"Lie-Gruppen und Lie-Algebren"

Literatur:

∞-dim. Lie Theory

- Karl-Hermann Neeb "Monastir Lecture Notes on Infinite-Dimensional Lie Groups" (pdf-Datei, stud. IP)
- Kriegl, Michor "The Convenient Setting of Global Analysis"

endlichdim. Lie Theorie & Anwendungen in der Physik

- Onishchick, Vinberg "Lie Groups and Algebraic Groups"
- Bump "Lie Groups" (beide eher algebraisch)
- Hilgert, Neeb "Lie-Gruppen und Lie-Algebren" (elementarer Zugang)
- Helgason "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces (analytisch)
- Sharpe "Differential Geometry" (differenzialgeometr.)
- Naber "Topology, Geometry and Gauge Fields" I+II (differenzialgeometrisch (-topologisch), breit geschrieben, viele Bezüge zur Feldtheorie/Physik)
- Georgi "Lie Algebras in Particle Physics" (physik. Literatur (Elementarteilchenphysik))

- Kasten-Skript "Lineare Algebraische Gruppen"
- W. Rudin "Functional Analysis"

Lokalkonvexe Vektorräume

Def. 0.1: a) Ein topologischer Vektorraum (TVR) ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), der ein topologischer Hausdorff-Raum ist, so dass die Abb.

$$X \times X \to X \quad (x,y) \mapsto x+y$$

$$\mathbb{R} \times X \to X \quad (t,x) \mapsto t \cdot x$$

stetig sind.

b) Eine Halbnorm auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung $p: X \to \mathbb{R}_0^+$, so dass

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\, x,y \in X$$

$$p(t \cdot x) = |t|\, p(x) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ x \in X$$

c) Eine Familie von Halbnormen* $(f_j)_{j \in J}$, $f_j: X \to \mathbb{R}$ trennt die Punkte von X, falls

$$f_j(x) = 0 \quad \forall j \in J \iff x = 0 \quad \text{gilt.}$$

*(anderes Konzept als Fam. von Abbildungen, die die Punkte trennt! Dann würde $f_j(x) = f_j(y)\ \forall j \in J \iff x = y$ gelten)

Satz 0.2: Sei X ein Vektorraum und $(p_j)_{j \in J}$ eine Familie von Halbnormen, die die Punkte von X trennt. Dann definiert

$$\mathcal{B}_0 := \{ V(p_{j_1}, \varepsilon_1) \cap \ldots \cap V(p_{j_n}, \varepsilon_n) : \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0,\ j_1, \ldots, j_n \in J \}$$

eine Basis von Nullumgebungen und

$$\mathcal{B} := \{ x + U : x \in X,\ U \in \mathcal{B}_0 \}$$

eine Basis einer Vektorraumtopologie auf X.

Bew.: Rudin, Theorem I.1.37.

Def. 0.3: a) Ein lokalkonvexer TVR ist ein TVR, dessen Topologie wie im vorigen Satz durch eine Familie $(p_i)_{i\in J}$ von punktetrennenden Halbnormen beschrieben werden kann.

b) Ein lokalkonvexer TVR X heißt Fréchet-Raum, falls seine Topologie durch eine abzählbare Fam. von punktetrennenden Halbnormen $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschrieben werden kann und X bzgl. der Metrik

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist.

Lemma 0.4: Ein Fréchet-Raum, dessen Topologie durch eine endliche Fam. $(p_1,\dots,p_n)$ beschrieben werden kann ist ein Banachraum.

Bew.: Übung?

Def. 0.5: Für einen TVR X heißt

$$X' := \{ f: X\to\mathbb{R} : f \text{ linear und stetig}\}$$

Dualraum zu X.

Theorem 0.6 (Satz von Hahn-Banach): Für einen lokalkonv. TVR X trennt X' die Punkte, also

$$f(x)=f(y)\ \forall f\in X' \iff x=y.$$

Bew.: Rudin, Theorem I.3.4

Differenzialrechnung in topologischen Vektorräumen (TVR) (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Def. 1.1: Seien X, Y topologische Vektorräume, sei $U \subseteq X$ offen und $f: U \to Y$ eine Abbildung.

