommen werden. Man vergleiche hierzu nochmals die Beweisskizze am Anfang des Abschnitts.

BEWEIS. Wie im Beweis des ersten Hauptsatzes setze man $C = M \times \mathbb{I}$, $B = \mathbb{S}^+ \wedge \mathbb{I}$ und versehe diese Räume mit der kanonischen G -Aktion, indem G trivial auf \mathbb{I} operiert, orientiere Boden und Deckel von M entgegengesetzt und definiere

$$f_0 : M \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{S}, \quad f_0(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) & t = 0 \\ \psi(x) & t = 1 \end{cases}.$$

Für eine Fortsetzung F von f_0 über C gilt dann

$$\deg F = \pm(\deg \varphi - \deg \psi).$$

Es gilt also, eine passende Fortsetzung F von f_0 zu konstruieren. Dieses F soll die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (1) Zu jedem $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ existiert eine $W(H)$ -invariante Umgebung U von $C^{>H}$ in C^H , so daß sämtliche Nullstellen von F auf U bereits in $C^{>H}$ liegen.
- (2) Es sei $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ und Z eine Zusammenhangskomponente der Nullstellenmenge von F in $C^{>H}$. Es sei (L) ein maximaler Orbittyp mit $C^L \cap Z \neq \emptyset$. Die Orbittypen (K) mit $\dim B^K < \dim C^K$ und $(H) < (K) < (L)$ seien mit $(K_1), \dots, (K_s)$ bezeichnet, sowie $(L) = (K_0)$. Ferner seien diese mit der üblichen Ordnung versehen und die Repräsentanten so gewählt, daß bereits Inklusion als Untergruppe gilt, falls $(K_i) < (K_j)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_Z \subseteq C^H$ von Z , so daß $F|_{U_Z}$ die Bedingungen des Hauptlemmas 1 erfüllt bzgl. der Mannigfaltigkeiten $C^{K_0} \subseteq C^{K_i} \subseteq C^H$ und der zu den Kugeln $B^{K_0} \subseteq B^{K_i} \subseteq B^{K_s}$ gehörigen Unterräume.

(3) Für $(K) \in O_*(M, \mathbb{S})$ ist die Menge $(F|_{C^K \setminus C^{>K}})^{-1}(0)$ endlich.

(4) Es sei $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ und $(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$. Für jede Nullstelle $z \in C^K \setminus C^{>K}$ gibt es eine $W(K, H)$ -invariante Umgebung U_{z, C^H} der Form

$$U_{z, C^H} = U_{z, C^K} \times D$$

wobei D eine Scheibe orthogonal zu C^K in C^H ist und U_{z, C^K} eine invariante Umgebung von z in C^K . U_{z, C^H} ist also ein Ausschnitt aus einer tubularen Umgebung von $C^{>H}$. Die Abbildung F spaltet sich auf in das Produkt der Abbildungen $F|_{U_{z, C^K}}$ und $F|_D$. $F|_D$ ist eine Abbildung von der Scheibe D in die Einheitskugel $T(K, H)$ im orthogonalen Komplement von V^K in V^H , so daß der Rand der Scheibe in die Sphäre abgebildet wird. Ferner ist der Grad dieser Restriktion gegeben durch

$$\deg F|_{\partial D} = \alpha(K, H).$$

(5) Ist $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ aber $(K) \in O_*(M, \mathbb{S}, H) \setminus O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$, dann gilt entweder das Gleiche wie in (4) mit Ausnahme der Gradbedingung, oder für jede Scheibe D orthogonal zu C^K in C^H mit $D \cap F^{-1}(0) \neq \emptyset$ gilt

$$F(\partial D) \cap B^K \neq \emptyset.$$

(6) Ist $x \in C$ und $\dim C^{G_x} < \dim B^{G_x}$, so ist $F(x) \neq 0$.

Diese Eigenschaften werden später verwendet bei der Herleitung der Gradformel. Jedoch ist im Verlaufe der Konstruktion der Fortsetzung noch von Bedeutung, daß es gewisse Mengen gibt, auf denen F keine Nullstellen besitzt. Diese werden nun konstruiert.

Es sei $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ fest. Ist $(K) \in Or(M)$ und $B^K \subseteq B^H$, sowie $\dim B^K < \dim C^K$, so wähle man einen linearen Teilraum L_H^K von V mit Einheitskugel B_H^K , so daß $B^K \subseteq B_H^K \subseteq B^H$ gilt, ferner $\dim B_H^K = \dim B^K + 1$ und $B_H^K = B^K \oplus V_H^K$, wobei der eindimensionale Raum, dessen Einheitskugel V_H^K bezeichnet, aufgespannt wird von einem Vektor in $B^H \setminus B^{>H}$ und die V_H^K verschieden sind für verschiedene (K) . $\Lambda(H)$ sei die Familie aller B^K mit $(K) \in Or(M)$ und $(H) \leq (K)$ sowie, falls vorhanden, B_H^K und V_H^K .

Man wähle gemäß Hauptlemma 2 eine tubulare Umgebung U_H von $M^{>H}$ in M^H . ∂U_H ist eine glatte Mannigfaltigkeit und $W(H)$ operiert frei auf ∂U_H , da $\partial U_H \subseteq M^H \setminus M^{>H}$. Ferner ist

$$\dim \partial U_H = \dim M^H - 1 = \dim B^H - 2.$$

Somit ist Hauptlemma 3 anwendbar für die Mannigfaltigkeit ∂U_H , die Kugel B^H im zugehörigen Unterraum von V , die Familie $\Lambda(H)$ von Kugeln und den Wert $k = 1$. Es sei $f_H : \partial U_H \rightarrow B_H$ die von Hauptlemma 3 bereitgestellte $W(H)$ -äquivariante Abbildung. Nach Definition werden dann die Kugeln V_H^K von f_H nicht getroffen. π_H sei die Projektion auf $M^{>H}$ entlang der Blätterung, also $\pi_H(\gamma(x, t)) = \gamma(x, 0)$. Für jedes $(K) \in Or(M)$ mit $\dim B^K = \dim C^K$ sei

$$Y(K) = \bigcup_{\substack{(H) \in O_*(M, \mathbb{S}) \\ (H) < (K)}} \bigcup_{\substack{P \in \Lambda(H) \\ \dim P \leq \dim B^K}} (\pi_H(f_H^{-1}(P)) \cap M^K),$$

sowie für jedes $(K) \in Or(M)$ mit $\dim B^K < \dim C^K$:

$$Y(K) = \bigcup_{\substack{(H) \in O_*(M, \mathbb{S}) \\ (H) < (K)}} \bigcup_{\substack{P \in \Lambda(H) \\ \dim P \leq \dim B^K + 1}} (\pi_H(f_H^{-1}(P)) \cap M^K).$$

Nach Definition von f_H ist $\dim(f_H^{-1}(P)) \leq \dim P - 2$, ferner vergrößert π_H als glatte Abbildung die Dimension nicht. Alle Vereinigungen oben sind endlich, daher folgt mit dem Satz von Morita:

$$\dim(Y(K) \times I) = \dim Y(K) + 1 \leq \dim B^K - 1.$$

Als weitere Bedingung an die Fortsetzung F wird nun gefordert:

(7) Ist $H \in Or(M)$, so besitzt F keine Nullstellen auf der Menge

$$(W(H)(Y(H) \times I)) \setminus C^{>H}.$$

Um nun F induktiv über die Orbittypen zu konstruieren reicht es aus, die Existenz von F auf der Menge $C^{>H}$ für einen Orbittyp H anzunehmen und dann auf C^H fortzusetzen. Lemma 1.1.3 liefert dann die eindeutige Fortsetzung auf die H entsprechende Menge der Orbitfiltration. Man beachte dabei, daß $C^{>H_{i+1}} = C_i^{H_{i+1}}$ mit der entsprechenden Notation aus der Definition der Orbitfiltration. Der Induktionsanfang kann genau so durchgeführt werden (hier ist einfach $C^{>H} = \emptyset$, dies wird am Ende jedes Schrittes noch einmal explizit erwähnt werden).

Die Fortsetzung von F geschieht in mehreren Schritten. Es sei $F : C^{>H} \rightarrow B^{>H}$ eine Abbildung, die auf den Orbits, auf denen sie definiert ist, die Eigenschaften (1)-(7) erfüllt. In den folgenden 4 Schritten wird aus Gründen der Lesbarkeit nicht explizit erwähnt, daß die Abbildung auf dem Rand mit f_0 übereinstimmt, jeder Fortsetzungsschritt ist aber so zu verstehen, daß dies berücksichtigt wird. So sollen etwa Umgebungen von Nullstellen stets so gewählt sein, daß sie den Rand nicht treffen. Dies ist möglich, da der Zylinder kompakt ist und die Abbildung F nach Konstruktion keine Nullstelle auf dem Rand besitzt.

Schritt 1: In diesem Schritt wird F über kleine Umgebungen von isolierten Nullstellen fortgesetzt, ohne daß neue Nullstellen erzeugt werden. Es sei also z ein isolierter Punkt in $F^{-1}(0)$. Natürlich muß solch ein z nicht zwangsläufig existieren. Falls es aber existiert setze man $K = G_z$. Man wähle eine Umgebung U_{z, C^K} von z in C^K , so daß $U_{z, C^H} = U_{z, C^K} \times D$ eine $W(K, H)$ -invariante tubulare Umgebung ist, wobei D eine Scheibe orthogonal zu C^K in C^H bezeichnet mit Mittelpunkt z . Weiter sei $T(K, H)$ die Einheitskugel im orthogonalen Komplement von V^K in V^H . Man betrachte die Abbildung

$$F|_{C^{>H} \cap \partial D} : C^{>H} \cap \partial D \rightarrow B^{>H} \cap \partial T(K, H).$$

Man wähle eine Fortsetzung dieser Abbildung auf die ganze Sphäre, sofern eine solche Fortsetzung existiert. Nach Definition von O_{**} findet man stets eine solche Fortsetzung, falls $K \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$ liegt. In diesem Fall wähle man speziell die Abbildung $f_{K, H}$, mit deren Hilfe der Äquivarianzindex definiert wurde (siehe 2.1.5). Nach Definition des Äquivarianzindex und der Abbildungen $f_{K, H}$ ist dies mit der Induktion verträglich. Da die Aktionen orthogonal sind, kann diese Abbildung kanonisch auf die ganze Scheibe fortgesetzt werden

und von dort als Produkt über die ganze Umgebung U_{z, C^K} . Durch hinreichend kleine Wahl von U_{z, C^K} ergibt sich eine Fortsetzung über $W(H)(U_{z, C^K})$ und schließlich können so alle isolierten Nullstellen in $C^{>H}$ behandelt werden. Dies ergibt eine Fortsetzung der Abbildung F über eine Menge W , welche also gerade die Vereinigung von $C^{>H}$ und kleinen Stücken tubularer Umgebungen um isolierte Nullstellen in $C^{>H}$ ist, wobei W so gewählt werden kann, daß keine weiteren Nullstellen von F in W liegen. Insbesondere sind so keine neuen Nullstellen entstanden. Ist speziell $C^{>H} = \emptyset$, so geschieht in diesem Schritt natürlich nichts.

Schritt 2: Dieser Schritt behandelt den Fall $\dim C^H > \dim B^H$. Man beachte, daß in diesem Fall nur Bedingung (7) berücksichtigt werden muß. Man setze

$$Z = F^{-1}(0) \setminus W, \quad Q = W(H)(Y(H) \times I).$$

F soll also keine Nullstellen auf $Q \setminus C^{>H}$ erhalten. Man wähle eine absteigende Folge von Kugeln $B_i \subseteq B^H$, welche sich auf den Nullpunkt zusammenziehen, weiter eine absteigende Folge abgeschlossener, invarianter Umgebungen $V_i \subseteq C^H$ von Z , welche sich auf Z zusammenziehen, so daß ferner gilt

$$F(V_i \cap C^{>H}) \subseteq B_i$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Es sei $Q_i = Q \setminus \overset{\circ}{V}_i$. Nun gilt nach Konstruktion der Mengen $Y(H)$, daß

$$\dim \partial V_1 \cap Q \leq \dim B^H - 1$$

ist. Somit besitzt

$$F|_{(\partial V_1 \cap Q \cap C^{>H})} : \partial V_1 \cap Q \cap C^{>H} \rightarrow B_1 \setminus \{0\}$$

eine äquivariante Fortsetzung auf $\partial V_1 \cap Q$ ebenfalls ohne Nullstellen. Dies folgt aus Korollar 1.1.6. Damit ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$F'_1 : C^{>H} \cup (\partial V_1 \cap Q) \rightarrow B_H$$

äquivariant und stetig und es ist $F'_1(\partial V_1 \cap Q) \subseteq B_1 \setminus \{0\}$. Ebenso erfüllt $Q \setminus \overset{\circ}{V}_1$ die Dimensionanforderung von 1.1.6, so daß analog eine äquivariante Fortsetzung

$$F''_1 : C^{>H} \cup Q_1 \rightarrow B^H$$

existiert mit $F''_1(Q_1) \subseteq B^H \setminus \{0\}$. Der äquivariante Satz von Kuratowski schließlich liefert eine Fortsetzung

$$F_1 : C^{>H} \cup Q \rightarrow B^H$$

von F''_1 , welche $F_1(V_1) \subseteq B_1$ erfüllt.

Induktiv sei nun eine äquivariante Fortsetzung $F_i : C^{>H} \cup Q \rightarrow B^H$ von F konstruiert, welche $F_i(Q_i) \subseteq B^H \setminus \{0\}$ und $F_i(V_i) \subseteq B_i$ erfüllt. Man schränke F_i ein auf $C^{>H} \cup Q \setminus V_{i+1}$. Genau wie oben findet man mit 1.1.6 eine Fortsetzung

$$F'_{i+1} : (C^{>H} \cup Q_i) \cup (\partial V_{i+1} \cap Q) \rightarrow B^H,$$

so daß $\partial V_{i+1} \cap Q$ nach $B_{i+1} \setminus \{0\}$ abgebildet wird. Ebenfalls wie oben erhält man eine Fortsetzung

$$F''_{i+1} : (C^{>H} \cup Q_i) \cup Q_{i+1} = C^{>H} \cup Q_{i+1} \rightarrow B^H$$

und $F''_{i+1}(Q_{i+1}) \subseteq B^H \setminus \{0\}$. Schließlich gibt der Satz von Kuratowski wieder die Fortsetzung

$$F_{i+1} : C^{>H} \cup Q \rightarrow B^H$$

mit der Eigenschaft, daß V_{i+1} nach B_{i+1} abgebildet wird. Insbesondere stimmen F_n und F_m für $n < m$ auf den Mengen $C^{>H} \cup Q_n$ überein, also gilt in V

$$F_n(x) - F_m(x) \in 2 \cdot B_n.$$

Die Folge $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also im Banachraum $C_G^B(C^{>H} \cup Q, V)$ der beschränkten, G -äquivalenten Funktionen von $C^{>H} \cup Q$ nach V gegen eine Grenzfunktion $F_0 : C^{>H} \cup Q \rightarrow B^H$, welche dann offensichtlich die Eigenschaft $F_0(Q \setminus C^{>H}) \subseteq B^H \setminus \{0\}$ besitzt. F_0 kann nun erneut mit dem Satz von Kuratowski beliebig äquivalent über C^H fortgesetzt werden, was diesen Schritt abschließt. Ist in diesem Schritt $C^{>H} = \emptyset$, so hindert dies nicht an der genauen Durchführung des Verfahrens, man erhält dann eine Abbildung

$$F : C^H \rightarrow B^H,$$

welche keine Nullstellen auf $W(H)(Y(H) \times \mathbf{I})$ besitzt.

Schritt 3: Hier wird der Fall $\dim C^H = \dim B^H$, also $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ behandelt. Naturgemäß ist dies der umfangreichste Schritt, weil hier alle 7 Bedingungen erfüllt werden müssen. Es sei Z eine Zusammenhangskomponente der Nullstellen in $C^{>H}$ und es sei z kein isolierter Punkt, der bereits in Schritt 1 behandelt wurde (man bemerke aber, daß z sehr wohl isolierter Punkt sein kann). Es sei (L) der maximale Orbittyp, so daß $C^L \cap Z \neq \emptyset$. Dies bedeutet also Nullstellen in Z sind entstanden in einem Schritt, in dem $F|_{C^{>L}}$ über C^L fortgesetzt wurde (oder später). Da nach (1) die Nullstellen, welche in verschiedenen Fixmengen entstehen, voneinander separiert sind, ist L eindeutig bestimmt. Man bezeichne mit $(K_1), \dots, (K_s)$ alle Orbittypen mit $(H) < (K_i) < (L)$, $\dim B^{K_i} < \dim C^{K_i}$ und setze $K_0 = L$. Wie stets wird angenommen, daß die Repräsentanten K_i so gewählt sind, daß bereits $K_i \subseteq K_j$ gilt, falls $(K_i) \leq (K_j)$ ist. Es sei U_H eine tubulare Umgebung von $M^{>H}$ nach Hauptlemma 2. Es sei $\Lambda(H)$ die Familie von Kugeln in B^H , die in der Konstruktion der Mengen $Y(K)$ definiert wurde. Dann liefert Hauptlemma 3 eine äquivalente Abbildung $f_H : \partial U_H \rightarrow B^H$ bzgl. dieser Familie von Kugeln. Man wähle $0 < a < b < 1$, so daß F keine Nullstellen in $M \times ([0, a] \cup [b, 1])$ besitzt. Dies ist möglich, da C kompakt ist und F keine Nullstellen auf dem Rand von C besitzt. Die Menge U_H besitzt nun eine invariante, eindimensionale Blätterung, gegeben durch Kurven $\gamma(x, \cdot) : \mathbf{I} \rightarrow U_H$, $x \in \partial U_H$. Man definiere auf $U_H \times [a, b]$ die Abbildung

$$F_0(\gamma(x, t), s) = F(\gamma(x, 0), s) \cdot (1 - t) + f_H(x) \cdot t,$$

also einfach die Standard-Konvexhomotopie zwischen F und f_H entlang der Blätterung. Dann gibt es eine Umgebung von Z in C^H , in der F_0 keine Nullstellen besitzt. Dies ist klar für eine Umgebung von Z in $C^{>H}$, da Z eine Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(0)$ ist. Ist

$F(\gamma(x, 0), s) \neq 0$, so auch $F_0(\gamma(x, t), s)$ in einem Intervall $[0, t(x)]$, $t(x) > 0$ aus Stetigkeitsgründen. Ist aber $F(\gamma(x, 0), s) = 0$, so besitzt F_0 nur dann Nullstellen auf der Verbindungsgeraden von $f_H(x)$ zu $0 = F(\gamma(x, 0), s)$, wenn $f_H(x)$ ebenfalls 0 ist. Dies bedeutet natürlich insbesondere

$$f_H(x) \in B^K$$

für alle Orbits (K), damit also

$$\pi_H(x) \in \pi_H(f_H^{-1}(B^K))$$

für alle Orbits (K). Hierbei bezeichnet π_H wieder die Projektion $\gamma(x, t) \mapsto \gamma(x, 0)$. Also ist $\gamma(x, 0) \in \pi_H(f_H^{-1}(B^K))$ und trivialerweise auch $\gamma(x, 0) \in M^{G_{\gamma(x, 0)}}$. Da $\gamma(x, 0)$ eine Nullstelle von F ist, folgt aber aus Eigenschaft (6), daß $\dim M^{G_{\gamma(x, 0)}} \geq \dim \mathbb{S}^{G_{\gamma(x, 0)}}$, also ist die Menge $Y(G_{\gamma(x, 0)})$ definiert und es folgt

$$\gamma(x, 0) \in Y(G_{\gamma(x, 0)}).$$

Trivialerweise ist aber $\gamma(x, 0) \notin M^{>G_{\gamma(x, 0)}}$. Dies widerspricht Eigenschaft (7). Somit kann $f_H(x)$ nicht 0 sein und es gibt somit aus Kompaktheitsgründen eine Umgebung \tilde{U}_Z von Z in C^H , in der F_0 keine weiteren Nullstellen außer denen in Z besitzt. Es bezeichne F_1 die Restriktion von F_0 auf \tilde{U}_Z . Nun soll gezeigt werden, daß F_1 Eigenschaft (2) erfüllt, also die Bedingungen aus Hauptlemma 1 gegeben sind mit den entsprechenden Mengen wie in (2) beschrieben. Es sei dazu

$$E = \{z \in C^H \mid \dim C^{G_z} > \dim B^{G_z}\}.$$

Dies ist genau die Menge E aus Hauptlemma 1, angepaßt an die vorliegende Situation. Die Bedingungen (I), (II) und (IV) sind offensichtlich erfüllt. Gezeigt werden soll $F_1^{-1}(B^L) \subseteq C^L \cup E$ in einer Umgebung von Z . Es muß eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, und zwar sei zunächst $\dim C^L = \dim B^L$. Man nehme dann ein $(\gamma(x, t), s) \in U_H \times [a, b]$, so daß $(\gamma(x, 0), s)$ in $Z \setminus E$ liegt. Angenommen, es wäre $F_1(\gamma(x, 0), s) \in B^L$. Nach Definition von F_1 bedeutet dies $f_H(x) \in B^L$. Mit $(\gamma(x, 0), s) = z$ ist dann $(H) < (G_z)$ und es gilt

$$\dim B^L = \dim C^L \leq \dim C^{G_z} = \dim B^{G_z}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Annahme $z \notin E$ folgt. Nach Konstruktion der Menge $Y(G_z)$ ist dann aber

$$\pi_H(f_H^{-1}(B^L)) \cap M^{G_z} \subseteq Y(G_z)$$

und wegen $f_H(x) \in B^L$ ist $\gamma(x, 0) = \pi_H(x) \in \pi_H(f_H^{-1}(B^L))$, also letztlich

$$z \in Y(G_z) \times [a, b].$$

Genau wie oben ist aber klar, daß $z \notin C^{>G_z}$, und dies widerspricht der Konstruktion von F .

