I Der Spektralsatz für beschränkte Operatoren

1. Der Rieszche Darellungssatz (hierzu zählt auch die Wiederholung der entsprechenden Grundlagen aus der Maßtheorie). Stellen Sie das folgende Theorem vor:

   Theorem I.1. *Ist K ein (lokal) kopakter Raum, so ist der Raum der stetigen linearen Funktionale auf $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ isomorph zm Raum $M(K)$ der regulären Borel-Maße auf K unter der Abbildung*

   $$M(K) \to C(K)' \quad \mu \mapsto (f \mapsto \int_K f d\mu).$$

   Das Theorem wird in [Wer00, Th. II.2.5] für K kompakt bewiesen, für K lokal kompakt finden Sie ihn in [Rud91]. Die verbleibende Zeit in Ihrem Vortrag füllen Sie bitte mit [Wer00, Satz II.2.4].

2. Stellen Sie den stetigen und messbaren Funktionalkalkül vor, also für $T \in B(H)$ selbstadjungiert die (involutiven) Algebrenhomomorphismen

   $$\begin{aligned} \Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H) \quad & [\text{Wer00, Satz VII.1.3}] \\ \widehat{\Phi}\colon B(\sigma(T)) \to L(H) \quad & [\text{Wer00, Satz VII.1.6}], \end{aligned}$$

   wobei $B(\sigma(T))$ die beschränkten messbaren Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(T)$ sind. Weisen Sie insbesondere darauf hin, dass wir für T kompakt und χ_λ die charakteristische Funktion eines Spektralwertes die Operatoren $\lambda \cdot \widehat{\Phi}(\chi_\lambda)$ bereits in dem Satz über die Spektralzerlegung von T kennengelernt haben (ca. [Wer00, Kap. VII.1] bis Def. VII.1.9).

3. Spektralmaße und die Spektralzerlegung selbsadjundierter Operatoren: Definieren Sie Spektralmaße (operatorwertige Maße) und Integrale beschränkter messbarer Funktionen diesbezüglich ([Wer00, Satz VII.1.11]). Beweisen Sie dann die Spektralzerlegung [Wer00, Th. VII.1.13]. Zeigen Sie auch hier die Analogien und Unterschiede zum Fall T kompakt auf (ca. [Wer00, Kap. VII.1] ab Def. VII.1.9).

II Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

1. **[Bode]** Erläutern Sie die Begriffe des dicht definierten Operators T, des (selbst)adjungierten Operators und führen Sie in diesem Fall die Cayley-Transformation $(T + i)(T - i)^{-1}$ ein (ca. [Wer00, Kap. VII.2] bis Bsp. c)).

2. **[Vasquez]**[Wer00, Bsp. VII.2 d)] benutzt die Fourier-Transformation, die wir in der Vorlesung ausgelassen haben. Holen Sie dies nach indem Sie

[Wer00, Kap. V.2] vorstellen und die hierfür notwendigen Begriffe (Sobolevräume, schwache Ableitungen) aus [Wer00, Kap. V.1] ebenfalls vorstellen. Stellen Sie schließlich [Wer00, Bsp. VII.2 d)] vor.

3. Stellen Sie [Wer00, Th. VII.3.2] vor:

   Theorem II.1. *Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E mit*

   $$\langle Tx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle E_\lambda x, y\rangle \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(T), y \in H.$$

   Ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und $D_h := \{x \in H : \int |h(\lambda)|^2 \, d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty\}$, so definiert

   $$\langle h(T)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle h(\lambda) \, d\langle E_\lambda x, y\rangle$$

   einen selbstadjungierten Operator $h(T)\colon H \supset D_h \to H$.

   (ca. [Wer00, Kap. VII.2] ab Satz VII.2.1 und [Wer00, Kap. VII.3]).

III Operatorhalbgruppen

1. **[Fischer]** Stellen Sie Operatorhalbgruppen (OHG) vor und diskutieren Sie die verschiedenen Stetigkeitsbedingungen hieran. Definieren Sie den Erzeuger einer OHG und verifizieren Sie dessen Eigenschaften ([Wer00, Kap. VII.4] bis Kor. 4.8). Motivieren Sie alles anhand des Beispiels

   $$T_t := \exp(t \cdot A)$$

   für A eine $n \times n$ Matirx. Zitieren Sie am Ende den Satz von Hille-Yosida (ohne Beweis).