Im zweiten Fall sei nun $\dim C^L > \dim B^L$. Angenommen, es ist $F_1(\gamma(x, 0), s)$ in B_H^L . Diese Menge wurde ebenfalls in der Definition der Mengen $Y(K)$ definiert. Dann folgt wie oben $f_H(x) \in B_H^L$, also

$$\gamma(x, 0) \in \pi_H(f_H^{-1}(B_H^L)).$$

Die Dimensionsbetrachtungen liefern nun mit z wie oben:

$$\dim B_H^L = \dim B^L + 1 \leq \dim C^L \leq \dim C^{G_z} = \dim B^{G_z},$$

also auch $z \in Y(G_z) \times [a, b]$, was zum Widerspruch führt.

Der Fall $\dim C^L < \dim B^L$ kann nach Eigenschaft (6) nicht auftreten, es ist daher gezeigt:

$$(\gamma(x, 0), s) \in Z \setminus E \implies F_1(\gamma(x, t), s) \notin B^L.$$

Somit findet man eine Umgebung $U_Z \subseteq \tilde{U}_Z$, so daß

$$(F_1|_{U_Z})^{-1}(B^L) \subseteq C^L \cup E$$

gilt. Damit erfüllt F_1 also auch Bedingung (III) aus Hauptlemma 1. Für Bedingung (V) aus Hauptlemma 1 sei wieder $\dim B^L < \dim C^L$ angenommen, also existieren B_H^L und V_H^L . Nach Definition trifft f_H die Menge V_H^L nicht. F ist eine Abbildung nach $B^{>H}$ und trifft V_H^L daher höchstens in 0. Es sei nun $x \in \partial U_H$ beliebig. Entweder, es ist $(\gamma(x, 0), s)$ eine Nullstelle für ein $s \in [a, b]$, dann ist aber $F_1(\gamma(x, t), s) = f_H(x) \cdot t \notin V_H^L$ für $t > 0$. Oder $(\gamma(x, 0), s)$ ist keine Nullstelle, dann ist $F_1(\gamma(x, t), s) \notin V_H^L$ für $0 \leq t < t_2(x)$ mit einem bestimmten $t_2(x) \in I$. Wieder aus Kompaktheitsgründen findet man daher eine Umgebung der Nullstellen, welche in U_Z liegt, so daß F_1 die Menge V_H^L höchstens in 0 trifft. Damit ist aber (V) aus dem Hauptlemma erfüllt. Es kann natürlich angenommen werden, daß diese letzte Umgebung U_Z selbst ist.

F_1 kann nun äquivariant auf $W(H)(U_Z)$ fortgesetzt werden. Dieses Verfahren führe man für alle Komponenten Z von $F^{-1}(0)$ durch. Die so entstehende Menge werde mit

$$V_0 = \bigcup_Z W(H)(U_Z)$$

bezeichnet. Man hat also eine Fortsetzung F_2 von F über die Menge $C^{>H} \cup V_0 \cup W$, wobei W die in Schritt 1 konstruierte Menge ist. Man beachte, daß diese Fortsetzung noch keine anderen Nullstellen als die von F selbst besitzt. Daher kann auf diese Situation das Verfahren aus Schritt 2 wortwörtlich übertragen werden, indem F_2 über die Menge

$$C^{>H} \cup V_0 \cup W \cup (W(H)(Y(H) \times I))$$

fortgesetzt wird ohne Nullstellen auf $W(H)(Y(H) \times I) \setminus C^{>H}$. Im Unterschied zu Schritt 2 kann aber aufgrund der Dimension von C^H nun Korollar 1.1.8 angewendet werden, um die so entstandene Abbildung endgültig über C^H fortzusetzen. Dies bedeutet, daß außerhalb von $C^{>H}$ nur endlich viele neue Nullstellen erzeugt werden. Schritt 3 ist hiermit abgeschlossen. Am Schluß noch die Betrachtung des Falles $C^{>H} = \emptyset$: In diesem Fall passiert den ganzen Schritt über gar nichts bis zur Anwendung von 1.1.8. Es wird also lediglich eine Abbildung

$$F : C^H \rightarrow B^H$$

mit endlich vielen Nullstellen erzeugt.

Schritt 4: Es bleibt noch der Fall $\dim C^H < \dim B^H$ zu betrachten. Dieser kann aber völlig analog zu Schritt 3 behandelt werden bis zum letzten Fortsetzungsschritt. Die nochmals verschärfte Dimensionsbedingung gestattet nun sogar die Anwendung von Korollar 1.1.6 anstelle von Korollar 1.1.8. Es werden also keine weiteren Nullstellen erzeugt. Die Betrachtung des Falles $C^{>H} = \emptyset$ ergibt genau das gleiche Ergebnis wie in Schritt 3, nur besitzt die Abbildung nun gar keine Nullstellen.

Die Konstruktion von F ist somit induktiv abgeschlossen. Es soll zur Veranschaulichung noch einmal jeder der Punkte (1)-(7) nachgeprüft werden.

- (1) Dies ist eine Bedingung an Orbits in $O_*(M, \mathbb{S})$, also ist man in Schritt 3. Dort ist aber genau die Existenz einer Umgebung U_Z einer Komponente Z der Nullstellen gezeigt worden, die keine weiteren Nullstellen umfaßt. Die Vereinigung dieser Umgebungen über alle Komponenten liefert also eine Umgebung der gesamten Nullstellenmenge mit der gewünschten Eigenschaft, und diese kann natürlich durch Anwendung von $W(H)$ invariant gemacht werden, ohne daß Nullstellen hinzukommen, da F äquivariant ist.
- (2) Dies ist genau in Schritt 3 gezeigt worden.
- (3) Auch diese Tatsache wurde am Ende von Schritt 3 explizit erwähnt.
- (4) Für $(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S})$ wurde in Schritt 1 die Abbildung genau so fortgesetzt (über die endlich vielen Nullstellen in $C^K \setminus C^{>K}$ nach (3)), daß diese Bedingung erfüllt ist.
- (5) Hier ist nun tatsächlich etwas nachzuprüfen. Es tritt dann die gleiche Situation wie in (4) ein, wenn in Schritt 1 der Konstruktion von F die Fortsetzung über die orthogonale Sphäre existierte. Es ist also zu zeigen, daß die zweite Bedingung erfüllt ist, falls diese Fortsetzung nicht existiert. Die Fortsetzung über die Sphäre wurde induktiv gewonnen, man kann daher annehmen, daß $C^{>H} = C^K$ ist, also (K) „direkt“ über (H) liegt (ansonsten setze man so lange die Abbildungen über die Sphären fort, bis man, gemäß Voraussetzung, stecken bleibt und betrachte die Situation dort). Angenommen nun es gäbe eine Sphäre D um eine Nullstelle z orthogonal zu C^K in C^H , so daß

$$F(\partial D) \cap B^K = \emptyset$$

ist. Es sei $p : B^H \rightarrow (B^K)^\perp$ die Einschränkung der Orthogonalprojektion auf die Kugel. Man setze

$$h : \partial D \rightarrow (B^K)^\perp, \quad h(x) = p \circ F(x),$$

wobei F hier die Einschränkung von F auf ∂D bezeichne. $W(K, H)$ operiert auf $(B^K)^\perp$ und trivial auf B^K , also ist die Projektion $W(K, H)$ -äquivariant und h somit ebenfalls eine $W(K, H)$ -äquivariante Abbildung nach $(B^K)^\perp$. Nach Annahme ist h nullstellenfrei. Wieder aus der Orthogonalität der $W(K, H)$ -Aktion folgt, daß auch $\frac{h}{\|h\|}$ $W(K, H)$ äquivariant, wohldefiniert und eine Abbildung zwischen den Sphären ist. Dies widerspricht der Annahme, daß es gerade eine solche nicht gibt. Also gilt (5).

- (6) Dies sieht man sofort nach Betrachtung von Schritt 4.

(7) Die Konstruktion von F verlief genau nach dem Plan, hier keine Nullstellen zu erzeugen.

Es ist die Existenz einer Abbildung F mit den Eigenschaften (1)-(7) gezeigt. Nun gilt es, daraus das Theorem abzuleiten. Es führt wieder nichts um eine Fallunterscheidung herum. Die Situation ist die folgende: Man wähle eine Abbildung F , wie sie eben konstruiert wurde und einen festen Orbityp $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$. Man schränke F ein auf C^H und nenne diese Abbildung f . Es sei Z eine Zusammenhangskomponente der Nullstellen von f . Für $z \in Z$ ist dann nach (6)

$$\dim M^{Gz} \geq \dim \mathbb{S}^{Gz}.$$

Es sei L wieder der maximale Orbityp, so daß $C^L \cap Z \neq \emptyset$. Nun muß unterschieden werden:

Fall 1: Ist $(L) \notin O_*(M, \mathbb{S})$, so gibt es nach Eigenschaft (2) eine Umgebung von Z , U_Z , so daß Hauptlemma 1 anwendbar ist, und wegen der Dimensionsbedingung liegt dort Fall (a) vor. Dies bedeutet $\deg f|_{U_Z} = 0$.

Fall 2: Der nächst einfachere Fall ist $(L) \in O_{**}(M, \mathbb{S})$. Dann ist $Z = \{z\}$ nach Eigenschaft (3), also ein isolierter Punkt, und es gibt eine $W(L, H)$ -invariante Umgebung

$$U_{z, C^H} = U_{z, C^K} \times D,$$

in der F die Eigenschaften wie in (3) besitzt. Es folgt also

$$\deg f|_{U_{z, C^H}} = \deg f|_{U_{z, C^L}} \cdot \alpha(L, H)$$

nach der Multiplikativität des Grades. Es seien nun z_1, \dots, z_k alle diese endlich vielen Nullstellen in $C^L \setminus C^{>L}$. Diese liefern die Nullstellen $W(H)(z_i)$ in der Menge C^H . Da alle diese Nullstellen isoliert sind, findet man eine Umgebung V_i von $W(H)(z_i)$, welche keine weiteren Nullstellen von f enthält und so, daß $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Man setze $V(L) = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Es ergibt sich zunächst genau wie im Beweis zu Hauptsatz 1

$$\deg f|_{V_k} = \left| N(H)/L \cap N(H) \right| \cdot \deg f|_{U_{z, C^H}},$$

da die Mächtigkeit des $W(H)$ -Orbits eines z_i gerade $\left| N(H)/L \cap N(H) \right|$ ist. Nach obigen Ausführungen gilt also

$$\begin{aligned} \deg f|_{V(L)} &= \sum_{i=1}^k \deg f|_{V_k} \\ &= |N(H, L)| \cdot \alpha(L, H) \cdot \sum_{i=1}^k \deg f|_{U_{z_k, C^L}} \\ &= |N(H, L)| \cdot \alpha(L, H) \cdot b(L), \end{aligned}$$

wenn man $b(L) \in \mathbb{Z}$ genau durch die obige Summe definiert. Insbesondere ist $b(L)$ unabhängig davon definiert, welches konkrete H gewählt wurde.

Fall 3: Dieser Fall ist die eigentliche Schwierigkeit, und zwar sei nun $(L) \in O_*(M, \mathbb{S})$ aber nicht aus $O_{**}(M, \mathbb{S})$. Zunächst bemerkt man Folgendes: Da Eigenschaft (5) gilt, liegt entweder dieselbe Situation wie in Fall 2 vor, oder es gilt in einer Umgebung U der Nullstellen

$$f(\partial D) \cap B^L \neq \emptyset$$

für jede Scheibe D , welche eine Nullstelle als Zentrum besitzt. Wäre der Grad von f in U nicht 0, so sagt aber Hauptlemma 1, Teil (b), daß es eine solche Scheibe gibt, die B^L nicht trifft. Somit ist in dieser Situation der Grad von f ebenfalls 0. Übrig bleiben also solche Orbittypen (L) , welche zwar nicht in $O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$ liegen, aber dennoch Schritt 1 in der Konstruktion der Abbildung F durchgeführt werden konnte. Diese Orbittypen benenne man mit $O_A(M, \mathbb{S}, H)$ („A“ steht für „Ausnahmeorbittyp“). Für solch einen Ausnahmeorbittyp geht man also genau wie in Fall 2 vor, nur hat man für den Grad der Abbildung auf dem Rand der Sphäre nicht mehr den Wert $\alpha(L, H)$, sondern eben den Grad der nichtkanonischen Fortsetzung. Dieser soll mit $\mu(L, H)$ bezeichnet werden. Mit der Ausschneidungseigenschaft des Grades folgt also aus Fall 1, Fall 2 und dem eben Gesagten, daß

$$\begin{aligned} \deg f &= \sum_{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)| \\ &+ \sum_{(K) \in O_A(M, \mathbb{S}, H)} \mu(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|. \end{aligned}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Summanden der zweiten Summe ebenfalls in der Form der Summanden der ersten Summe dargestellt werden können. Dies geschieht erneut durch eine Induktion und durch Rückgriff auf die Konstruktion von F . Die Induktion läuft diesmal über die Anzahl der Orbittypen $(L') \in O_A(M, \mathbb{S}, H)$ mit $(H) < (L') < (L)$ für $(L) \in O_A(M, \mathbb{S}, H)$. Die Induktionsannahme lautet: Für ein $(L) \in O_A(M, \mathbb{S}, H)$ kann man

$$\mu(L, H) \cdot b(L) \cdot |N(H, L)| = \sum_{\substack{(H) < (K) < (L) \\ (K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)}} \alpha(K, H) \cdot b'(K) \cdot |N(K, H)|$$

schreiben, falls höchstens n Orbittypen $(L_1), \dots, (L_n) \in O_A(M, \mathbb{S}, H)$ existieren mit

$$(H) < (L_i) < (L).$$

Daß diese Umschreibung mit der Formulierung des Theorems verträglich ist, wird nach der Induktion gezeigt werden. Offensichtlich reicht es vom Fall $n = 0$ auszugehen, also daß es keinen Ausnahmeorbittyp zwischen (H) und (L) gibt. Es liegt die Situation von Fall 2 vor, also ist

$$\deg f|_{V(L)} = \mu(L, H) \cdot b(L) \cdot |N(L, H)|$$

für eine Umgebung $V(L)$ der Nullstellen von f in $C^L \setminus C^{>L}$. Es sei nun W eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $W \subseteq C^H$, welche genau die Nullstellen von f in $C^L \setminus C^{>L}$ umschließt. Dann gilt auch

$$\deg f|_W = \mu(L, H) \cdot b(L) \cdot |N(H, L)|.$$

Nun folgt der entscheidende Trick. F wurde induktiv über die Orbittypen fortgesetzt. Man nehme daher die Fortsetzung F_i mit $(H_i) = (L)$, also gehe in den Schritt zurück, in dem F gerade über den Orbittyp (L) fortgesetzt wurde. Da $(L) \in O_*(M, \mathbb{S}, H)$ ist, sind die Nullstellen in $C^L \setminus C^{>L}$ alle isoliert. Im nächsten Schritt würde also mit Schritt 1 (siehe Fortsetzung von F) fortgefahren. Man kann annehmen, daß $(H_{i+1}) > (H_i)$, ansonsten nehme man einfach den nächsten Orbittyp, so daß diese Ungleichung erfüllt ist. Dann ist $C^{>H_{i+1}} = C^L$. Der Fortsetzungsschritt verlief wie folgt: Für eine isolierte Nullstelle z in $C^{>H_{i+1}}$ mit $G_z = L$ sei D eine Scheibe orthogonal zu C^L in $C^{H_{i+1}}$ um z , und die entsprechende Scheibe im Zielraum sei $T(L, H_{i+1})$. Nun galt es, die Abbildung

$$F|_{C^{>H_{i+1}} \cap \partial D} : C^{>H_{i+1}} \cap \partial D \rightarrow B^{>H_{i+1}} \cap \partial T(L, H_{i+1})$$

fortzusetzen. Aber wegen $C^{>H_{i+1}} = C^L$ ist $C^{>H_{i+1}} \cap \partial D = \emptyset$. In diesem Schritt kann also über die Fortsetzung völlig frei bestimmt werden. Man beachte, daß die Fortsetzung, die hier gerade durchgeführt werden soll, in einer Reihe von Fortsetzungen steht von Abbildungen bzgl. der Orbitfiltration von $D(L, H)$, der Scheibe orthogonal zu C^L in C^H , nach $T(L, H)$. Da (L) aber Ausnahmeorbittyp ist, gibt es eine äquivariante Abbildung $\tilde{f} : D(L, H)_j \rightarrow T(L, H)_j$, welche keine Fortsetzung auf $D(L, H)_{j+1}$ besitzt (j bezeichnet eine Stelle in der Orbitfiltration). Man wähle daher diesmal als Fortsetzung auf $D(L, H_{i+1})$ die Einschränkung dieser Abbildung \tilde{f} und fahre in den folgenden Schritten genau so fort. Somit ist Schritt 1 irgendwann nicht mehr durchführbar (genauer nämlich im j -ten Schritt) und stattdessen muß auf Schritt 3 ausgewichen werden. Man erhält also eine von F verschiedene Abbildung F' , welche aber ebenfalls die Eigenschaften (1)-(6) besitzt. Die Einschränkung dieser Fortsetzung auf C^H sei mit f' bezeichnet.

In Schritt 1 der Fortsetzung wurde F stets so fortgesetzt, daß um isolierte Nullstellen keine neuen Nullstellen erzeugt wurden. Dies ist in Schritt 3 nicht der Fall. Im Laufe der Fortsetzung von f' sind also in C^H weitere Nullstellen entstanden, die aus einer Nullstelle in $C^L \setminus C^{>L}$ hervorgingen. Nach (1) kann aber eine $W(H)$ -invariante Umgebung so gewählt werden, daß keine weiteren Nullstellen in dieser Umgebung liegen. Man wähle die Mannigfaltigkeit W in dieser Umgebung, so daß alle Nullstellen von f' , welche aus $C^L \setminus C^{>L}$ hervorgingen, im Inneren von W liegen. Insbesondere tun das also auch die Nullstellen von f selbst, denn dies waren ja genau die Nullstellen in $C^L \setminus C^{>L}$. Man setze $\hat{f} = f'|_W$. Mit dieser Konstruktion sind die folgenden Eigenschaften erreicht worden:

- $\hat{f}|_{W^L} = f|_{W^L}$.
- $0 \notin \hat{f}(\partial W)$.
- $0 \notin f(\partial W)$.
- Jede Scheibe $D(L, H)$ in W orthogonal zu C^L um eine Nullstelle von $\hat{f}|_{W^L}$ erfüllt

$$\hat{f}(\partial D(L, H)) \cap B^L \neq \emptyset.$$

Dies ist Eigenschaft (5).

Es sind also die lokalen Grade $\deg_0 f|_W$ und $\deg_0 \hat{f}$ definiert. Aus der letzten Eigenschaft folgt aber sofort mit Hauptlemma 1, daß

$$\deg_0 \hat{f} = 0.$$

Da die Abbildungen $f|_{\partial W}, \hat{f}|_{\partial W}$ nullstellenfrei sind, kann man annehmen, daß sie in eine invariante Sphäre $\mathbb{S}_0 \subseteq B$ abbilden. Der Satz, soweit er bisher bewiesen ist, ist daher auf das Paar $f|_{\partial W}, \hat{f}|_{\partial W}$ anwendbar und die Gradformel liefert

$$\begin{aligned} \deg f|_{\partial W} - \deg \hat{f}|_{\partial W} &= \mu(L, H) \cdot b'(L) \cdot |N(H, L)| \\ &+ \sum_{\substack{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H) \\ (K) < (L)}} \alpha(K, H) \cdot b'(K) \cdot |N(H, K)| \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} 0 = \deg f|_{(\partial W)^L} - \deg \hat{f}|_{(\partial W)^L} &= \alpha(L, L) \cdot b'(L) \cdot |N(L, L)| \\ &= b'(L) \cdot |W(L)|, \end{aligned}$$

also $b'(L) = 0$. Damit ergibt sich letztlich

$$\begin{aligned} \mu(L, H) \cdot b(L) \cdot |N(H, L)| &= \deg_0 (f|_{V(L)}) \\ &= \deg_0 (f|_W) \\ &= \deg f|_{\partial W} - \deg \hat{f}|_{\partial W} \\ &= \sum_{\substack{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H) \\ (K) < (L)}} \alpha(K, H) \cdot b'(K) \cdot |N(H, K)|. \end{aligned}$$

Da sich diese Betrachtungen alle in einer Umgebung der Nullstellen in $C^L \setminus C^{>L}$ abspielen, welche keine anderen Nullstellen enthielt, sind die so erhaltenen Formeln unabhängig von den Induktionsschritten. Es ist nur noch festzustellen, daß die Unabhängigkeit der Zahlen $b(L)$ von H durch die Umschreibung erhalten bleibt. Zunächst ist aber die Definition der $b'(L)$ ebenfalls unabhängig von H und ferner wird in jeder Summe, in der $b(K)$ summiert wird, auch $b(K')$ summiert für $(K) < (K')$. Daher ist das endgültige $b(K)$, welches sich als Summe von $b'(K)$'s und dem in Fall 2 konstruierten $b(K)$ schreibt, unabhängig von (H) . Es folgt daher induktiv über alle Ausnahmeorbittypen der Satz. \square

2.3 Folgerungen und Ausblicke

Häufig wird man einer Situation begegnen, in der M und \mathbb{S} in der Notation des zweiten Hauptsatzes als G -Räume übereinstimmen. In diesem Fall gilt für alle Orbittypen trivialerweise $\dim M^H = \dim \mathbb{S}^H$. Dies impliziert einerseits, daß die Menge aller Orbittypen mit der Menge $O_*(M, \mathbb{S})$ übereinstimmt, andererseits folgt aus dem äquivarianten Satz von Kuratowski dann auch, daß die Abbildungen über die Sphären, welche für die Definition der O_{**} -Orbittypen gebraucht wurden, stets existieren (siehe hierzu Korollar 2.1.2). Also stimmt $Or(M)$ sogar mit $O_{**}(M, \mathbb{S})$ überein und es ergibt sich der folgende Spezialfall des Hauptsatzes:

Korollar 2.3.1 *Es sei \mathbb{S} die Sphäre in einer orthogonalen Darstellung der endlichen Gruppe G . Es seien alle Fixmengen \mathbb{S}^H orientierbar für $(H) \in \text{Or}(M)$. Sind $\varphi, \psi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ äquivalente Abbildungen, so gibt es zu jedem Orbittyp (K) eine ganze Zahl $b(K)$, so daß gilt*

$$\deg \varphi|_{\mathbb{S}^H} - \deg \psi|_{\mathbb{S}^H} = \sum_{(H) \leq (K)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(K, H)|.$$

Eine weitere einfache Konsequenz des Satzes ist eine relative Version, in der auch Hauptsatz 1 formuliert wurde. Der einzige Grund, wieso der zweite Hauptsatz nicht gleich relativ formuliert wurde, ist die einfachere Notation und eventuell Übersichtlichkeit im Beweis.

Korollar 2.3.2 *Es seien M, \mathbb{S}, G wie im zweiten Hauptsatz und $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$ äquivalent. Es sei $N \subseteq M$ invariante, abgeschlossene Teilmenge und φ und ψ seien äquivalent homotop auf N . Dann gilt:*

$$\deg \varphi|_{M^H} - \deg \psi|_{M^H} = \sum_{(K) \in O_{**}(M \setminus N, \mathbb{S}, H)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|$$

BEWEIS. Offensichtlich läuft der Beweis exakt so ab wie der des zweiten Hauptsatzes, mit den geeigneten Umformulierungen. \square

Das nächste Resultat trifft Aussagen, falls G nicht notwendig endlich ist.

Korollar 2.3.3 *Es sei G eine nicht notwendig endliche Gruppe, ansonsten liege dieselbe Situation wie im zweiten Hauptsatz vor. G operiere, so daß für alle Orbittypen (H) der Aktion $|W(H)| < \infty$ gilt. Dann gilt die Vergleichsformel auch in diesem Fall.*

BEWEIS. Man beachte, daß die Endlichkeit von $W(H)$ impliziert, daß auch $N(H, K)$ endlich ist für alle $K \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$, denn es gilt (sofern eine der beiden Seiten endlich ist)

$$|W(K, H)| \cdot |N(H, K)| = |W(H)|.$$

Dies folgt sofort aus dem Isomorphiesatz für Gruppen. Damit ist die Summe in der Vergleichsformel definiert. Die Behauptung folgt dann aus der Feststellung, daß die Endlichkeit der Gruppe G nirgends in den Beweis des Hauptsatzes einging außer in der Tatsache, daß auch die Gruppen $W(H)$ endlich sind. \square

Nur zitiert, aber nicht bewiesen werden soll die folgende Verallgemeinerung auf kompakte Liegruppen. Die Idee hinter dem Beweis wäre wieder die Standardprozedur über maximale Tori und p -Gruppen.

Theorem 2.3.4 *Es sei G eine kompakte Liegruppe, M, \mathbb{S} wie oben, $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$ äquivalent. T bezeichne einen maximalen Torus in G . Dann gilt:*

(1) *Ist G unendlich aber $(T) \notin O_{**}(M, \mathbb{S})$, dann ist*

$$\deg \varphi = \deg \psi.$$

(2) Ist $(T) \in O_{**}(M, \mathbb{S})$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}$, welche nur von der Gruppenaktion abhängt, sowie ganze Zahlen $b(K) \in \mathbb{Z}$ für $(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, T)$, so daß

$$\deg \varphi - \deg \psi = \alpha \cdot \sum_{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, T)} \alpha(K, T) \cdot b(K) \cdot \chi(G/K).$$

χ bezeichnet hier die Eulercharakteristik.

(3) Für $(H) \in O_*(M, \mathbb{S})$ und H Untergruppe von maximalem Rang, also $(T) \leq (H)$, gilt

$$\deg \varphi|_{MH} - \deg \psi|_{MH} = \alpha \cdot \sum_{(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|,$$

mit $b(K) \in \mathbb{Z}$ für $(K) \in O_{**}(M, \mathbb{S}, H)$.

Bemerkung: Die Tatsache, daß in (2) von obigem Theorem die Eulercharakteristik auftaucht beruht auf dem Fakt, daß $|N(T, K)| = \chi(G/K)$ gilt für $(T) \leq (K)$. Dieses Resultat findet man beispielsweise in [Bou]. Natürlich gilt auch im Fall kompakter Liegruppen eine relative Form des Theorems.

3 Verallgemeinerungen auf Banachräume

Um die bisher entwickelte Theorie anwenden zu können beispielsweise auf nichtlineare Operatorgleichungen, ist eine Verallgemeinerung auf den unendlichdimensionalen Fall nötig. Wie dies meist der Fall ist, sind hierfür einige technische Hilfsmittel vonnöten, wogegen die geometrischen Hintergründe bereits vollständig im endlichdimensionalen Fall geklärt wurden. Ziel sind nun zwei Verallgemeinerungen. Zum Einen soll die Situation betrachtet werden in der eine zyklische Gruppe G auf einem Hilbertraum H operiert, aber auf zwei verschiedene Arten. Zum Anderen soll ein Vergleichssatz wie im Endlichdimensionalen für äquivariante kompakte Vektorfelder

$$I - F : X \rightarrow X$$

auf einem G -Banachraum hergeleitet werden für eine beliebige endliche Gruppe G .

3.1 Zyklische Gruppenaktionen auf Hilberträumen

Zunächst wird der erste Ansatz verfolgt, Aussagen über Hilberträume mit zwei Aktionen der gleichen Gruppe G zu gewinnen. Dazu seien $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ zwei Kopien der selben Gruppe G . Die Elemente von $G^{(i)}$ werden dann mit $g^{(i)}$ bezeichnet. Als Gruppenelement ist also $g^{(1)} = g = g^{(2)}$, als Homöomorphismus

$$g^{(i)} : H \rightarrow H$$

für einen Hilbertraum H sind diese Elemente aber im Allgemeinen verschieden. Zunächst ein kurzer Exkurs über den Abbildungsgrad im unendlichdimensionalen Fall. Die elementaren funktionalanalytischen Hintergründe, die hier nicht bewiesen werden, findet man z.B. in [Dei].

Der Abbildungsgrad im Unendlichdimensionalen, Leray-Schauder-Grad genannt, wird allgemein wie folgt aus dem endlichdimensionalen Abbildungsgrad berechnet:

Es sei $\Omega \subseteq X$ eine offene beschränkte Teilmenge eines Banachraums, $F : \overline{\Omega} \rightarrow X$ eine kompakte Abbildung, das heißt $F(\overline{\Omega})$ ist kompakt (und F ist stetig). Es sei $y \in X$ und $F(y) \neq y$ auf $\partial\Omega$. Da F kompakt ist, läßt es sich durch eine Folge endlichdimensionaler Abbildungen approximieren. Man setze

$$\varepsilon := d(y, (I - F)(\partial\Omega))$$

und wähle ein endlichdimensionales $F_1 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ mit $\|F - F_1\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$. Weiter sei $X_1 \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Teilraum mit $y \in X_1$, $F_1(\overline{\Omega}) \subseteq X_1$ und $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$. Dann ist der endlichdimensionale Abbildungsgrad (siehe Anhang)

$$\text{deg}\left((I - F_1)|_{\Omega_1}, \Omega_1, y\right)$$

wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl von F_1 oder X_1 ab. Der Leray-Schauder-Grad von F ist daher definiert als

$$LS(I - F, \Omega, y) = \text{deg}\left((I - F_1)|_{\Omega_1}, \Omega_1, y\right).$$

Wenn man nun die Ergebnisse aus den ersten Abschnitten übertragen möchte wäre es im Prinzip notwendig, den Teilraum X_1 invariant zu wählen. Für den Fall, daß zwei verschiedene

Aktionen gegeben sind, ist es aber im Allgemeinen nicht möglich, einen in Bezug auf beide Aktionen invarianten endlichdimensionalen Teilraum zu finden. Daher muß hier ein weiterer Approximationsschritt eingefügt werden. Zunächst wird der Begriff der Homotopie zwischen zwei kompakten Abbildungen verschärft, indem zwei solche Abbildungen homotop genannt werden, wenn die verbindende Homotopie kompakt ist. Dies wird also in diesem Kapitel stets vorausgesetzt.

Es sei $\varepsilon > 0$, X G -Banachraum mit zwei Aktionen der Gruppe G , $\Omega \subseteq X$ offen, beschränkt und invariant bzgl. beider Aktionen. Dann heißt eine Abbildung $F : \Omega \rightarrow X$ ε -äquivariant, falls

$$\|F \circ g^{(1)} - g^{(2)} \circ F\| < \varepsilon$$

gilt für alle $g \in G$. Der folgende Satz ist ein wichtiger Schritt im Laufe der Verallgemeinerung, und zwar besagt er, daß die Resultate des zweiten Hauptsatzes bereits gelten, wenn nur ε -Äquivarianz vorliegt für hinreichend kleines ε . Genauer kann man $\varepsilon < 1$ beliebig wählen.

Satz 3.1.1 *Es seien die Voraussetzungen des zweiten Hauptsatzes 2.1.6 gegeben mit der Ausnahme, daß $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{S}$ nur ε -äquivariante Abbildungen sind, welche ε -äquivariant-homotop auf N sind. Ist $\varepsilon < 1$ so gelten die Folgerungen aus dem Hauptsatz auch für φ und ψ .*

BEWEIS. Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{S}$ eine beliebige ε -äquivariante Abbildung. Man setze

$$f_1(x) = \int_G g^{-1} f(gx) dg.$$

Dann ist $f_1(x) \neq 0$ und homotop zu f . Denn es sei $H(t, x) = t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f_1(x)$. Es reicht dann zu zeigen, daß $H(t, x) \neq 0$ für $t \in I$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \|H(t, x)\| &= \|t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f_1(x)\| \\ &\geq \|f(x)\| - t \cdot \|f(x) - f_1(x)\| \\ &= 1 - t \cdot \|f(x) - f_1(x)\| \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn $\|f(x) - f_1(x)\| < 1$ gezeigt wird.

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_1(x)\| &= \left\| f(x) - \int_G g^{-1} f(gx) dg \right\| \\ &= \left\| \int_G f(x) - g^{-1} f(gx) dg \right\| \\ &\leq \int_G \|f(x) - g^{-1} f(gx)\| dg \\ &= \int_G \|g^{-1} g f(x) - g^{-1} f(gx)\| dg \\ &= \int_G \|g f(x) - f(gx)\| dg < \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|}$$

wohldefiniert. Die Homotopie

$$H'(t, x) = f_1(x) \cdot \left(t + \frac{1-t}{\|f_1(x)\|} \right),$$

ist offenbar nicht entartet, also ist f_2 homotop zu f_1 und damit zu f . Diese Homotopie wird noch öfter in diesem Kapitel auftauchen. Schließlich ist $f_2 : M \rightarrow \mathbb{S}$ äquivariant, denn

$$\begin{aligned} f_2(gx) &= \frac{f_1(gx)}{\|f_1(gx)\|} \\ &= \frac{gf_1(x)}{\|gf_1(x)\|} \\ &= g \left(\frac{f_1(x)}{\|gf_1(x)\|} \right) \\ &= g \left(\frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|} \right) \\ &= gf_2(x) \end{aligned}$$

Damit folgt der Satz aus der Tatsache, daß φ, ψ und eine ε -Homotopie H relativ N zwischen diesen, jeweils homotop sind zu φ_2, ψ_2 und H_2 . H_2 ist eine Homotopie zwischen φ_2 und ψ_2 , somit ist der zweite Hauptsatz (in seiner relativen Version) für φ_2 und ψ_2 anwendbar und homotope Abbildungen haben gleichen Abbildungsgrad. \square

Als Nächstes wird das Problem behandelt, daß i.A. kein invarianter Teilraum bzgl. beider Aktionen existiert. Dazu folgende

Definition 3.1.2 Es sei X ein Banachraum, $Y, Z \subseteq X$ Teilräume sowie $\delta > 0$. Dann heißt Y δ -nah an Z , falls für jedes y aus der Einheitssphäre in Y ein $z \in Z$ existiert mit

$$\|y - z\| < \delta.$$

Die Idee wird sein, für einen invarianten Teilraum bzgl. der einen Aktion und ein $\delta > 0$ einen invarianten Teilraum bzgl. der zweiten Aktion zu finden, welcher δ -nah an Ersterem liegt. Für hinreichend kleines δ kann man dann die Resultate übertragen. Einige technische Schwierigkeiten hierbei, beispielsweise die Tatsache, daß es in einem allgemeinen Banachraum nicht notwendig Projektionen der Norm 1 auf abgeschlossene Teilräume geben muß, motivieren die Einschränkung der Probleme auf Hilberträume. Dort ergibt sich das

Lemma 3.1.3 Es sei H ein Hilbertraum, $H_1 \subseteq H$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Die endliche Gruppe G operiere auf zwei Arten orthogonal auf H und der Operator $g^{(1)} - g^{(2)}$ sei vollständig stetig für jedes $g \in G$, das heißt das Bild beschränkter Mengen ist relativ kompakt. Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ einen endlichdimensionalen Teilraum $K \subseteq H$ mit $H_1 \subseteq K$, K ist invariant unter der $G^{(1)}$ -Aktion und $g^{(2)}(K)$ ist δ -nah an K für jedes $g \in G$.

BEWEIS. Da der Operator $g^{(1)} - g^{(2)}$ vollständig stetig ist für jedes $g \in G$ gibt es einen endlichdimensionalen Operator $A^g : H \rightarrow H$ mit

$$\|A^g - (g^{(1)} - g^{(2)})\| < \delta.$$

Es sei $T^g \subseteq H$ ein endlichdimensionaler Teilraum, welcher das Bild von A^g umfaßt. Man setze

$$K = \left\langle \bigcup_{g \in G} g^{(1)}(H_1 + T^g) \right\rangle,$$

der lineare Spann der angegebenen Menge. Da G endlich ist, ist die Einheitskugel in K kompakt, also K endlichdimensional. Ebenso ist $H_1 \subseteq K$ und Invarianz unter $G^{(1)}$ klar. Es sei nun $x \in g^{(2)}(K) \cap \mathbb{S}$, wobei $\mathbb{S} \subset H$ die Einheitskugel ist. Es ist ein $z \in K$ zu finden mit $\|x - z\| < \delta$. Dazu sei $y = (g^{(2)})^{-1}(x) \in K$ und $z = -A^g y + g^{(1)} y \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|g^{(2)}y + A^g y - g^{(1)}y\| \\ &\leq \|A^g - (g^{(1)} - g^{(2)})\| \cdot \|y\| < \delta \end{aligned} \quad \square$$

Im Folgenden sollen nun Elemente der operierenden Gruppe von endlicher Ordnung approximiert werden. Ziel ist der folgende

Satz 3.1.4 *Es sei H ein endlichdimensionaler Hilbertraum, $A : H \rightarrow H$ ein orthogonaler Operator der Ordnung q . Es sei $K \subseteq H$ ein Teilraum, $\delta > 0$ und $A(K)$ sei δ -nah an K . Dann gibt es einen orthogonalen Operator $A_0 : K \rightarrow K$ der Ordnung q mit*

$$\|A - A_0\| < 2\delta(2q + 1).$$

Der Beweis beruht auf den folgenden Lemmata.

Lemma 3.1.5 *Es seien X, Y n -dimensionale Unterräume eines Hilbertraums H . Y sei δ -nah an X für ein $\delta > 0$. Dann gibt es einen orthogonalen Operator $A : Y \rightarrow X$ mit*

$$\|Ax - x\|_H < 2\delta \cdot \|x\|.$$

BEWEIS. Es sei $E = X + Y$. Mit C_D^\perp wird das orthogonale Komplement von C in D bezeichnet. Für den Fall $Y \cap X_E^\perp \neq \{0\}$ ist $\delta \geq 1$, da für ein Element y aus dem Schnitt, $\|y\| = 1$, gilt:

$$\|y - x\| = \|y\| + \|x\| \geq 1 \quad \forall x \in X.$$

In diesem Fall kann aber für A ein beliebiger orthogonaler Operator gewählt werden. Man kann also im Folgenden $Y \cap X_E^\perp = \{0\}$ annehmen. Der folgende Beweis läuft in mehreren Schritten ab. In den ersten beiden Schritten wird eine orthogonale Basis von B konstruiert, so daß ihr Bild unter der Orthogonalprojektion auf A eine Orthogonalbasis von A ist. Davon ausgehend wird der Satz in Schritt 3 bewiesen.

Schritt 1. In diesem Schritt sei $X \cap Y = \{0\}$ an. Es seien $p_1 : Y \rightarrow X$, $p_2 : Y \rightarrow X_H^\perp$ die Einschränkungen der Orthogonalprojektionen. Wegen $\dim X = \dim Y = n$ und wegen der

Annahme $X \cap Y = \{0\}$ sind diese Einschränkungen invertierbar. Es sei $p_0 : X \rightarrow X_E^\perp$ ein orthogonaler Operator. Wegen $\dim X = \dim X_E^\perp$ ist auch p_0 invertierbar. Man definiere

$$p : X \rightarrow X, p = p_0^{-1} \circ p_2 \circ p_1^{-1}.$$

Es sei $p = \mu \circ \sigma$ die Polarzerlegung von p , also μ orthogonal, σ symmetrisch. Man wähle eine Orthogonalbasis $\{x'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von X in der σ Diagonalgestalt hat. Dann ist $\{\sigma(x'_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ eine Orthogonalbasis von X und damit auch $\{\mu \circ \sigma(x'_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Man setze $y'_i = p_1^{-1}(x'_i)$. Es folgt

$$p_2(y'_i) = p_2(p_1^{-1}(x'_i)) = p_0(p(x'_i)),$$

und dies ist gerade das Bild unter p_0 einer Orthogonalbasis von X , somit eine Orthogonalbasis von X_E^\perp . Da also die Projektionen von $\{y'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ auf X bzw. X^\perp jeweils eine Orthogonalbasis dieses Raums bilden, sind die y_i selbst eine Orthogonalbasis für Y , und das Bild unter der Projektion ist eine solche für X , was zu zeigen war.