2. Bedingungen für dicht definierte und abgeschlossene Operatoren um Erzeuger einer OGH zu sein (Sätze von Hille-Yosida und Lumer-Philips, Satz von Stone): [Wer00, Kap. VII.4] ab Satz 4.9.

IV C^*-Algebren

1. **[Schablack]** Stellen Sie das Konzept einer Banachalgebra vor und führen Sie die Gelfandtransformation

   $$\Gamma\colon A \to C(\Gamma_A)$$

   ein ([Wer00, Kap. IX.1+2] bis Th. IX.2.8). Motivieren Sie das Konzept der C^*-Algebra dadurch, dass man für diese Unterklasse von kommutativen Banachalgebren tatsächlich eine Isomorphis in [Wer00, Th. IX.2.8] bekommt (ohne den Beweis hierfür, s.u.).

2. **[Gloy]** Stellen Sie den Beweis der letzgenannten Tatsache vor [Wer00, Th. IX.3.4]. Stellen Sie außerdem die Beweisidee der GNS-Konstruktion vor, die jede C^*-Algebra als abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$ (für H einen geeigneten Hilbertraum) realisiert.

3. **[Block]** Beispiele für nicht-kommutative Beispiele von C^*-Algebren: Bündel von Matrixalgebren und deren kohomologische Klassifikation (z.B. nach [HJJS08, Kap. 19] nach Rücksprache mit mir bzgl. Vorkenntnissen).

4. **[Berger]** von Neumann-Algebren: Stellen Sie das Konzept einer von-Neumann Algebra vor (als schwach abgeschlossene Unteralgebra von $B(H)$ bzgl. der schwachen Topologie). Stellen Sie außerdem den Bikommutantensatz von von Neumann vor und die daraus resultierende algebraische Charakterisierung (bis [Jon, Def. 3.2.4]). Füllen Sie die restliche Zeit mit Material zur Klassifikation kommutativer von Neumann Algebren und der Charakterisierung solcher durch die Existenz eines Prädual (nach Rücksprache mit mir bzgl. Vorkenntnissen).

V Differentialrechnung in lokalkonvexen Räumen

1. **[Zurhelle]** Stellen Sie kurz den Satz von Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume vor [Rud91, p. 59/60], [Wer00, Kor. VII.2.13]. Definieren Sie differenzierbare Abbildungen auf lokalkonvexen Räumen ([Woc, Def. 1.1] ohne Teile b) und c)), geben Sie ein Gegenbeispiel für differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig, definieren Sie schwache Integrale und zeigen Sie die elementaren Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen aus [Woc, Satz 1.7].

2. **[Merz]** Beweisen Sie die Kettenregel ([Woc, Sätze 1.8 + 1.9]). Definieren Sie Mannigfaltigkeiten ([Woc, Def. 1.12] + wenige Beispiele) und glatte Abbildungen (also die „Morphismen“ von Mannigfaltigkeiten, [Woc, Def. 1.17 + Bem. 1.18]). Stellen Sie insbesondere in den Fokus, dass die Kettenregel wesentlich (und auch einzig wichtig) für diese Definitionen ist.

3. **[Cords]** Stellen Sie viele Beispiele von Mannigfaltigkeiten vor: Niveauflächen, Sphären, Untermannigfaltigkeiten, projektive Räume), z.B. aus [**?**, Bsp. nach Def. 5.1]. Definieren Sie Lie-Gruppen und stellen Sie auch hier viele Beispiele vor ([Woc, Bem.+Def. 1.19, Bem. 1.20, Bem. 1.12]).

4. **[Noshari]** Stellen Sie die lokale Beschreibung von Lie-Gruppen [Woc, Th. 1.22] vor, lassen Sie hierbei zu technische Sachverhalte nach Rücksprache mit mir aus. Stellen Sie den Satz z.B. anhand der Beispiele $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\mathrm{SU}_2 \cong \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$ ([Woc, Bsp. 1.28]) und anhand der universellen Überlagerung im Allgemeinen vor.

Literatur

[HJJS08] Dale Husemöller, Michael Joachim, Branislav Jurčo, and Martin Schottenloher. *Basic bundle theory and K-cohomology invariants*, volume 726 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, 2008. With contributions by Siegfried Echterhoff, Stefan Fredenhagen and Bernhard Krötz.

[Jon] Vaughan Jones. von Neumann Algebras. lecture notes.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.

[Woc] Christoph Wockel. Infinite-dimensional Lie Groups. lecture notes.