Schritt 2. Es sei nun $X \cap Y = Z \neq \{0\}$. Dann setze man $X_1 = Z_X^\perp$, $Y_1 = Z_Y^\perp$. Es ergibt sich die Zerlegung

$$E = X_1 \oplus Y_1 \oplus Z.$$

Mit $E_1 = X_1 \oplus Y_1$ liegt hier die schon behandelte Situation vor, so daß es eine Orthogonalbasis von Y_1 gibt, $\{y'_i\}_{1 \leq i \leq m}$, deren Projektion auf X_1 eine solche Basis für X_1 ist. Man ergänze diese zu einer Orthogonalbasis von Y (die hinzugefügten Basisvektoren sind dann eine Orthogonalbasis von Z). Diese Basis besitzt offenbar die gewünschten Eigenschaften.

Schritt 3. Um nun das Lemma zu beweisen wähle man eine Orthonormalbasis von Y , $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$, so daß die normierte Projektion eine Orthonormalbasis von X ist, also

$$x_i = \frac{p_1(y_i)}{\|p_1(y_i)\|}.$$

Damit definiere man

$$A : Y \rightarrow X, \quad Ay_i = x_i.$$

Diese Abbildung besitzt die gewünschte Eigenschaft. Es sei nämlich $y \in Y$ mit

$$\|y\| = 1, \quad y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1.$$

Mit $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ und $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ist auch das System $\{y_i - x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ orthogonal, ferner ist der Abstand $\|y_i - p_1(y_i)\| < \delta$ nach Voraussetzung. Aus diesen beiden Beobachtungen folgt mit

Elementargeometrie am Einheitskreis (Satz von Pythagoras):

$$\begin{aligned}
\|Ay - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (x_i - y_i) \right\| \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \|x_i - y_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot (2 \cdot (1 - \sqrt{1 - \delta^2})) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2 \cdot (1 - \sqrt{1 - \delta^2})} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&< 2\delta \cdot 1 = 2\delta \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.6 *Es sei H ein endlichdimensionaler Hilbertraum, $A : H \rightarrow H$ ein orthogonaler Operator der Ordnung q , $K \subseteq H$ ein Teilraum und $A(K)$ sei δ -nah an K für ein $\delta > 0$. Es sei $\varphi : A(K) \rightarrow K$ ein orthogonaler Operator wie in Lemma 3.1.5. Dann gilt für alle $x \in K$:*

$$\|(\varphi A)^q x - x\| < 2q\delta \cdot \|x\|.$$

BEWEIS. Es sei $x \in K$. Induktiv wird gezeigt:

$$\|(\varphi A)^m x - A^m x\| < 2m\delta \cdot \|x\|.$$

Für $m = 1$ folgt dies sofort aus

$$\|(\varphi A)x - Ax\| = \|(\varphi - \mathbb{1})Ax\| < 2\delta \cdot \|x\|$$

nach Wahl von φ . Gelte die Abschätzung also für ein $m \geq 1$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\|(\varphi A)^{m+1} x - A^{m+1} x\| &= \|(\varphi A)^{m+1} x - \varphi A^{m+1} x + \varphi A^{m+1} x - A^{m+1} x\| \\
&\leq \|(\varphi A)^{m+1} x - \varphi A^{m+1} x\| + \|\varphi A^{m+1} x - A^{m+1} x\| \\
&= \|(\varphi A)(\varphi A)^m x - (\varphi A)A^m x\| + \|(\varphi - \mathbb{1})A^{m+1} x\| \\
&\leq \|\varphi A\| \cdot \|(\varphi A)^m x - A^m x\| + 2\delta \cdot \|A^{m+1} x\| \\
&= \|(\varphi A)^m x - A^m x\| + 2\delta \cdot \|x\| \\
&< 2m\delta \cdot \|x\| + 2\delta \|x\| = 2(m+1)\delta \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

Wegen $A^q x = x$ für $x \in K$ folgt die Behauptung. □

Lemma 3.1.7 *Es sei K ein endlichdimensionaler Hilbertraum, $A : K \rightarrow K$ orthogonaler Operator mit $\|A^p - \mathbb{1}\| < \delta$ für ein $\delta > 0$ (und $p \geq 2$). Dann gibt es einen orthogonalen Operator $A_0 : K \rightarrow K$ mit $A_0^p = \mathbb{1}$ und $\|A - A_0\| \leq 2\delta$.*

BEWEIS. Es sei zunächst $\delta \geq 2$. Man setze $A_0 = \mathbb{1}$. Es folgt $\|A - A_0\| \leq \|A\| + \|A_0\| = 2$. Also braucht nur der Fall $\delta < 2$ näher betrachtet werden. Es sei $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_k$ die Zerlegung von K in A -invariante Unterräume gemäß des Satzes über die reelle Normalform. Dann zerlegt sich der Operator A entsprechend in $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$. Die Unterräume K_i sind ein- oder zweidimensional. Es sei K_i ein zweidimensionaler Unterraum, dann ist A_i eine Rotation um einen Winkel φ . Man setze

$$\psi = \frac{2\pi}{p} \cdot \left[\frac{p\varphi}{2\pi} \right]$$

wobei $[x]$ die übliche Gaußklammer bezeichnet, also die natürliche Zahl mit minimalen Abstand zu x . Dies ist also derjenige Drehwinkel um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$, welcher ϕ am nächsten liegt. Man setze $A_i^{(0)}$ als die Rotation um ψ . Zur Abkürzung sei allgemein $B(\vartheta)$ die Rotation um den Winkel ϑ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|B(\varphi)x - B(\psi)x\| &\leq 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \right| \cdot \|x\| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|\varphi - \psi|}{2} \cdot \|x\| \\ &= |\varphi - \psi| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Wegen $\|A^p - \mathbb{1}\| < \delta$ gilt auch $\|A_i^p - \mathbb{1}\| < \delta$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|A_i^p - \mathbb{1}\| &= \|B(\varphi)^p - \mathbb{1}\| \\ &= \|B(p \cdot \varphi) - \mathbb{1}\| \\ &= 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{p \cdot \varphi}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta > 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{p\varphi}{2}\right) \right| &= 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{p}{2}(\varphi - \psi + \psi)\right) \right| \\ &= 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{p}{2}(\varphi - \psi) + \frac{p}{2} \cdot \frac{2\pi}{p} \cdot \left[\frac{p\varphi}{2\pi} \right] \right) \right| \\ &= 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{p}{2}(\varphi - \psi)\right) \right| \\ &\geq 2 \cdot \frac{p}{2} |\varphi - \psi| \cdot \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2p}{\pi} |\varphi - \psi|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich dabei aus $\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, falls $0 < x < \frac{\pi}{2}$, was nach Definition von ψ hier erfüllt ist. Man erhält also

$$|\varphi - \psi| < \frac{\pi\delta}{2p}$$

und damit auch

$$\|A_i - A_i^{(0)}\| < \frac{\pi\delta}{2p}.$$

Für die eindimensionalen K_i setze man $A_i^{(0)} = A_i$. Dies definiert einen Operator

$$A_0 = A_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus A_k^{(0)}.$$

Dann ist

$$\|A - A_0\| \leq \max \|A_k - A_k^{(0)}\| \leq \frac{\pi\delta}{2p} < 2\delta.$$

Offenbar gilt $(A_i^{(0)})^p = \mathbb{1}$ für diejenigen i , welche zu zweidimensionalen K_i gehören. Daher ist $A_0^p = \mathbb{1}$ klar, falls es keine eindimensionalen K_i gibt. Falls es aber solche gibt, so korrespondieren diese entweder zum Eigenwert 1 oder zum Eigenwert -1 . Gibt es ein K_i welches zu -1 korrespondiert und wäre p ungerade, so wäre die Voraussetzung

$$\|A^p - I\| < 2$$

verletzt. Also sind entweder alle eindimensionalen Blöcke solche zum Eigenwert 1, oder p ist gerade. In beiden Fällen folgt

$$A_0^p = \mathbb{1},$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Die drei obigen Lemmata beinhalten die gesamte Arbeit im Beweis von Satz 3, der nun folgt.

BEWEIS. (von Satz 3.1.4): Man findet mit Lemma 3.1.5 einen orthogonalen Operator $B : A(K) \rightarrow K$ mit $\|Bx - x\| < 2\delta \cdot \|x\|$. Nach Lemma 3.1.6 gilt dann (siehe auch die Induktion dort):

$$\|BA - A\| < 2\delta \quad \text{und} \quad \|(BA)^q - \mathbb{1}\| < 2q\delta.$$

Gemäß Lemma 3.1.7 gibt es einen orthogonalen Operator $A_0 : K \rightarrow K$ mit $A_0^q = \mathbb{1}$ und $\|(BA) - A_0\| < 4q\delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|A - A_0\| &= \|A - BA + BA - A_0\| \\ &\leq \|A - BA\| + \|BA - A_0\| \\ &< 2\delta(2q + 1). \end{aligned} \quad \square$$

Vor der Formulierung der Hauptresultate wird noch ein technisches aber leicht einzusehendes Lemma benötigt, welches die intuitiv unmittelbar einsehbare Tatsache liefert, daß nichtdegenerierte kompakte homotope Vektorfelder stets gleichmäßig nichtdegeneriert homotop sind.

Lemma 3.1.8 *Es sei X ein Banachraum, $N \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt. Es sei $\mathbb{1} - H_t$ eine kompakte, nichtdegenerierte Homotopie auf N zwischen den kompakten Vektorfeldern $\mathbb{1} - A_0$ und $\mathbb{1} - A_1$. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ mit*

$$\|x - H_t(x)\| \geq \alpha$$

für alle $x \in N, t \in I$.

BEWEIS. Angenommen, es gäbe Folgen $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|x_n - H_{t_n}(x_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Da die Homotopie kompakt ist kann man $t_n \rightarrow t_0 \in I$ und $H_{t_n}(x_n) \rightarrow x \in X$ annehmen. Wegen

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &\leq \|x_n - H_{t_n}(x_n)\| + \|H_{t_n}(x_n) - x\| \\ &< \frac{1}{n} + \|H_{t_n}(x_n) - x\| \end{aligned}$$

konvergiert auch x_n gegen x , also $x \in N$. Weiter folgt

$$\|x - H_t(x)\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - H_{t_n}(x_n)\| + \|H_{t_n}(x_n) - H_t(x)\|,$$

also $\|x - H_t(x)\| = 0$, im Widerspruch zur Nichtdegeneriertheit der Homotopie auf N . \square

Der Satz 3.1.4 erlaubt nun, das erste Hauptresultat in unendlichen Dimensionen zu beweisen und zwar den Vergleichssatz auf Hilberträumen für zyklische Gruppenaktionen. Die Idee hinter dem Beweis ist es, die fraglichen Abbildungen zu approximieren, wobei die Äquivarianz der Approximationen i.A. nicht gewährleistet ist. Daher muß man so vorsichtig arbeiten, daß zumindest ε -Äquivarianz für ein $\varepsilon < 1$ gegeben ist, denn dann ist Satz 3.1.1 anwendbar.

Theorem 3.1.9 *Es sei H ein Hilbertraum, G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung p . G operiere auf zwei Arten auf H , beschrieben durch $G^{(1)}, G^{(2)}$. Es sei $\Omega \subseteq H$ ein beschränktes Gebiet in H und $\partial\Omega \cap K$ sei eine orientierbare, zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit für jeden endlichdimensionalen Teilraum $K \subseteq H$ hinreichend großer Dimension. Es sei $N \subseteq \bar{\Omega}$ abgeschlossen und $G^{(1)}$ -invariant. $G^{(1)}$ operiere auf $\partial\Omega \setminus N$ mit einem Orbittyp (H) . Es seien $\Phi = \mathbb{1} - A, \Psi = \mathbb{1} - B : \bar{\Omega} \rightarrow H$ kompakte Vektorfelder ohne Nullstellen auf $\partial\Omega$, und Φ und Ψ seien G -äquivariant homotop auf N durch eine nichtdegenerierte, kompakte Homotopie. Dann gilt:*

$$LS(\Phi, \Omega, 0) = LS(\Psi, \Omega, 0) \pmod{|G/H|}.$$

BEWEIS. Es sei $H(t, x) = x - \mu(t, x)$ eine Homotopie auf N zwischen Φ und Ψ wie angegeben. Nach Lemma 3.1.8 gibt es ein $\alpha > 0$, so daß gleichzeitig die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\|\Phi(x)\| \geq \alpha, \quad \|\Psi(x)\| \geq \alpha \text{ auf } \partial\Omega, \quad \|H(t, x)\| \geq \alpha \text{ auf } N \cap \partial\Omega.$$

Es sei nun $\varepsilon_1 > 0$ beliebig, dann gibt es endlichdimensionale Vektorfelder $\Phi_1 = \mathbb{1} - A_1, \Psi_1 = \mathbb{1} - B_1 : \bar{\Omega} \rightarrow H$ ohne Nullstellen auf $\partial\Omega$ und eine endlichdimensionale Homotopie $\mathbb{1} - \mu_1 : N \times I \rightarrow H$ ohne Nullstellen auf $N \cap \partial\Omega$ mit

$$\|\Phi - \Phi_1\| < \varepsilon_1, \quad \|\Psi - \Psi_1\| < \varepsilon_1, \quad \|\mu - \mu_1\| < \varepsilon_1.$$

Somit gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $K \subseteq H$, welcher die Bilder von $\mathbb{1} - \Phi_1, \mathbb{1} - \Psi_1$ und μ_1 umfaßt. Man kann annehmen, daß $\partial\Omega \cap K$ eine glatte, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist.

Zu $\delta > 0$ gibt es nach Lemma 3.1.3 einen endlichdimensionalen Teilraum $K_1 \subseteq H$ mit $K \subseteq K_1$, welcher $G^{(1)}$ invariant ist und $g^{(2)}(K_1)$ ist δ -nah an K_1 für jedes $g \in G$. Insbesondere gilt dies für einen Erzeuger h von G , welcher Ordnung p besitzt. Man wähle gemäß Satz 3.1.4 einen orthogonalen Operator $h^{(3)} : K_1 \rightarrow K_1$ mit $(h^{(3)})^p = \mathbb{1}$ und $\|h^{(2)} - h^{(3)}\| < 2\delta(2p+1)$.

Es sei $\pi : H \rightarrow K_1$ die Orthogonalprojektion. Man definiere

$$\Phi_1 x = x - \pi A x, \quad \Psi_2 x = x - \pi B x, \quad \mu_2(t, x) = \pi \mu(t, x),$$

wann immer diese Ausdrücke definiert sind. Wegen $\text{Bild}(A_1) \subseteq K_1$ ist $A_1 = \pi \circ A$ und es folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi - \Phi_2\| &\leq \|\Phi - \Phi_1\| + \|\Phi_1 - \Phi_2\| \\ &< \varepsilon_1 + \|A_1 - \pi \circ A\| \\ &\leq \varepsilon_1 + \|\pi\| \cdot \|A_1 - A\| \leq 2\varepsilon_1 \end{aligned}$$

Analog erhält man die Abschätzungen $\|\Psi - \Psi_2\| < 2\varepsilon_1$ und $\|\mu - \mu_2\| < 2\varepsilon_1$. Man ersetze nun die Aktion von $G^{(2)} = \langle h^{(2)} \rangle$ durch die Aktion von $\langle h^{(3)} \rangle$. Damit liegen zwei Aktionen der Gruppe G auf dem Raum K_1 vor. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|h^{(1)} \circ \Phi_2 - \Phi_2 \circ h^{(3)}\| &= \|h^{(1)} \circ \Phi_2 - h^{(1)} \circ \Phi + h^{(1)} \circ \Phi - \Phi_2 \circ h^{(3)}\| \\ &\leq \|h^{(1)} \circ \Phi_2 - h^{(1)} \circ \Phi\| + \|\Phi \circ h^{(2)} - \Phi_2 \circ h^{(2)}\| \\ &\quad + \|\Phi_2 \circ h^{(2)} - \Phi_2 \circ h^{(3)}\| \\ &\leq 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 + 2\delta(2p+1) \end{aligned}$$

Bei geeigneter Wahl von δ und ε_1 kann also erreicht werden, daß Φ_2 ε_2 -äquivariant ist für jedes $\varepsilon_2 > 0$. Analog sind dann auch Ψ_2 und $\mathbb{1} - \mu_2$ ε_2 -äquivariant. Es bezeichne nun Φ_2^R die Restriktion von Φ_2 auf $K_1 \cap \partial\Omega$. Man beachte, daß letzteres nach Wahl von K_1 eine glatte, orientierbare, zusammenhängende, endlichdimensionale Mannigfaltigkeit ist. Analog definiere man die Restriktionen Ψ_2^R und μ_2^R , letzteres natürlich eingeschränkt auf $K_1 \cap \partial\Omega \cap N$ und Φ_3, Ψ_3, μ_3 seien die entsprechenden normierten Vektorfelder. Für diese gilt nun, beispielhaft für Φ_3 :

$$\begin{aligned} \|h^{(1)}\Phi_3(x) - \Phi_3(h^{(3)}x)\| &= \left\| \frac{h^{(1)}\Phi_2^R(x)}{\|\Phi_2^R(x)\|} - \frac{\Phi_2^R(h^{(3)}x)}{\|\Phi_2^R(h^{(3)}x)\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{h^{(1)}\Phi_2^R(x)}{\|\Phi_2^R(x)\|} - \frac{\Phi_2^R(h^{(3)}x)}{\|\Phi_2^R(x)\|} \right\| + \left\| \frac{\Phi_2^R(h^{(3)}x)}{\|\Phi_2^R(x)\|} - \frac{\Phi_2^R(h^{(3)}x)}{\|\Phi_2^R(h^{(3)}x)\|} \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{\alpha} + \frac{\left| \|\Phi_2^R(x)\| - \|\Phi_2^R(h^{(3)}x)\| \right|}{\|\Phi_2^R(x)\|} \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{\alpha} + \frac{\|h^{(1)}\Phi_2^R(x) - \Phi_2^R(h^{(3)}x)\|}{\|\Phi_2^R(x)\|} \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Orthogonalität der Aktion von $h^{(1)}$ verwendet. Somit können Φ_3, Ψ_3 und $\mathbb{1} - \mu_3$ ε_3 -äquivariant gewählt werden für beliebiges $\varepsilon_3 > 0$. Ferner sind diese Abbildungen

sämtlich homotop zu Φ_2^R bzw. Ψ_2^R bzw. $\mathbb{1} - \mu_2^R$ mittels der Standardhomotopie. $\mathbb{1} - \mu_3$ ist eine ε_3 -äquivariante Homotopie zwischen Φ_3 und Ψ_3 , welche selbst ε_3 -äquivariant sind. Wählt man also $\varepsilon_3 < 1$, so liefert Satz 3.1.1:

$$\begin{aligned} LS(\Phi, \Omega, 0) &= \deg(\Phi_3, \partial\Omega \cap K_1, 0) \\ &\equiv \deg(\Psi_3, \partial\Omega \cap K_1, 0) = LS(\Psi, \Omega, 0) \pmod{|G/H|}. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf Banachräume

Zum Abschluß soll nun noch eine direkte Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes auf Banachräume vorgenommen werden. Es sei $\Omega \subseteq X$ ein Gebiet in einem Banachraum, welches die 0 enthält. Für ein kompaktes Vektorfeld Φ auf $\overline{\Omega}$, welches keine Nullstellen auf $\partial\Omega$ besitzt, sei die Windungszahl $\gamma(\Phi)$ als der Leray-Schauder-Grad $LS(\Phi, \Omega, 0)$ definiert.

Theorem 3.2.1 *Es sei X eine isometrische Darstellung einer endlichen Gruppe G . Es sei $\Omega \subseteq X$ ein invariantes, offenes Gebiet und $0 \in \Omega$. Für jedes $(H) \in Or(\partial\Omega)$ sei der Schnitt von $X^H \cap \partial\Omega$ mit einem endlichdimensionalen Teilraum hinreichend großer Dimension eine glatte, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Es sei $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow X$ ein kompaktes äquivariantes Vektorfeld ohne Nullstellen auf $\partial\Omega$. Dann gilt:*

(1) *Ist $\partial\Omega \cap X^G = \emptyset$, so ist*

$$\gamma(\Phi) \equiv 1 \pmod{\text{ggT}\{|G/K| \mid (K) \in Or(\partial\Omega)\}}.$$

(2) *Ist $\partial\Omega \cap X^G \neq \emptyset$, so ist*

$$\gamma(\Phi) \equiv \gamma(\Phi|_{(\partial\Omega \cap X^G)}) \pmod{\text{ggT}\{|G/K| \mid (K) \in Or(\partial\Omega), (K) \neq (G)\}}.$$

(3) *Ist $\partial\Omega \cap X^G \neq \emptyset$ und $(H) \in Or(\partial\Omega)$, so ist*

$$\gamma(\Phi|_{(\partial\Omega \cap X^H)}) \equiv \gamma(\Phi|_{(\partial\Omega \cap X^G)}) \pmod{\text{ggT}\{|N(H, K)| \mid (H) \leq (K) < (G)\}}.$$

BEWEIS. Der Beweis folgt exakt dem gleichen Prinzip wie Satz 3.1.9, nur daß hier kein Problem mehr mit den invarianten Unterräumen auftaucht. Der Vollständigkeit halber wird der Beweis dennoch ausgeführt. Es ist $\Phi = \mathbb{1} - A$, A kompakt. Zu $\varepsilon_1 > 0$ wähle man eine endlichdimensionale ε_1 -Approximation A_1 von A . Es sei X_1 ein invarianter, endlichdimensionaler Unterraum mit $A_1(\overline{\Omega}) \subseteq X_1$. Dann gilt mit $\Phi_1 = \mathbb{1} - A_1$ für jedes $g \in G$:

$$\begin{aligned} \|g\Phi_1 - \Phi_1g\| &\leq \|g\Phi_1 - g\Phi\| + \|\Phi g - \Phi_1g\| \\ &= \|\Phi_1 - \Phi\| + \|\Phi - \Phi_1\| \\ &\leq 2 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Es kann also ε -Äquivarianz für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ erreicht werden. Da A kompakt ist und $\Phi(x) \neq 0$ gilt, gibt es eine positive untere Schranke $\alpha > 0$ von Φ_1 für hinreichend kleine Wahl von ε_1 . Man setze

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1^r}{\|\Phi_1^r\|}$$

wobei Φ_1^r die Restriktion von Φ_1 auf $\partial\Omega \cap X_1$ bezeichne. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|g\Phi_2 - \Phi_2g\| &= \left\| g \frac{\Phi_1^r}{\|\Phi_1^r\|} - \frac{\Phi_1^r g}{\|\Phi_1^r g\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{g\Phi_1^r}{\|\Phi_1^r\|} - \frac{\Phi_1^r g}{\|\Phi_1^r\|} \right\| + \left\| \frac{\Phi_1^r g}{\|\Phi_1^r\|} - \frac{\Phi_1^r g}{\|\Phi_1^r g\|} \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \frac{|\|\Phi_1^r g\| - \|\Phi_1^r\||}{\|\Phi_1^r\|} \\ &\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Also kann auch für das Vektorfeld Φ_2 ε -Äquivarianz für beliebiges $\varepsilon > 0$ erreicht werden. Ferner ist Φ_2 homotop zu Φ_1^r via der Homotopie

$$H(t, x) = \Phi_1^r(x) \cdot \left(t + \frac{(1-t)}{\|\Phi_1^r(x)\|} \right).$$

Man wähle ε_1 , so daß Φ_2 $\frac{1}{2}$ -äquivariant ist. Dann kann man annehmen, daß $X_1 \cap \partial\Omega$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist und es folgt aus der Definition der Windungszahl:

$$\gamma(\Phi) = \deg(\Phi_2, X_1 \cap \partial\Omega, 0).$$

Völlig analog zum Beweis von Satz 3.1.9 kann man die obigen Approximationen simultan für ein weiteres Vektorfeld $\Psi : X \rightarrow X$ durchführen und auch hier folgt

$$\gamma(\Psi) = \deg(\Psi_2, X_1 \cap \partial\Omega, 0).$$

Die beiden Grade auf der jeweils rechten Seite der beiden Gleichungen können nun gemäß Satz 3.1.1 verglichen werden. Es werden die 3 Fälle der Behauptung betrachtet.

- (1) Man kann Φ mit $\Psi = \mathbb{1}$ vergleichen und es folgt sofort aus dem zweiten Hauptsatz

$$\gamma(\Phi) \equiv 1 \pmod{\text{ggT}\{|G/K| \mid (K) \in \text{Or}(\partial\Omega)\}},$$

da es keine Unterscheidung in O_{**} - bzw. O_* -Orbittypen gibt (Korollar 2.3.1).

- (2) Ist $\partial\Omega \cap X^G \neq \emptyset$, so ist die Formel aus (1) zwar gültig aber trivial, da dann $(G) \in \text{Or}(\partial\Omega)$ ist. Jedoch kann man nun $\Psi \equiv x_0 \in \partial\Omega \cap X^G$ betrachten. Ψ hat natürlich Grad 0 und der Vergleichssatz liefert daher

$$\gamma(\Phi) = \sum_{(K) \in \text{Or}(\partial\Omega)} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|.$$

Wendet man den Vergleichssatz auf $(G) \in \text{Or}(\partial\Omega)$ an, so erhält man weiter

$$\gamma(\Phi|_{\partial\Omega \cap X^G}) = \alpha(G, G) \cdot b(G) \cdot |N(G, G)| = b(G).$$

Zusammen liefert dies

$$\gamma(\Phi) - \gamma(\Phi|_{\partial\Omega \cap X^G}) = \sum_{\substack{(K) \in \text{Or}(\partial\Omega) \\ (K) \neq (G)}} \alpha(K, H) \cdot b(K) \cdot |N(H, K)|,$$

also folgt die Behauptung.

(3) Dies folgt genau wie (2), der einzige Grund für die Unterscheidung ist, daß $\{e\}$ kein Orbittyp sein muß.

Damit ist alles gezeigt.

□

4 Ein Existenzsatz für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen

In diesem Kapitel soll die entwickelte Theorie, speziell Satz 3.2.1, auf ein praktisches Problem angewendet werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist der Abbildungsgrad ein wichtiges Hilfsmittel, wenn nichtlineare Gleichungen gelöst werden sollen. Das Nichtverschwinden des Grades selbst (dieser lebt auf endlichdimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeiten) impliziert Surjektivität, daß Nichtverschwinden des lokalen Grades um einen Punkt x , z.B. in einem Banachraum X , impliziert die Existenz eines Urbildes von x . Ein Prinzip der nichtlinearen Funktionalanalysis ist daher das Folgende: Man schreibe ein Problem, beispielsweise eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, um in eine Operatorgleichung der Form $Fu = u$. Anschließend zeigt man, daß das so definierte Vektorfeld kompakt ist (diese Bedingung läßt sich noch verallgemeinern). Dann sind Gradmethoden zugänglich. Sind zusätzlich Gruppensymmetrien präsent, so geben die hier bewiesenen Resultate oft Kriterien für das Nichtverschwinden des Grades. In diesem Fall besitzt also $Fu = u$ eine Lösung und damit auch das Ausgangsproblem. Dieses Prinzip soll nun veranschaulicht werden, zunächst in einem allgemeinen Existenzsatz von Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen und zum Abschluß an einem Spezialfall dieses Satzes.

Da dieser Abschnitt als Veranschaulichung der erhaltenen Resultate dienen soll, werden die meisten Hilfssätze aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hier nur wiedergegeben aber nicht bewiesen. Als Referenz dienen [Ni] und [Fri].

4.1 Elliptische Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt ist eine kurze Zusammenfassung dessen, was man unter einem elliptischen Differentialoperator versteht und für welche Operatoren die Standardgleichungen, die mit ihnen verbunden sind, wohlgestellt sind.

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ natürlicher Zahlen sei $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$. Es sei Ω eine beschränkte, offene, zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n . Es bezeichne $C(\Omega, \mathbb{R}^s)$ die stetigen Funktionen von Ω nach \mathbb{R}^s . Später wird dieser Raum für das Problem passend modifiziert. Ein linearer Differentialoperator ist von der Form

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s \times s, \mathbb{R})$ glatt sei. Zu L assoziiert ist das Polynom

$$L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Der Operator heißt nun elliptisch, falls gilt:

$$L_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Das klassische Beispiel ist natürlich der Laplaceoperator. Man will nun Randwertprobleme betrachten, das heißt man hat gewisse Randbedingungen

$$B_j u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

und möchte Lösungen u des Problems

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

$$B_j u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

bestimmen. Dies geschieht, indem man L auf den Raum der Funktionen einschränkt, welche die Randbedingungen erfüllen. Nun sind Probleme dieser Art für allgemeine Operatoren L und B_j bzw. beliebige rechte Seiten nur schwer handhabbar, schon gar nicht in voller Allgemeinheit. Die erste Annahme ist daher:

L sei ein Fredholmoperator, das heißt $\dim \ker(L) < \infty$ und $\text{codim}(\text{Bild}(L)) < \infty$.

Um dies zu gewährleisten, müssen Definitions- und Bildbereich von L üblicherweise noch weiter modifiziert werden. Man betrachtet hier meist Sobolevräume oder Hölderräume, wobei im vorliegenden Fall die letzteren betrachtet werden. Daher hier die

Definition 4.1.1 Für $u \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ setze

$$\|u\|_{k+\mu} = \|u\|_k + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|}{\|x - y\|^\mu}.$$

Hierbei sei $\|u\|_k$ die Standardnorm auf $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ und $0 < \mu < 1$. Dann bezeichne $C^{k+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ die Menge aller u mit $\|u\|_{k+\mu} < \infty$.

Hölderräume können interpretiert werden als Räume von Abbildungen, die öfter als k aber nicht notwendig $k+1$ -mal differenzierbar sind, also „reell“ differenzierbar sind. Die Hölderräume sind Banachräume.

Es sei nun L elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$, $B = (B_1, \dots, B_m)$ die Randbedingungen und B_i maximal von Ordnung $2m - 1$. Die Eigenschaften von L , beispielsweise die Fredholmeigenschaft, die ja gegeben sein soll, hängen auf diesem Raum offensichtlich in elementarer Weise von den Operatoren B ab. Das folgende Lemma ist von fundamentaler Bedeutung für die Theorie. Es wird hier angenommen, daß der Operator B koerzitiv, komplementierend, oder ein Lopatinsky-Schapira-Operator jeweils der Ordnung kleiner m ist. Die Details dieser Definitionen sind uninteressant für die hier verfolgten Zwecke, man findet sie z.B. in [Fri]. Wichtig ist nur, daß es Klassen dieser Operatoren gibt, so daß man folgendes Lemma beweisen kann:

Lemma 4.1.2 Für $0 < \mu < 1$, $1 < m < \infty$ und einen beliebigen elliptischen Differentialoperator L gilt bei Wahl von B wie oben:

(1)

$$L : \{u \in C^{2m+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s) \mid Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \rightarrow C^\mu(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$$

ist Fredholmoperator.

(2) Für $f \in C^\mu(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ ist jede Lösung von

$$Lu = f \text{ auf } \Omega$$

$$Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

ein Element von $C^{2m+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$.

(3) Für jedes u mit $Bu = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\|u\|_{2m+\mu} \leq C \cdot (\|Lu\|_\mu + \|u\|_0)$$

wobei C eine Konstante ist, welche von nur von μ abhängt.

(4) Ist $\ker L = \{0\}$, so gilt sogar

$$\|u\|_{2m+\mu} \leq \tilde{C} \cdot \|Lu\|_\mu$$

mit einer Konstanten \tilde{C} .

BEWEIS. Etwa [Fri], Abschnitt 19. □

Der letzte Satz dieses Kapitels behandelt die Kompaktheit des Operators L .

Satz 4.1.3 *Es sei $\mu > \mu'$. Dann ist die μ -Einheitskugel kompakt in $C^{\mu'}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$. Insbesondere ist $L^{-1} : C^\mu(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s) \rightarrow C^{\mu'}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ ein kompakter Operator, falls L Fredholmindex 0 besitzt und $\ker L = 0$ gilt.*

BEWEIS. Dieses Resultat findet man z.B. in [Ni], S.27. □

4.2 Ein Existenzsatz für äquivariante Operatoren

In Abschnitt 1 wurde noch keine Aktion einer Gruppe auf den beteiligten Räumen erwähnt. Dies ist aber der Fall, der hier interessieren soll. Mit der Notation des vorigen Abschnitts sei also G eine endliche Gruppe, welche auf \mathbb{R}^s orthogonal operiert. Wie üblich induziert solch eine Aktion eine Aktion auf Funktionenräumen, insbesondere den Hölderräumen, durch

$$(gu)(x) = g(u(x)).$$

Künftig seien also alle Funktionenräume mit solch einer G -Aktion versehen. Die Abbildungen a_α bzw. $b_{i\alpha}$, welche die Operatoren L und B definieren, sollen

$$a_\alpha(x)g = ga_\alpha(x), \quad b_{i\alpha}(y)g = gb_{i\alpha}(y)$$

für alle $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ erfüllen. Die Operatoren L und B sind dann offensichtlich G -äquivalent. Betrachtet werden soll das Problem

$$Lu(x) = f(x, u(x), D_x u, \dots, D_x^{2m-1} u) \text{ auf } \Omega$$

$$Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei $B = (B_1, \dots, B_m)$. Bezeichnet $L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ den Raum der k -linearen Abbildungen und läßt man G trivial auf $\bar{\Omega}$ operieren, so erhält man eine Diagonalaktion auf

$$T = \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^s \times L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s) \times \dots \times L^{2m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s).$$

Bezüglich dieser Aktion sei die rechte Seite $f : T \rightarrow \mathbb{R}^s$ äquivalent. Ferner sollen die folgenden Annahmen gelten:

- L ist äquivarianter Fredholmoperator mit positivem Index.

-

$$L : (C^{2m+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^s) \mid Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega)^G \rightarrow (C^\mu(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^s))^G$$

ist invertierbar.

- Es gilt die folgende Abschätzung für die rechte Seite:

$$\|f(x, u(x), D_x u, \dots, D_x^{2m-1} u)\|_{\mathbb{R}^s} < M \cdot \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \|D_x^\alpha u\|_{\mathbb{R}^s} \right)^\gamma.$$

für ein $M > 0$ und $0 < \gamma < 1$ und jedes $u \in C^{2m-1+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^s)^G$.

- Die größten gemeinsamen Teiler, welche in den Formeln von Satz 3.2.1 auftauchen, sind größer als 1.

Satz 4.2.1 *Unter den obigen Bedingungen gibt es ein $R \geq 0$, so daß für jedes $r \geq R$ das Problem*

$$Lu = f(x, u(x), D_x u, \dots, D_x^{2m-1} u) \text{ auf } \Omega$$

$$Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine Lösung $u_r \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ mit

$$\|u_r\|_{2m-1+\mu} = r$$

besitzt. Ferner kann $R = 0$ gewählt werden, falls G keine nichttrivialen Fixpunkte auf \mathbb{R}^s besitzt.

BEWEIS. L ist Fredholmoperator, man setze daher $\ker(L) = V_k$ mit $\dim V_k = k < \infty$. W_d sei ein endlichdimensionaler Komplementärraum von $\text{Bild}(L)$ mit $\dim W_d = d$. Nach Annahme ist $k - d \geq 0$. Es sei

$$V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle, \quad W_d = \langle w_1, \dots, w_d \rangle,$$

und zur Abkürzung $X = C^{2m-1+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$. Faßt man X als Unterraum von $L^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s)$ auf, so kann mit dem L^2 -Skalarprodukt geschrieben werden

$$X = \mathbb{R}^k \oplus X', \quad X = \mathbb{R}^d \oplus X''.$$

Für ein beliebiges $u \in X$ gilt dann

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + u' = \sum_{j=1}^d \nu_j w_j + u''$$

mit den offensichtlichen Bezeichnungen. Es bezeichne $\pi'' : X \rightarrow X''$ die Orthogonalprojektion, also $\pi''(u) = u''$. Man betrachte das folgende Hilfsproblem auf X' :

$$Lu'(x) = \pi''h(x) \text{ auf } \Omega$$

$$Bu'(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $h \in X$ beliebig. Nach Lemma 4.1.2 existiert dann eine Lösung $u'_0 \in C^{2m+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^s) \cap X'$ und diese ist eindeutig, da L auf X' injektiv ist. Das Ausgangsproblem soll nun in eine Operatorgleichung umgeschrieben werden. Jedes $u \in X$ kann geschrieben werden als $u = (\lambda, u')$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $u' \in X'$. Man definiere die Operatoren $\Lambda_i : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Lambda_i(u) = \begin{cases} \lambda_i - \langle f(\cdot, u, Du, \dots, D^{2m-1}u), w_i \rangle & 1 \leq i \leq d \\ \lambda_i & d+1 \leq i \leq k \end{cases}$$

und den Operator $Q : X \rightarrow X'$ als die eindeutige Lösung des obigen Hilfsproblems für $h(x) = f(x, u(x), D_x u, \dots, D_x^{2m-1}u)$. Zusammen liefert dies einen Operator

$$F : X \rightarrow X, \quad u \mapsto (\Lambda(u), Q(u)), \quad \Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k).$$

F ist äquivariant. Lemma 4.1.2 liefert nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u' - u'_0\|_{2m-1+\mu} &\leq \|u' - u'_0\|_{2m+\mu} \\ &\leq C \cdot \|L(u' - u'_0)\|_{\mu} \\ &= C \cdot \|\pi'' f(\cdot, u, \dots, \partial^{2m-1}u) - \pi'' f(\cdot, u_0, \dots, \partial^{2m-1}u_0)\|_{\mu}. \end{aligned}$$

Also ist F stetig und Satz 4.1.3 liefert auch Kompaktheit von F , da L auf X' die dortigen Bedingungen erfüllt. Die Fixpunktgleichung $Fu = u$ ist nun äquivalent zum Ausgangsproblem. Denn sei $u_0 = (\lambda_0, u'_0)$ eine Lösung des Ausgangsproblems. Dann ist

$$f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) = Lu_0 \in X'',$$

also

$$\langle f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0), w_i \rangle = 0 \text{ für alle } i \leq d.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als daß $\Lambda_i(u_0) = (\lambda_0)_i$ für $1 \leq i \leq k$, also die Identität auf V_k ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) &= Lu_0 = L(\lambda_0, u'_0) \\ &= Lu'_0 = \pi'' f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) \\ &= L(Q(u_0)), \end{aligned}$$

nach Definition des Operators Q . Aber L ist injektiv auf X' , also folgt $u'_0 = Q(u_0)$. Zusammengefaßt hat man erhalten:

$$Fu_0 = F(\lambda_0, u'_0) = (\lambda_0, u'_0) = u_0,$$

u_0 ist also Fixpunkt von F . Ist umgekehrt ein u_0 Fixpunkt von F , so folgt zunächst wieder

$$\langle f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0), w_i \rangle = 0 \text{ für alle } i \leq d,$$

also $f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) \in X''$. Das zeigt aber

$$\begin{aligned} f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) &= \pi'' f(\cdot, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) \\ &= L(Qu_0) = L(u'_0) \\ &= L(\lambda_0, u'_0) = L(u_0). \end{aligned}$$

Die Probleme sind also äquivalent. Es sei nun \mathbb{S}_r die r -Sphäre in X . Man schränke das kompakte Vektorfeld $\mathbb{1} - F$ ein auf den Raum $X^G \cap \mathbb{S}_r$. Es soll gezeigt werden, daß für hinreichend großes R das Vektorfeld $\mathbb{1} - F$ auf $X^G \cap \mathbb{S}_R$ Windungszahl 1 hat. Nach Lemma 4.1.2 (4) gilt für eine Lösung $u \in C^{2m+\mu}$ von $\mathbb{1} - F$ auf $X^G \cap \mathbb{S}_R$, da der Operator L hier invertierbar ist:

$$\|u\|_{2m+\mu} \leq C \cdot \|f(\cdot, u, Du, \dots, D^{2m-1}u)\|_{\infty} < C \cdot M \cdot \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \|D^\alpha u(x)\|_{\mathbb{R}^s} \right)^\gamma.$$

Damit gibt es aber, wegen $\gamma < 1$, eine Konstante C_1 , so daß $\|u\|_{2m+\mu} \leq C_1$ ist. Aus dem Sobolevschen Einbettungssatz für Hölderräume, siehe etwa [Ni], S.27, folgt dann $\|u\|_{2m-1} \leq C_2$ für eine Konstante C_2 . Man betrachte die Kugel vom Radius $R = C_2 + 1$ in X^G . Dann besitzt $\mathbb{1} - F$ keine Nullstelle auf dem Rand einer Sphäre in X^G vom Radius $r \geq R$, also ist der Leray-Schauder-Grad definiert. Man setze

$$H(t, u) = u - t \cdot Fu.$$

H besitzt keine Nullstellen auf \mathbb{S}_r und somit ist

$$\text{LS}((\mathbb{1} - F)|_{X^G \cap \overline{\mathbb{B}}_r}, X^G \cap \overline{\mathbb{B}}_r, 0) = \text{LS}(\mathbb{1}|_{X^G \cap \overline{\mathbb{B}}_r}, X^G \cap \overline{\mathbb{B}}_r, 0) = 1.$$

Aus Satz 3.2.1 folgt also wegen der Annahme, daß die relevanten ggT sämtlich größer als 1 sind, entweder, daß $\mathbb{1} - F$ Nullstellen von beliebiger Norm besitzt, nämlich falls $X^G = \emptyset$, oder andernfalls für $r \geq R$ Nullstellen der Norm r besitzt. Die Regularität der Lösung sieht man mit Standardmethoden ein, siehe z.B. [Ni], S.29. Damit ist alles gezeigt. \square

4.3 Ein praktisches Beispiel

Das nun folgende Beispiel findet man auch in [BK], S.91. Es sei Ω der offene Einheitskreis in \mathbb{R}^2 . Es soll das folgende System untersucht werden.

$$\Delta u_1(x) = \exp \left(- \left(u_1(x) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + u_2^2(x) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right), \quad x \in \Omega$$

$$\Delta u_2(x) = u_2(x) \cdot \exp u_1(x), \quad x \in \Omega$$

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

In der Notation des vorangehenden Abschnitts ist $m = 1$, also soll das Problem im Hölderraum $C^{1+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ untersucht werden und zwar mit Hilfe von Satz 4.2.1. Die Symmetrie soll in diesem Beispiel gegeben sein durch die \mathbb{Z}_2 -Aktion auf \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Die Äquivarianz der Operatoren

$$L(u_1, u_2) = (\Delta u_1, \Delta u_2)$$

und

$$B(u_1, u_2) = \left(u_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

auf dem Hölderraum ist klar. Die Äquivarianz von

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \exp \left(- \left(u_1(x) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + u_2^2(x) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) \\ u_2(x) \cdot \exp(u_1(x)) \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls offensichtlich. Die Annahmen vor Satz 4.2.1 müssen nachgeprüft werden. Zunächst entnimmt man [Hör], Abschnitt 10.5 bzw. S.266, daß der Fredholmindex des Operators L gerade 2 ist, also positiv.

Als Nächstes muß Invertierbarkeit des Operators L auf dem Fixraum verifiziert werden. Dieser ist gegeben durch die Menge

$$\text{Fix}_{\mathbb{Z}_2} = \{(u_1, 0) \mid u_1 \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})\},$$

also vereinfacht sich das Problem hier auf das gewöhnliche Dirichletproblem, und auf $C^{1+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ unter Dirichletbedingungen ist Δ invertierbar.

Schließlich ist die Abschätzung der Norm von f zu zeigen. Auf dem Fixraum ist aber

$$f(u_1, 0) = \begin{pmatrix} \exp \left(- \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit folgt sofort

$$\|f(u_1, 0)\| = \left\| \exp \left(- \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right) \right\| < 1 \cdot \left(1 + \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit ist Satz 4.2.1 anwendbar und man erhält die Existenz von Lösungen mit beliebiger Norm größer als ein festes $r_0 \geq 0$. Die Existenz für Lösungen von beliebiger Norm folgt natürlich nicht, da \mathbb{Z}_2 von 0 verschiedene Fixpunkte auf \mathbb{R}^2 besitzt.

5 Anhang

5.1 Allgemeine G -Raum Theorie

In diesem ersten Teil des Anhangs soll die allgemeine Theorie von G -Räumen in dem Umfang, wie sie für die Arbeit benötigt wird, hergeleitet werden.

Definition 5.1.1 Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, so daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto g \circ h \\ ^{-1} : G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

stetig sind, wobei $G \times G$ mit der üblichen Produkttopologie versehen ist. Eine topologische Gruppe heißt Liegruppe, wenn sie eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so daß die Gruppenoperation und Inversenbildung differenzierbare Abbildungen sind.

Der größte Teil dieses Kapitels wird keinen Gebrauch von der Liegruppenstruktur machen sondern arbeitet allein mit dem Begriff der topologischen Gruppe.

Es sei G eine topologische Gruppe, X ein topologischer Raum. Eine Linksaktion von G auf X ist eine stetige Abbildung

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \alpha(g, x) =: gx$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(g, \alpha(h, x)) &= \alpha(g \circ h, x) \\ \alpha(e, x) &= x \end{aligned}$$

Hier bezeichnet e das neutrale Element von G . Völlig analog definiert man eine Rechtsaktion von G auf X als eine stetige Abbildung

$$\beta : X \times G \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto \beta(x, g) =: xg$$

mit

$$\begin{aligned} \beta(\beta(x, h), g) &= \beta(x, g \circ h) \\ \beta(x, e) &= x \end{aligned}$$

Man sagt, G operiert auf X , X trägt eine G -Aktion oder X ist G -Raum.

Jede Linksaktion induziert eine Rechtsaktion durch die Festsetzung

$$\beta(x, g) := \alpha(g^{-1}, x)$$

und umgekehrt. Meist wird hier eine Linksaktion betrachtet und dies nicht näher betont, in einigen Konstruktionen dieses Kapitels werden aber auch Rechtsaktionen von Bedeutung sein.

In allen weiteren Teilen der Arbeit wird diese Unterscheidung keine explizite Rolle mehr spielen.

Eine Linksaktion α definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{Hom}\ddot{o}(X), \quad \rho(g)(x) = \alpha(g, x).$$

In manchen Fällen ist es einfacher, die Aktion über solch einen Homomorphismus zu beschreiben.

Dem kategoriellen Gedanken folgend braucht man neben den G -Räumen als Objekten Morphismen zwischen diesen.

Definition 5.1.2 Es seien X, Y zwei G -Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt äquivariant, falls sie mit den Gruppenaktionen kommutiert, also falls gilt

$$f(gx) = gf(x) \text{ für alle } g \in G, x \in X.$$

Betrachtet man Mengen stetiger Abbildungen, so bezeichnet ein Superskript G diejenigen Abbildungen, welche zusätzlich äquivariant sind. Ist etwa $\text{Hom}\ddot{o}(X)$ die Menge der Homöomorphismen des G -Raums X auf sich selbst, so bezeichnet $\text{Hom}\ddot{o}^G(X)$ die Menge der äquivarianten Homöomorphismen.

Die folgende Definition stellt einige der fundamentalen Begriffe im Zusammenhang mit Gruppenaktionen zusammen. G sei im Folgenden stets eine topologische Gruppe, sofern nicht näher spezifiziert, und X ein G -Raum.

Definition 5.1.3

- (1) Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ und $A \subseteq X$ sei

$$A^H = \{x \in A \mid hx = x \ \forall h \in H\}.$$

- (2) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt H -invariant, falls $H(A) \subseteq A$ gilt.

- (3) Der Orbit eines Punktes $x \in X$ ist die Menge

$$Gx := \{gx \mid g \in G\}.$$

- (4) Die Isotropieuntergruppe eines Punktes $x \in X$ ist die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

- (5) Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ bezeichne (H) die Äquivalenzklasse bzgl. Konjugation. Ist $(G_x) = (H)$, so sagt man, x habe den Orbittyp (H) .

- (6) Die Gruppenaktion heißt frei, falls $G_x = \{e\}$ für alle $x \in X$ gilt.

- (7) Ist $\rho : G \rightarrow \text{Hom}\ddot{o}(X)$ der von der Aktion induzierte Gruppenhomomorphismus, so heißt die Aktion effektiv, falls ρ injektiv ist.

Bemerkungen 5.1.4

- (3) Der Orbit eines Punktes $x \in X$ ist die kleinste invariante Teilmenge, welche x enthält. Orbits zweier Punkte sind entweder gleich oder disjunkt.
- (4) Man sieht sofort, daß G_x eine Untergruppe ist. Ferner sind die Isotropieuntergruppen entlang eines Orbits zueinander konjugiert, genauer ist

$$G_{gx} = gG_x g^{-1}.$$

- (7) Offensichtlich erhält man aus jeder Aktion ρ einer Gruppe G eine effektive Aktion $\tilde{\rho}$ durch Übergang zur Faktorgruppe $\tilde{G} := G/\ker \rho$. Daher wird oft die Effektivität der Aktion vorausgesetzt.

Es bezeichne X/G die Menge der Orbits der G -Aktion auf X . Man hat die kanonische Projektion

$$p : X \rightarrow X/G, \quad x \mapsto Gx.$$

Dies ist nichts anderes als der Quotientenraum bzgl. der Relation

$$x \sim y : \iff \exists g \in G : gx = y,$$

und X/G wird also in natürlicher Weise zum topologischen Raum, indem eine Menge $U \subseteq X/G$ genau dann offen (abgeschlossen) heißt, wenn $p^{-1}(U) \subseteq X$ offen (abgeschlossen) ist. Ein paar erste Resultate faßt das folgende Lemma zusammen.

Lemma 5.1.5 *Es sei G eine kompakte topologische Gruppe, X ein metrischer G -Raum. Dann gilt:*

- Die Aktion

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

ist eine abgeschlossene Abbildung.

- Jeder Orbit Gx ist kompakt.
- Ist X Hausdorff, so auch X/G .
- Die Projektion $p : X \rightarrow X/G$ abgeschlossen.

BEWEIS.

- Es sei $A \subseteq G \times X$ abgeschlossen. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $\alpha(A)$. Es sei $y \in \alpha(A)$. Dann gibt es eine Folge $(x_i, g_i) \in A$, so daß $\alpha(x_i, g_i)$ gegen y konvergiert. Da G kompakt ist, gibt es eine Teilfolge, die man ohne Einschränkung als die Folge selbst annehmen kann, so daß g_i gegen ein $g \in G$ konvergiert. Die Identität

$$x_i = \alpha(g_i^{-1}, g_i(x_i))$$

und die Stetigkeit von α sowie von der Inversenbildung in G liefern, daß x_i gegen $\alpha(g^{-1}, y)$ konvergiert. Also konvergiert (g_i, x_i) gegen $(g, \alpha(g^{-1}, y))$ und dies liegt in A , da A abgeschlossen ist. Aber

$$\alpha(g, \alpha(g^{-1}, y)) = y,$$

also ist $y \in \alpha(A)$. Damit ist $\overline{\alpha(A)} \subseteq \alpha(A)$ und letztere Menge abgeschlossen.

- Gx ist das Bild der kompakten Menge G unter der stetigen Abbildung $\alpha(\cdot, x) : G \rightarrow X$, also kompakt.
- Es seien $x, y \in X$ mit $Gx \neq Gy$. Da Orbits kompakt sind, $Gx \cap Gy = \emptyset$ gilt und X Hausdorffsch ist, gibt es offene, disjunkte Mengen $U, V \subseteq X$ mit $Gx \subseteq U, Gy \subseteq V$. Dann ist $\overline{U} \cap Gy = \emptyset$ und $x \in \overline{U}$, also $p(y) \notin p(\overline{U})$. Nach Definition der Quotiententopologie ist $p(U)$ offen und $p(\overline{U})$ abgeschlossen. Also ist $p(y) \in X/G \setminus p(\overline{U}), p(x) \in p(U)$ und beide Mengen sind offen und disjunkt. Somit ist X/G Hausdorffsch.
- Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Da die Gruppenaktion abgeschlossen ist, ist die Menge $G(A)$ als Bild der abgeschlossenen Menge $G \times A$ abgeschlossen. Aber

$$G(A) = p^{-1}(p(A))$$

und nach Definition der Quotiententopologie ist diese Menge genau dann abgeschlossen, wenn $p(A)$ abgeschlossen ist. Also ist p abgeschlossen. \square

Eine wichtige Rolle in der Theorie spielen die verschiedenen Fixräume einer Gruppenaktion, die nun definiert werden.

Definition 5.1.6 Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann sei

$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \forall h \in H\}$$

$$X_H := \{x \in X \mid G_x = H\}$$

$$X^{>H} := X^H \setminus X_H$$

$$X_{(H)} := \{x \in X \mid (G_x) = (H)\} = G(X_H).$$

In diesem Zusammenhang erinnere man sich auch an die folgenden Konstruktionen, die für nicht-abelsche Gruppen von Bedeutung sind. Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G , so heißt die Menge

$$N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} \subseteq H\}$$

der Normalisator von H in G . Er ist die größte Untergruppe von G , in der H ein Normalteiler ist. Der Quotient

$$W(H) := N(H)/H$$

heißt Weylgruppe von H . Die Elemente von $W(H)$ werden üblicherweise mit $[g]$ für $g \in N(H)$ bezeichnet, wobei hierauf auch oft verzichtet wird. Diese Konstruktionen sind von

Bedeutung, weil alle Informationen über die Gruppenaktion auf den Fixräumen einer Untergruppe H bereits in der Weylgruppe von H liegen. Genauer ist eine Aktion der Weylgruppe $W(H)$ auf X^H definiert durch

$$W(H) \times X^H \rightarrow X^H, \quad ([g], x) \mapsto gx.$$

gx liegt in X^H , denn wegen $g^{-1}hg \in H$ für $h \in H$ beliebig ist $g^{-1}hgx = x$, also $hgx = gx$. Es sei ferner $[g] = [g']$. Dann gibt es $h \in H$ mit $g' = gh$, also $g'x = ghx = gx$.

Lemma 5.1.7 *Die Aktion der Weylgruppe $W(H)$ auf X_H ist frei.*

BEWEIS. Es ist $W(H)_x = \{[e]\}$ zu zeigen für alle $x \in X_H$. Es gilt

$$\begin{aligned} W(H)_x &= \{[g] \in W(H) \mid [g].x = x\} \\ &= \{[g] \in W(H) \mid gx = x\} \\ &= \{[g] \in W(H) \mid g \in G_x = H\} \\ &= \{[e]\} \end{aligned} \quad \square$$

Tiefere Resultate über den Zusammenhang von Fixräumen, Weylgruppe und Gesamttraum werden im zweiten Abschnitt über G -Faserbündel beschrieben.

Als Nächstes werden die sogenannten homogenen Räume betrachtet. Dies sind die Quotientenräume G/H topologischer Gruppen bzgl. abgeschlossener Untergruppen. Ein Grund für ihre Bedeutung liegt in der folgenden Tatsache.

Proposition 5.1.8 *Ist G kompakt, so ist die Abbildung*

$$\alpha : G/G_x \rightarrow Gx, \quad [g] \mapsto gx$$

ein Homöomorphismus.

BEWEIS. Eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist ein Homöomorphismus. Die Stetigkeit von α folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $G \rightarrow Gx$, $g \mapsto gx$ und der Definition der Quotiententopologie. Bijektivität und Wohldefiniertheit sind unmittelbar klar. Da G kompakt ist, ist auch der Quotient kompakt und Gx als Teilmenge eines Hausdorffraums ist Hausdorffsch. Damit folgt die Behauptung. \square

Im Falle einer kompakten Gruppe G können Orbits also mit homogenen Räumen identifiziert werden. Abbildungen zwischen diesen Räumen haben aber eine besonders einfache Gestalt, wie das folgende Resultat zeigt.

Satz 5.1.9 *Es sei G kompakte Gruppe und es seien H, K abgeschlossene Untergruppen. Dann existiert eine äquivariante Abbildung $G/H \rightarrow G/K$ genau dann, wenn H konjugiert zu einer Untergruppe von K ist. In diesem Fall hat solch eine Abbildung die Form*

$$R_a^{K,H} : G/H \rightarrow G/K, \quad gH \mapsto ga^{-1}K$$

mit $a \in G$, so daß $aHa^{-1} \subseteq K$ und jede dieser Abbildungen ist eine wohldefinierte, äquivariante Abbildung.

BEWEIS. Es sei $f : G/H \rightarrow G/K$ äquivariant. Man setze $a^{-1}K = f(eH), a \in G$. Dann folgt $f(gH) = gf(H) = ga^{-1}K$. Es sei umgekehrt $f : G/H \rightarrow G/K, gH \mapsto ga^{-1}K$ für ein $a \in G$. Äquivarianz ist offensichtlich. Diese Abbildung ist aber nur wohldefiniert, falls $ga^{-1}K = gha^{-1}K$ für alle $h \in H$, also $aha^{-1} \in K$. Dies bedeutet nichts Anderes als $aHa^{-1} \subseteq K$. \square

Als wichtiges Korollar ergibt sich

Korollar 5.1.10 *Jede äquivariante Abbildung $G/H \rightarrow G/H$ ist durch Rechtstranslation mit einem Element in $N(H)$ gegeben. Die Abbildung*

$$W(H) \rightarrow \text{Homöo}^G(G/H), \quad a \mapsto R_a^{H,H}$$

ist ein Homöomorphismus. Sämtliche Funktionenräume tragen hier die kompakt-offene Topologie.

BEWEIS. Man betrachte die stetige Rechtstranslation

$$R : G/H \times N(H) \rightarrow G/H, \quad (gH, a) \mapsto ga^{-1}H.$$

Das Exponentialgesetz für topologische Räume besagt, daß die hierdurch induzierte Abbildung

$$F : N(H) \rightarrow \text{Abb}(G/H), \quad a \mapsto R_a^{H,H}$$

stetig ist. Man beachte, daß das Exponentialgesetz gültig ist, da alle beteiligten Räume Hausdorff und sogar kompakt sind. Der vorangehende Satz zeigt, daß F tatsächlich aber surjektiv nach $\text{Homöo}^G(G/H)$ abbildet. Ferner ist $\ker F = H$. Die induzierte Abbildung

$$N(H)/H = W(H) \rightarrow \text{Homöo}^G(G/H)$$

ist bijektiv und stetig, also ein Homöomorphismus, da $W(H)$ kompakt und $\text{Homöo}^G(G/H)$ Hausdorffsch ist. \square

5.2 G-Faserbündel

Dieser Abschnitt soll genauer die Struktur von G -Räumen klären, z.B. sind Räume mit nur einem Orbittyp in kanonischer Weise als Faserbündel interpretierbar. Dies gibt einem diverse Techniken in die Hand um beispielsweise partielle Schnitte über das ganze Bündel fortzusetzen. Mehrere der Fortsetzungsergebnisse des ersten Kapitels beruhen auf dieser Tatsache, auch wenn dieser Zusammenhang dort nicht ganz klar zu Tage tritt, da ein anderer Zugang gewählt wurde.

Es seien X, B Hausdorffräume, G topologische Gruppe, F ein effektiver Rechts- G -Raum und $p : X \rightarrow B$ stetig. Eine Karte für p ist eine offene Menge $U \subseteq B$ zusammen mit einem Homöomorphismus $\varphi_U : F \times U \rightarrow p^{-1}(U)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\varphi_U} & p^{-1}(U) \\ & \searrow p_2 & \downarrow p \\ & & U \end{array}$$

Hierbei bezeichnet p_2 die Projektion auf den zweiten Faktor. F heißt die Faser von $p : X \rightarrow B$. Zwei Karten φ_U, ψ_V heißen verträglich, wenn es eine stetige Funktion $\theta_{U,V} : U \cap V \rightarrow G$ gibt mit

$$\psi(f, u) = \varphi(f \cdot \theta(u), u)$$

für $f \in F, u \in U \cap V$. $\theta_{U,V}$ heißt die Übergangsfunktion für die Karten φ_U, ψ_U . Ein Atlas für $p : X \rightarrow B$ ist eine Überdeckung von B mit verträglichen Karten, die maximal ist, das heißt eine Karte, die zu jeder Karte des Atlas verträglich ist, ist bereits in ihm enthalten.

Definition 5.2.1 Ein Faserbündel mit Strukturgruppe G oder auch G -Faserbündel ist ein Quintupel $\xi = (X, B, p, F, G)$ zusammen mit einem Atlas für $p : X \rightarrow B$ mit Faser F , so daß die Übergangsabbildungen nach G abbilden. B heißt Basisraum, E Totalraum, F die Faser und G die Strukturgruppe des Bündels ξ . Oft sagt man, $p : X \rightarrow B$ sei ein Faserbündel, wobei Faser und Strukturgruppe sich aus dem Zusammenhang ergeben.

Die Forderung nach Effektivität der G -Aktion auf der Faser stellt sicher, daß die Übergangsabbildungen allein durch die Kartenwechsel bestimmt sind. Der Einfachheit halber seien φ, ψ Karten auf der selben Menge $U \subseteq B$. Der Kartenwechsel ist dann die Abbildung

$$\varphi^{-1} \circ \psi : F \times U \rightarrow F \times U.$$

Dann gilt aber

$$\varphi^{-1} \circ \psi(f, u) = (f \cdot \theta(u), u).$$

Da die Aktion effektiv ist, ist $\theta(u)$ dadurch eindeutig bestimmt.

Der folgende Sachverhalt verbindet Gruppenaktionen auf dem Totalraum X mit einer Faserbündelstruktur.

Satz 5.2.2 *Es sei $\xi = (X, B, p, F, H)$ ein H -Faserbündel, G topologische Gruppe. Die Faser F trage (neben der Struktur als Rechts- H -Raum) eine linke G -Aktion, welche mit der H -Aktion kommutiert, das heißt*

$$g \cdot (f \cdot h) = (g \cdot f) \cdot h.$$

G operiere trivial auf B und auf $F \times U$ durch $g \cdot (f, u) = (g \cdot f, u)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte G -Aktion auf X , so daß p sowie sämtliche Kartenabbildungen äquivariant sind.

BEWEIS. Es seien $g \in G, x \in X, (\varphi, U)$ sei eine Karte um $p(x)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $f \in F$ mit $\varphi(f, p(x)) = x$. Äquivarianz der Karte φ erzwingt die Definition

$$g \cdot x = \varphi(g \cdot f, p(x)).$$

Zu zeigen ist die Kartenunabhängigkeit dieser Definition. Es sei also ψ eine weitere Karte, die o.B.d.A. ebenfalls auf U definiert ist. Es reicht, Äquivarianz des Kartenwechsels zu zeigen. Denn ist diese gegeben und ist \tilde{f} das eindeutig bestimmte Element in F mit $\psi(\tilde{f}, p(x)) = x$, so gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ \psi(g \cdot \tilde{f}, p(x)) &= g \cdot \varphi^{-1} \circ \psi(\tilde{f}, p(x)) \\ &= g \cdot \varphi^{-1}(x) \\ &= (g \cdot f, p(x)), \end{aligned}$$

also $\psi(g.\tilde{f}, p(x)) = \varphi(g.f, p(x))$. Bezeichnet man mit $\theta : U \rightarrow H$ die Übergangsfunktion der beiden Karten, so folgt

$$\begin{aligned}
 g.\varphi^{-1} \circ \psi(f, u) &= g(f.\theta(u), u) \\
 &= (g.(f.\theta(u)), u) \\
 &= ((g.f).\theta(u), u) \\
 &= \varphi^{-1} \circ \psi(g.f, u) \\
 &= \varphi^{-1} \circ \psi(g.(f, u)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Definition 5.2.3 Ein G -Prinzipalbündel ist ein Faserbündel ξ mit Faser G und Strukturgruppe G , wobei die Rechtsaktion von G auf sich selbst durch Rechtstranslation gegeben ist. Man schreibt $\xi = (X, B, p, G)$ anstelle von $\xi = (X, B, p, G, G)$.

Offenbar kommutiert Linkstranslation mit Rechtstranslation in Gruppen. Im Falle eines G -Prinzipalbündels kann man also 5.2.2 wie folgt formulieren:

Korollar 5.2.4 *Es sei $\xi = (X, B, p, G)$ ein G -Prinzipalbündel. Dann existiert kanonisch eine freie G -Aktion auf X , welche Translation in den Fasern ist. Die Bündelabbildung $p : X \rightarrow B$ induziert einen Homöomorphismus $X/G \rightarrow B$. Man kann also B als den Orbitraum der Aktion interpretieren.*

BEWEIS. Die Definition der Aktion in 5.2.2 liefert sofort, daß diese frei ist. Es sei nämlich in einer Karte φ ein Element $x \in X$ dargestellt durch $\varphi(h, p(x))$, so folgt

$$\begin{aligned}
 g.x = x &\implies \varphi(g.h, p(x)) = \varphi(h, p(x)) \\
 &\implies \varphi(gh, p(x)) = \varphi(h, p(x)) \\
 &\implies g = e.
 \end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung ist gegeben durch

$$[p] : X/G \rightarrow B, \quad [x] \mapsto p(x)$$

und sie ist stetig nach Definition der Quotiententopologie. Surjektivität ist klar und Injektivität sieht man wie folgt ein: Es seien $x, y \in X$ mit $p(x) = p(y)$. In einer Karte φ um $p(x)$ ist dann $x = \varphi(g, p(x))$ und $y = \varphi(h, p(y))$, also ist nach Definition der Aktion

$$hg^{-1}.x = \varphi(hg^{-1}g, p(x)) = \varphi(h, p(x)) = y,$$

x und y liegen also im gleichen Orbit. Die Umkehrabbildung erhält man in einer Karte φ um $p(x)$ durch

$$p(x) \mapsto \pi \circ \varphi(e, p(x)),$$

wobei π die Projektion in der Orbitraum ist. Diese Abbildung ist offensichtlich stetig, also ist $[p]$ ein Homöomorphismus. \square

Ziel ist es, die Umkehrung dieses Korollars zu beweisen, falls G eine kompakte Liegruppe ist und X ein metrischer Raum. In diesem Fall ist $\xi = (X, X/G, \pi, G)$ stets ein G -Prinzipalbündel. Dieses Resultat benötigt aber noch einige Vorbereitungen, angefangen bei der Konstruktion des Twistproduktes.

Definition 5.2.5 Es sei X ein rechter, Y ein linker G -Raum. G operiert von links auf $X \times Y$ durch

$$(x, y) \mapsto (xg^{-1}, gy).$$

Der Orbitraum dieser Aktion wird mit $X \times_G Y$ bezeichnet und heißt das Twistprodukt von X und Y . In $X \times_G Y$ gilt $[x, y] = [x', y']$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $x' = xg^{-1}$ und $y' = gy$.

Mittels des Twistproduktes kann man für G -Räume analog zu dem Begriff für Mannigfaltigkeiten tubulare Umgebungen von Orbits definieren. Es sei X ein G -Raum, $x \in X$ und Gx ein Orbit vom Typ (H) . Ein Tubus um Gx ist ein äquivarianter Homöomorphismus

$$\varphi : G \times_H A \rightarrow X$$

auf eine offene Umgebung von Gx in X . A ist hierbei ein geeigneter H -Raum. Das Bild von φ heißt dann tubulare Umgebung von Gx . Das folgende Resultat findet man zum Beispiel in [Bre], II.5, S.84 ff.

Satz 5.2.6 *Es sei X ein normaler G -Raum, G kompakte Liegruppe. Dann besitzt jeder Orbit eine tubulare Umgebung.*

Die tubularen Umgebungen liefern den Rahmen für die Umkehrung von 5.2.4, und zwar werden die Bündelkarten gerade aus solchen Umgebungen konstruiert werden.

Satz 5.2.7 *Es sei X ein normaler G -Raum, G kompakte Liegruppe, X habe Orbittyp (H) , das heißt jede Isotropieuntergruppe ist konjugiert zu $H \subseteq G$. Dann ist die kanonische Projektion $p : X \rightarrow X/G$ ein Faserbündel mit Faser G/H und Strukturgruppe $W(H)$. Die Aktion auf der Faser ist gegeben durch Rechtstranslation.*

BEWEIS. Eine beliebige tubulare Umgebung eines Orbits in X ist von der Form $G \times_H A$, wobei A ein Links- G -Raum ist. Es sei $[g', a']$ ein beliebiger Punkt in $G \times_H A$, dann ist $[g', a']$ äquivalent zu einem Punkt $[e, a] \in G \times_H A$. Die Isotropiegruppe dieses Punktes kann aber einfach bestimmt werden:

$$\begin{aligned} G_{[e,a]} &= \{g \in G \mid g.[e, a] = [e, a]\} \\ &= \{g \in G \mid [g, a] = [e, a]\} \\ &= \{g \in G \mid \exists h \in H : g = h, a = ha\} \\ &= H_a \end{aligned}$$

Es sei nun $\varphi : G \times_H A \rightarrow X$ ein Tubus für den Orbit $Gx, x \in X$, so gibt es $[e, a] \in G \times_H A$ mit $\varphi[e, a] = x$. Da φ ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\begin{aligned} G_x &= \{g \in G \mid gx = x\} \\ &= \{g \in G \mid g \cdot \varphi[e, a] = \varphi[e, a]\} \\ &= \{g \in G \mid \varphi[g, a] = \varphi[e, a]\} \\ &= \{g \in G \mid [g, a] = [e, a]\} \\ &= G_{[e, a]}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist G_x konjugiert zu H und gleichzeitig Teilmenge von H , also $H_a = G_x = H$. Dies bedeutet, daß H trivial auf A operiert. In diesem Fall ist

$$\psi : G \times_H A \rightarrow (G/H) \times A, \quad [g, a] \mapsto (gH, a)$$

ein G -äquivarianter Homöomorphismus. Übergang zum Quotientenraum liefert einen Homöomorphismus

$$\tau : (G \times_H A)/G \rightarrow A, \quad [[g, a]] = [[e, a]] \mapsto a.$$

Es sei $\tilde{\varphi}$ die von φ induzierte Abbildung zwischen $(G \times_H A)/G$ und X/G , so ist $\tilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und also $\tilde{\varphi} \circ \tau^{-1}$ ein Homöomorphismus von A auf sein Bild in X/G . Damit ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} (G/H) \times A & \xrightarrow{\psi^{-1}} & G \times_H A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{\tau^{-1}} & (G \times_H A)/G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X/G \end{array}$$

Identifiziert man A mit seinem Bild in X/G , so ergibt sich das gewünschte Bündeldiagramm

$$\begin{array}{ccc} (G/H) \times A & \xrightarrow{\varphi_A} & p^{-1}(A) \\ & \text{pr}_2 \searrow & \swarrow p \\ & & A \end{array}$$

wobei φ_A die Bündelkarte ist. Um die Strukturgruppe zu bestimmen, betrachtet man den Kartenwechsel zweier solcher Bündelkarten φ_A, φ_B auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $A \cap B$,

$$\varphi_B^{-1} \circ \varphi_A : (G/H) \times (A \cap B) \rightarrow (G/H) \times (A \cap B).$$

Wie nach der Definition eines Faserbündels erwähnt bestimmt der Kartenwechsel die Übergangsabbildung θ eindeutig über die Relation

$$\varphi_B^{-1} \circ \varphi_A(gH, x) = (\theta(x)(gH), x).$$

θ ist eine Abbildung in die G -Homöomorphismen von G/H . Nach 5.1.10 ist dies aber gerade $W(H)$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Eine weitere Art, einen G -Raum als Bündel zu interpretieren, liefert der folgende Satz. In diesem Zusammenhang wird eine wichtige Äquivalenz äquivarianter Abbildungen beschrieben werden.

Satz 5.2.8 *Es sei G kompakt, X ein G -Raum mit Orbittyp (H) . Dann ist die Abbildung*

$$\rho : G \times_{N(H)} X^H \rightarrow X, \quad [g, x] \mapsto gx$$

ein Homöomorphismus.

BEWEIS. Die fragliche Abbildung ist stetig nach Definition der Quotiententopologie und surjektiv, da nach Voraussetzung (H) der einzige Orbittyp ist. Ferner ist sie abgeschlossen, da sie durch Restriktion und Quotientenbildung aus der abgeschlossenen Aktion entsteht. Daher genügt es, Injektivität zu zeigen. Es sei $g(x) = g'(x')$, $x, x' \in X^H$. Da $H \subseteq G_x$, ist $G_x = H = G_{x'}$. Es sei $n = g^{-1}g'$, also $nx' = x$. Isotropieuntergruppen längs Orbits sind konjugiert, daher gilt

$$H = G_x = G_{nx'} = nG_{x'}n^{-1} = nHn^{-1}$$

und somit $n \in N(H)$. Dies liefert das gewünschte Resultat wegen

$$[g, x] = [gn, n^{-1}x] = [g', x']. \quad \square$$

Korollar 5.2.9 *Unter den Voraussetzungen von 5.2.8 induziert die Inklusion einen Homöomorphismus*

$$X^H / N(H) \rightarrow X/G$$

und

$$G/H \times_{W(H)} X^H \rightarrow X, \quad [gH, x] \mapsto gx$$

ist ein G -Homöomorphismus.

BEWEIS. Die Inklusion $X^H \rightarrow G \times_{N(H)} X^H$ induziert einen Homöomorphismus

$$\tau : X^H / N(H) \rightarrow (G \times_{N(H)} X^H) / G, \quad Ha \mapsto G[e, a].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn ist $x = hx'$ für ein $n \in N(H)$, so ist

$$G[e, x'] = Gn^{-1}[e, x'] = G[n^{-1}, x'] = G[e, nx'] = G[e, x].$$

Die Stetigkeit folgt nach Definition der Quotiententopologie, da die entsprechende Abbildung $X^H \rightarrow (G \times_{N(H)} X^H) / G$ die Komposition einer Inklusion und einer Projektion ist. Auf der anderen Seite induziert die (offenbar $N(H)$ -äquivariante) Projektion $G \times X^H \rightarrow X^H$ eine Abbildung

$$G \times_{N(H)} X^H \rightarrow X^H / N(H), \quad [g, x] \mapsto Hx.$$

Die Stetigkeit dieser Abbildung impliziert die Stetigkeit der auf dem Quotienten

$$(G \times_{N(H)} X^H) / G$$

induzierten Abbildung und es ist offenbar die Umkehrabbildung zu τ . 5.2.8 liefert dann die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung verwendet man den „topologischen Isomorphiesatz“:

$$G \times_{N(H)} X^H = G \times X^H / N(H) \cong \frac{G \times X^H / H}{N(H)/H}.$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß H trivial auf X^H operiert, ergibt sich weiter

$$G \times X^H / N(H) \cong \frac{G \times X^H / H}{N(H)/H} \cong \frac{(G/H) \times X^H}{W(H)}$$

und 5.2.8 erledigt auch hier den Rest. □

Korollar 5.2.10 *Unter den Voraussetzungen von 5.2.8 sei Y ein G -Raum. Dann gibt es zu jeder $W(H)$ -äquivalenten Abbildung $\tilde{f} : X^H \rightarrow Y^H$ genau eine G -äquivalente Abbildung $f : X \rightarrow Y$, welche \tilde{f} äquivalent fortsetzt (im Sinne von $g\tilde{f}(x) = f(gx)$).*

BEWEIS. Es sei $f : X^H \rightarrow Y^H$ $W(H)$ -äquivalent. Man definiere $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ durch

$$X \cong (G/H) \times_{W(H)} X^H \rightarrow (G/H) \times_{W(H)} Y^H \rightarrow Y,$$

wobei der letzte Pfeil gegeben ist durch $[gH, y] \mapsto gy$. Für $x \in X^H$ bedeutet dies

$$x \mapsto [eH, x] \mapsto [eH, \tilde{f}(x)] \mapsto \tilde{f}(x),$$

also setzt f die Abbildung \tilde{f} fort. □

Am Ende dieses Abschnitts folgt noch ein beinahe triviales Ergebnis, welches benötigt wird, um Abbildungen auf nicht invarianten Teilmengen unter gewissen Voraussetzungen zu äquivalenten Abbildungen auf invarianten Teilmengen fortzusetzen.

Lemma 5.2.11 *Es sei G kompakte Gruppe, X, Y G -Räume, $C \subseteq X$ abgeschlossen. Weiter sei $f : C \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so daß*

$$f(gx) = gf(x)$$

gilt, sofern $x, gx \in C$ für ein $g \in G$. Dann gibt es eine eindeutige äquivalente Fortsetzung $F : G(C) \rightarrow Y$.

BEWEIS. Es seien $g \in G, c \in C$. Die Fortsetzung F muß auf den Elementen gc erklärt werden. Die Äquivarianz erzwingt die Setzung

$$F(gc) = gF(c) = gf(c).$$

Es ist Wohldefiniertheit von F zu zeigen. Es sei also $gc = \tilde{g}\tilde{c}$, $g, \tilde{g} \in G, c, \tilde{c} \in C$, so ist $\tilde{g}^{-1}gc = \tilde{c} \in C$, also folgt

$$F(\tilde{g}\tilde{c}) = \tilde{g}f(\tilde{c}) = \tilde{g}f(\tilde{g}^{-1}gc) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}gf(c) = gf(c) = F(gc).$$

Somit ist F wohldefiniert. Die Stetigkeit von F ist klar. □

5.3 Dimensionstheorie

Die Beweise der Hauptsätze der Arbeit beruhen auf Fortsetzungsergebnissen für äquivariante Abbildungen und diese wiederum auf Fortsetzungsergebnissen für gewöhnliche stetige Abbildungen, genauer auf dem Satz von Kuratowski. Die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften eines topologischen Raumes, um gewisse Fortsetzungseigenschaften zu besitzen, werden durch seine topologische oder auch Überdeckungsdimension beschrieben. Daher soll dieser Abschnitt einen kurzen Überblick über die Theorie geben. Er gipfelt im Satz von Kuratowski, welcher das Fortsetzungsproblem für metrische Räume vollständig klärt. Die Beweise der Resultate in diesem Abschnitt sind meist solcher Natur, daß sie ein breites Arsenal an Hilfsmitteln der allgemeinen Topologie benötigen, aber zum Verständnis der Sachverhalte kaum etwas beitragen. Da sie zudem nur an wenigen Stellen als Hilfssätze Verwendung finden, habe ich mich entschlossen, den Beweis der meisten Sätze wegzulassen, bzw. durch Angabe einer Referenz zu liefern. Diese ist vornehmlich [Eng].

Am Anfang steht natürlich die Definition des zentralen Begriffs, der Überdeckungsdimension eines metrischen Raums.

Definition 5.3.1 Es sei X ein metrischer Raum. X hat eine topologische Dimension oder Überdeckungsdimension oder, falls keine Verwechslungsgefahr besteht, schlicht Dimension $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$, falls es zu jeder lokal-endlichen offenen Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung gibt, so daß jeder Punkt von X in maximal $n + 1$ Mengen der Verfeinerung enthalten ist. Man schreibt $\dim X \leq n$. Ist die Dimension von X kleiner oder gleich n aber nicht kleiner oder gleich $n - 1$, so hat X die Dimension n , $\dim X = n$. Gibt es kein n , so daß $\dim X \leq n$ gilt, so setzt man $\dim X = \infty$.

Bemerkung: Dieser Dimensionsbegriff ist mit bereits bekannten Dimensionsbegriffen verträglich. So hat der \mathbb{R}^n die topologische Dimension n , n -dimensionale Mannigfaltigkeiten haben Dimension n und n -Skelette von CW -Komplexen haben Dimension n . Die letzten beiden Feststellungen folgen natürlich leicht aus der ersten, und für diese sei wiederum auf [Eng], Theorem 7.3.19, S.500, verwiesen.

Das folgende Lemma sollte für jeden vernünftigen Dimensionsbegriff gelten. Da jede Mannigfaltigkeit separabel metrisierbar ist, sind alle Fälle, die in dieser Arbeit interessieren, abgedeckt.

Lemma 5.3.2 *Es gilt:*

(1) *Sind X, Y metrische Räume, so ist*

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y.$$

(2) *Ist X separabler metrischer Raum und $A \subseteq X$ beliebig, so ist*

$$\dim A \leq \dim X.$$

BEWEIS. Für (1), siehe [Eng], Theorem 7.3.17, S.499. Für (2), siehe [Eng], Theorem 7.1.1, S.470 und Theorem 7.3.3, S.495. \square

Der nächste Satz zeigt, daß zwar nicht jede Teilmenge eines metrischen Raumes einen Rand besitzt, wie man ihn sich intuitiv vorstellt, etwa wie bei Mannigfaltigkeiten, aber zumindest durch solche Mengen approximiert werden kann.

Satz 5.3.3 *Es sei X ein metrischer Raum und $\dim X \leq n$. Dann gibt es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jeder offenen Umgebung $V \subseteq X$ von A eine offene Umgebung U von A , so daß*

$$A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$$

und

$$\dim \partial U < n$$

gilt.

BEWEIS. Siehe [Eng], Theorem 7.3.11, S.497. □

Das nächste Resultat ist ebenfalls anschaulich zu erwarten, es besagt, daß man die Dimension eines Raumes durch die Dimension von Teilmengen kontrollieren kann, wenn diese gewisse Anforderungen erfüllen.

Satz 5.3.4 *Es sei X metrischer Raum und $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal-endliche Überdeckung von X , so daß für alle $\alpha \in I$ die Menge A_α abgeschlossen ist und $\dim A_\alpha \leq n$ gilt. Dann ist auch $\dim X \leq n$.*

BEWEIS. Siehe [Eng], Theorem 7.2.3, S.484. □

Es soll noch ein sehr tiefliegender Satz über die Dimension eines Produktes zitiert werden, welcher desöfteren in dieser Arbeit benötigt wird. Als erstes Resultat kann direkt im Anschluß eine Aussage über die Dimension eines Orbitraums getroffen werden.

Satz 5.3.5 (Satz von Morita): *Es sei X ein metrischer Raum, dann gilt*

$$\dim X \times I = \dim X + 1.$$

BEWEIS. Siehe [Mor]. □

Lemma 5.3.6 *Ist X ein metrischer Raum, auf dem die kompakte Liegruppe G frei operiert, dann gilt*

$$\dim X/G = \dim X - \dim G.$$

BEWEIS. Da die Aktion frei ist, ist X nach Satz 5.2.7 ein Faserbündel über X/G mit Faser G . Es sei $U \subseteq X/G$ eine Kartenumgebung, dann ist $U \times G \cong p^{-1}(U)$ für die Bündelprojektion p , also

$$\dim U \times G = \dim p^{-1}(U).$$

Da G Mannigfaltigkeit, also lokal homöomorph zu einem \mathbb{R}^d ist, besagt der Satz von Morita, daß

$$\dim U \times G = \dim U \times \mathbb{I}^d = \dim U + \dim G$$

gilt. Ist nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung eines Raumes der Dimension n , so folgt aus der Definition der Überdeckungsdimension sofort, daß mindestens ein U_i ebenfalls Dimension n besitzt. Da X/G parakompakt ist, existiert ein lokal-endlicher Atlas, also gibt es auch eine Karte mit $\dim U = \dim X/G$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \dim X/G + \dim G &= \dim U + \dim G \\ &= \dim U \times G \\ &= \dim p^{-1}(U) \\ &\leq \dim X. \end{aligned}$$

Ebenso überdecken die Urbilder der Karten unter der Bündelprojektion p den Raum X . Aber X ist auch parakompakt, daher existiert eine Karte U und eine Menge $V \subseteq X$ mit $V \subseteq p^{-1}(U)$ und $\dim V = \dim X$, daher

$$\dim X = \dim p^{-1}(U) = \dim U \times G = \dim U + \dim G \leq \dim X/G + \dim G,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Es folgen noch zwei weitere Resultate aus [Eng] über lokal-endliche Familien.

Lemma 5.3.7 *Es sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal-endliche Überdeckung eines metrischen Raums X . Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von X , so daß $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ gilt.*

BEWEIS. Siehe [Eng], Theorem 1.5.18, S.67. □

Lemma 5.3.8 *Es sei $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal-endliche Familie von Teilmengen eines metrischen Raums X . Dann gilt*

$$\partial \left(\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha \right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \partial F_\alpha.$$

BEWEIS. Siehe [Eng], S.46. □

Damit stehen genug Hilfsmittel zur Verfügung um ein Lemma zu beweisen, welches für den Beweis der Existenz von Fundamentalbereichen von Bedeutung ist.

Lemma 5.3.9 *Für jede lokal-endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eines n -dimensionalen metrischen Raumes X gibt es eine Familie offener Mengen $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ mit den Eigenschaften*

- (1) $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$,
- (2) $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$,
- (3) $\dim \partial V_\alpha \leq n - 1$,
- (4) $\{\bar{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ist eine Überdeckung von X .

BEWEIS. Es sei $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Überdeckung von X gemäß Lemma 5.3.7, also $\overline{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Zu jedem $\alpha \in I$ sei Z_α eine offene Menge nach Lemma 5.3.3, also

$$W_\alpha \subseteq Z_\alpha \subseteq \overline{Z}_\alpha \subseteq U_\alpha$$

und $\dim \partial Z_\alpha < \dim U_\alpha$. Die Familie $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ist dann ebenfalls lokal-endlich als Verfeinerung einer lokal-endlichen Familie. Man wähle eine Wohlordnung auf der Indexmenge I , so daß α_1 das kleinste Element von I ist. Es sei $V_{\alpha_1} = Z_{\alpha_1}$. Nun soll transfinite Induktion angewendet werden. Für $\alpha_0 \in I$ sei bereits eine Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$ konstruiert mit den Eigenschaften

- (i) $\{V_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$ ist lokal-endlich,
- (ii) $V_\alpha \subseteq Z_\alpha$ für $\alpha < \alpha_0$,
- (iii) $\bigcup_{\alpha < \alpha_0} V_\alpha = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} Z_\alpha$,
- (iv) $\partial V_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha' \leq \alpha} \partial Z_{\alpha'}$ für $\alpha < \alpha_0$,
- (v) Die Eigenschaften (1)-(3) aus der Behauptung sind erfüllt für $\alpha < \alpha_0$.

Es sei $Y = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} V_\alpha$. Nach (4) ist dann

$$\partial Y \subseteq \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \partial Z_\alpha.$$

Mit $V_{\alpha_0} = Z_{\alpha_0} \setminus Y$ ist

$$\partial V_{\alpha_0} \subseteq \partial Y \cup \partial Z_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \leq \alpha_0} \partial Z_\alpha$$

nach Lemma 5.3.8, da die Familie Z_α lokal-endlich ist. Aus Lemma 5.3.3 folgt dann, daß $\dim \partial V_{\alpha_0} \leq \dim \partial Z_\alpha < n$ ist. Damit sind die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt. Induktiv erhält man somit eine Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$, für die (1)-(3) gilt. Schließlich ist mit Eigenschaft (iii)

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{V}_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{Z}_\alpha$$

und wegen $\overline{W}_\alpha \subseteq \overline{Z}_\alpha$ ist diese Vereinigung ganz X . □

Zum Abschluß dieses Kapitels über Dimensionstheorie soll nun der Fortsetzungssatz von Kuratowski formuliert werden, auf dessen äquivarianter Version alle Resultate der ersten Kapitel beruhen. Da die äquivariante Version auf der nichtäquivarianten aufbaut, ist dieser Satz also von grundlegender Bedeutung. Der Beweis ist jedoch recht umfangreich und hat mit dem weiteren Geschehen in der Arbeit nichts zu tun, daher soll auch dieser Satz nur mittels Verweis bewiesen werden.

Satz 5.3.10 *Es sei X ein metrischer Raum, Y ein lokal und global n -zusammenhängender Raum. Genau dann besitzt jede stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y$ von einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow Y$, wenn $\dim X \setminus A \leq n + 1$ gilt.*

BEWEIS. Siehe [Bor], S.80. □

5.4 Abbildungsgrade

Es gibt zwei unterschiedliche Zugänge, um den Grad einer Abbildung zu definieren, einen topologischen und einen analytischen. Da beide in dieser Arbeit Verwendung finden werden, möchte ich beide in diesem Abschnitt kurz vorstellen, ohne die benötigten Resultate, auf denen die Konstruktionen beruhen, zu beweisen. Die topologische Herleitung findet man zum Beispiel in [Do], die analytische in [Dei].

Der topologische Zugang definiert Abbildungsgrade für Abbildungen zwischen orientierbaren, kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M und N . Eine Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M ist hierbei eine stetige Abbildung

$$\mathcal{O} : M \setminus \partial M \rightarrow \bigcup_{p \in M \setminus \partial M} H_n(M, M \setminus \{p\}),$$

wobei

$$\bigcup_{p \in M \setminus \partial M} H_n(M, M \setminus \{p\})$$

topologisiert ist als das Orientierungsbündel von M . Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ existiert dann ein eindeutig bestimmtes Element $\mathcal{O}_K \in H_n(M, M \setminus K)$, so daß die Inklusion $i^p : (M, M \setminus K) \rightarrow (M, M \setminus \{p\})$ auf Homologieniveau das Element \mathcal{O}_K auf $\mathcal{O}(p)$ abbildet:

$$i_*^p(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}(p) \text{ für alle } p \in K.$$

Dieses Element \mathcal{O}_K heißt Fundamentalklasse um K . Ist M kompakt und ohne Rand findet man also insbesondere eine Fundamentalklasse $\mathcal{O}_M \in H_n(M, \emptyset)$. Ist nun K zusammenhängend und nicht leer, so ist $H_n(M, M \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ und \mathcal{O}_K ist ein Erzeuger der n -ten Homologie $H_n(M, M \setminus K)$. Auf der Sphäre \mathbb{S}^1 kann man sich zum Beispiel den Erzeuger als das Element $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z$ vorstellen, welches durch Potenzierung $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$ erzeugt (bzw. kann man die umgekehrte Orientierung wählen indem man das negative dieses Erzeugers als Fundamentalklasse nimmt, insbesondere gibt es entweder keine oder genau 2 Orientierungen, solange man bei \mathbb{Z} -Koeffizienten bleibt).

Es seien nun M, N zwei orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Sind $K \subseteq N$ und $f^{-1}(K) \subseteq M$ kompakt, so induziert f in der Homologie die Abbildung

$$f_* : H_n(M, M \setminus f^{-1}(K)) \rightarrow H_n(N, N \setminus K)$$

und es ist $f_*(\mathcal{O}_{f^{-1}(K)}) = d \cdot f_*(\mathcal{O}_K)$ mit $d \in \mathbb{Z}$. Diese Zahl d heißt der lokale Grad um K von f und wird mit $\deg_K f$ bezeichnet. Sind nun M, N kompakt, so stimmen diese Zahlen für alle kompakten Mengen K überein, insbesondere für $K = N$, und diese Zahl heißt dann der Abbildungsgrad $\deg f$ von f .

Hat man es mit Mannigfaltigkeiten mit Rand zu tun, so induziert eine Orientierung auf $M \setminus \partial M$ eine Orientierung auf dem Rand, welcher eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Für solche Mannigfaltigkeiten und eine stetige Abbildung $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ ist also der Grad von $f|_{\partial M}$ definiert und man kann zeigen, daß dieser mit $\deg f|_{M \setminus \partial M}$ übereinstimmt.

Der nächste Satz faßt alle wichtigen Eigenschaften des Abbildungsgrades zusammen. Dabei wird auf ∂M stets die induzierte Orientierung angenommen.

Satz 5.4.1 *Es sei $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ eine Abbildung zwischen orientierten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand, $K \subseteq N \setminus \partial N$ sei kompakt, zusammenhängend und nichtleer. Dann gilt:*

(1) *Ist $M \setminus \partial M$ eine Vereinigung*

$$M \setminus \partial M = \bigcup_{i=1}^m M_i,$$

so daß die Mengen $f^{-1}(K) \cap M_i = K_i$ paarweise disjunkt sind, so gilt

$$\deg_K f = \sum_{i=1}^m \deg_K f|_{M_i}.$$

(2) *Ist f ein Homöomorphismus, so gilt $\deg_K f = \pm 1$.*

(3) *Ist zusätzlich $h : (Q, \partial Q) \rightarrow (M, \partial M)$ und Q ebenfalls orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und ist $(f \circ h)^{-1}(K)$ kompakt, so gilt*

$$\deg_K (f \circ h) = \deg_K f \cdot \deg_{f^{-1}(K)} h.$$

(4) *Es seien nun M, N kompakt und N sei m -dimensional sowie $J \subseteq M$ kompakt. Dann gilt*

$$\mathcal{O}_{J \times K} = \mathcal{O}_J \times \mathcal{O}_K,$$

wobei \times hier das homologische Kreuzprodukt ist. Sind $f : M \rightarrow M$ und $h : N \rightarrow N$ stetig, so gilt

$$\deg_{J \times K} (f \times h) = \deg_J f \cdot \deg_K h.$$

Aus der Definition des Grades folgt sofort, daß $\deg_K f = 0$ ist, falls $f^{-1}(K) = \emptyset$. (1) besagt also, daß man die Abbildung f nur in einer beliebig kleinen Umgebung von $f^{-1}(K)$ zu kennen braucht, um ihren lokalen Grad auszurechnen.

Der analytische Zugang liefert im Prinzip eine Methode, um den Grad direkt zu berechnen. Hier sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, also eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . $\bar{\Omega}$ kann man dann als kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand auffassen. Man will nun den lokalen Grad von Abbildungen $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmen und zwar für den Fall $K = \{y\}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Offensichtlich reicht es, den Fall $y = 0$ zu betrachten. Um den Grad definieren zu können, muß $0 \notin f(\partial\Omega)$ gelten. Ist dies gegeben, so kann man mit analytischen Methoden zeigen, daß der Grad von f wie folgt berechnet werden kann. Man wähle eine C^2 -Abbildung h , welche in der Supremumsnorm hinreichend dicht an f liegt, genauer

$$\|h - f\|_\infty < d(0, f(\partial\Omega)) = d.$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, ist $d > 0$, also ist alles wohldefiniert. Nun finde man einen regulären Wert y der Abbildung h , welcher nahe an 0 liegt, genauer ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| < d$. Die Existenz eines solchen y liefert das Lemma von Sard, welches besagt, daß die singulären Werte einer

C^2 -Funktion eine Nullmenge bilden. Man kann dann zeigen, daß der Grad von h bzgl. $\{y\}$ gegeben ist durch

$$\deg_y h = \sum_{x \in h^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det Dh(x)$$

und ferner, daß diese Zahl konstant ist auf kleinen Umgebungen von h bzw. y . Insbesondere ist sie also gleich für alle zulässigen h und y nahe an f bzw. 0 , also kann

$$\deg_0 f = \deg_y h$$

definiert werden. Entsprechend kann auch der Grad bzgl. eines beliebigen $z \in \mathbb{R}^n$ definiert werden, und dieser wird dann mit $d(f, \Omega, z)$ bezeichnet. Man kann zeigen, daß der Abbildungsgrad als Abbildung von Tripeln der Form (f, Ω, z) wie eben nach \mathbb{Z} eindeutig bestimmt ist über die Ausschneidungseigenschaft, die Homotopieinvarianz und die Normalität. Über diesen Weg wird man also in der Praxis zeigen, daß der analytische Zugang und der topologische denselben Grad liefern.

Letztlich ist die Definition des Abbildungsgrades aber gleichgültig, da es die Eigenschaften aus 5.4.1 sind, welche interessieren.

5.5 Thomklasse und \cap -Produkt

Dieser letzte Abschnitt des Anhangs soll kurz die Hilfsmittel der algebraischen Topologie vorstellen, die in Kapitel 2 benötigt werden. Dies sind die Thomklasse und das \cap -Produkt (lies: Capprodukt). Die Theorie findet man wieder in [Do] oder auch in [Lü].

Das \cap -Produkt verbindet die Homologie- und Kohomologiegruppen topologischer Räume. Zum Beispiel ist der Isomorphismus der Poincaré-Dualität gegeben durch cappen mit einer Fundamentalklasse. Leider kommt man um gewisse notationstechnische Schwierigkeiten nicht herum, wenn man das \cap -Produkt sowie den Schnitt von Räumen $X \cap Y$ betrachtet. Jedoch sollte aus dem Zusammenhang stets klar sein, ob Räume geschnitten oder Elemente von (Ko)homologiegruppen gecapped werden.

Es sei (X, A, B) eine exzisive Triade, das bedeutet die Inklusion $(A, A \cap B)$ induziert einen Isomorphismus

$$i_* : H_*(A, A \cap B) \rightarrow H_*(X, A).$$

Dann gibt es eine Abbildung

$$\cap : H^{n-k}(X, B) \times H_n(X, A \cup B) \rightarrow H_k(X, A),$$

das sogenannte \cap -Produkt, welches in vielerlei Hinsicht Eigenschaften eines Produktes erfüllt. Für sämtliche Details sei nochmals auf [Do] verwiesen. Es sind aber wieder nur spezielle Eigenschaften, die hier interessieren, vornehmlich die folgende.

Lemma 5.5.1 *Es sei $f : (X, A_1, A_2) \rightarrow (Y, B_1, B_2)$ eine Abbildung von exzisiven Triaden. Dann gilt für alle Elemente $z \in H^{n-k}(Y, B_2)$ und $\xi \in H_n(X, A_1 \cup A_2)$:*

$$f_*((f^*x) \cap \xi) = x \cap (f_*\xi).$$

BEWEIS. Siehe [Do], VII 12.6, S.239. □

Der topologische Zugang zum Abbildungsgrad verlief über die Verwendung der Fundamental-klasse. Eine Art dualer Begriff zur Fundamental-klasse ist der Begriff der Thom-klasse, und die Verbindungen zwischen Abbildungsgrad und Thom-klasse sind die, welche für Hauptlemma 1 von Bedeutung sind. Die Thom-klasse ist wie folgt definiert. Es sei M eine n -dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit und N eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann kann man zeigen, daß die Homologie im Grad $n - k$, also die Gruppe $H_{n-k}(M, M \setminus N)$ frei erzeugt ist von Elementen, die in Bijektion mit den Zusammenhangskomponenten von N stehen. Es wird nur der Fall interessant sein, in dem N zusammenhängend ist. Mittels Poincaré-Dualität sieht man, daß

$$H^{n-k}(M, M \setminus N) \cong \text{Hom}(H_{n-k}(M, M \setminus N))$$

ist. Ist nun $H_{n-k}(M, M \setminus N)$ erzeugt von Elementen z_1, \dots, z_s , dann kann man zeigen, daß es ein eindeutig bestimmtes Element $\tau_N^M \in H^{n-k}(M, M \setminus N)$ gibt, welches $\tau_N^M(z_i) = 1$ für jeden Erzeuger z_i erfüllt. Dieses Element heißt Thom-klasse von N in M . Die wichtigsten Eigenschaften faßt das folgende Lemma zusammen.

Lemma 5.5.2 *Es seien M, N wie oben definiert, $K \subseteq N$ kompakt, $U \subseteq M$ offen, $N \setminus K \subseteq U \subseteq M \setminus K$. Dann gilt:*

(1) *Ist $i : U \rightarrow M$ die Inklusion, so ist $i^*(\tau_N^M) = \tau_{U \cap N}^U$.*

(2) *Ist $I : (N, N \setminus K) \rightarrow (M, U)$ die Inklusion, so ist*

$$I_*(\mathcal{O}_K^N) = \tau_N^M \cap \mathcal{O}_K^M,$$

wobei \mathcal{O}_K^N und \mathcal{O}_K^M Fundamental- Klassen in den offensichtlichen Gruppen sind.

BEWEIS. Siehe [Do], VIII 11.18, S. 319 und S.317. □

6 Literatur

[BK]: Balanov, Zalman und Kushkuley, Alexander: *Geometric Methods in Degree Theory for Equivariant Maps*, Lecture Notes in Mathematics 1632.

[Bor]: Borsuk, Karol: *Theory of Retracts*, Polish Scientific Publishers, Warschau 1971.

[Bou]: Bourbaki, Nicholas: *Lie Groups and Lie Algebras*, Springer Verlag, Berlin 2005.

[Bre]: Bredon, Glen E.: *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York and London 1972

[Bre2]: Bredon, Glen E.: *Topology and Geometry*, Springer Verlag, New York 1993.

[Dei]: Deimling, Klaus: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin 1985.

[Die]: tom Dieck, Tammo: *Transformation Groups*, de Gruyter, Berlin 1987.

[Die2]: tom Dieck, Tammo: *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Mathematics 766.

[Do]: Dold, Albrecht: *Lectures on Algebraic Topology*, Springer Verlag, Berlin 1995.

[Eng]: Engelking, Ryszard: *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warschau 1977.

[Fri]: Friedman, Avner: *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1969.

[Hör]: Hörmander, Lars: *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[KZ]: Krasnoselski, Mark und Zabrejko, Peter: *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer Verlag, Berlin 1984.

[Lü]: Lück, Wolfgang: *Algebraische Topologie*, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2005.

[Mor]: Morita, Kiiti: *On the Dimension of Normal Spaces*, Journ. Japan Math. 20 (1950) S. 1-36.

[Ni]: Nirenberg, Louis: *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Inst. of Math. Sc., Reprint 2001.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit eigenständig ohne Verwendung anderer als der gekennzeichneten Hilfsmittel angefertigt habe.

Hamburg, den 24.Januar 2007

Philipp Wruck