a) Für $v \in X$ ist dann

$$df(x)(v) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h\cdot v) - f(x)\right)$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v, falls der Limes existiert. f heißt *differenzierbar* falls $df(x)(v)$ für alle $(x,v) \in U\times X$ existiert und *stetig differenzierbar*, wenn darüberhinaus die Abbildung

$$df: U\times X \to V \quad (x,v) \mapsto df(x)(v)$$

stetig ist (bzgl. der Produkttopologie, "jointly continuous").

b) Die Abbildung f heißt *C^1(-Abbildung)*, falls f stetig differenzierbar ist. f heißt *C^n(-Abbildung)*, falls f C^1 ist und df C^{n-1}. f heißt *C^∞(-Abbildung)* oder *glatt*, falls f C^n ist für alle $n \geq 1$.

c) Falls X und Y topologische Vektorräume über $\mathbb{C}$ sind, dann heißt f *holomorph* falls f C^1 ist und $df(x): X \to Y$ komplex linear ist (reell linear ist $df(x)$ immer, s.u.).

d) Falls f C^n-Abb. ist, so sind die höheren Ableitungen induktiv definiert durch

$$d^n f(x)(v_1, \dots, v_n) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(d^{n-1} f(x+h\cdot v_n)(v_1,\dots,v_{n-1}) - d^{n-1} f(x)(\dots)\right)$$

Bem. 1.2: Vergleiche zu anderen Definitionen von Differenzierbarkeit in lokalkonvexen Räumen werden wir evtl. später sehen. Es wird sich dann zeigen, dass diese Definition die wichtigen anderen Definitionen verallgemeinert.

Bsp. 1.3: Sei $L: X \to Y$ stetig und linear, dann ist

$$dL(x)(v) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(L(x+hv) - L(x)) = \lim_{h \to 0} L(v) = L(v)$$

und somit ist L ein C^1 und des weiteren auch eine glatte Abbildung. Sind X und Y komplex und L ist komplex linear, so is L holomorph.

Def. 1.4: (Integrale in lokalkonvexen Räumen): Sei X ein lokalkonvexer TVR, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma: I \to X$ stetig und $a, b \in I$. Falls dann ein $v \in X$ existiert, so dass

$$\lambda(v) = \int_a^b \lambda(\gamma(s))\,ds \quad \forall \lambda \in X'$$

gilt, so heißt v das (schwache) Integral von γ (von a nach b) und wir setzen $\int_a^b \gamma(s)\,ds = v$.

Lemma 1.5: (schwache) Integrale sind eindeutig.

Bew.: Falls $v = \int_a^b \gamma = v'$, so gilt

$$\lambda(v) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) = \lambda(v') \Rightarrow \lambda(v - v') = 0 \quad \forall \lambda \in X'$$

$\Rightarrow v - v' = 0$ nach dem Satz von Hahn-Banach. ∎

Lemma 1.6: Ist $f: U \subseteq X \to Y$ C^1-Abb. und $L: Y \to Z$ stetig und linear, so ist $L \circ f$ C^1-Abb. mit $d(L \circ f)(x, v) = L(df(x, v))$. **Bew.:** Übung

(Hauptsatz, schwache Version)

Lemma 1.6: Ist X lokalkonvex, $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und $\gamma : I \to X$ eine C^1-Abb., dann existiert $\int_0^t \gamma'(s)\, ds$ für alle $s \in I$ und es gilt

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(s)\, ds$$

Bew.: Für $t \in I$ und $\lambda \in X'$ haben wir nach Def.

$$\lambda(\gamma(t) - \gamma(0)) = \lambda(\gamma(t)) - \lambda(\gamma(0)) \overset{(i)}{=} \int_0^t (\lambda \circ \gamma)'(s)\, ds \overset{(ii)}{=} \int_0^t \lambda(\gamma'(s))\, ds.$$

Hier benutzen wir für (i) den gewöhnlichen Hauptsatz der Diff. & Integralrechnung und für (ii) Lemma 1.6.
Also erfüllt $\gamma(t) - \gamma(0)$ die definierende Eigenschaft des schwachen Integrals $\int_0^t \gamma'(s)\, ds$. ∎

Satz 1.7: Sei $f : U \subseteq X \to Y$ eine C^1-Abb.

a) Für jedes $x \in U$ ist $df(x) : X \to Y$ (reell) linear & stetig.

b) Falls $x + v\,[0,1] \subseteq U$, so ex. $\int_0^1 df(x+t\cdot v)(v)\, dt$ und es gilt

$$f(x+v) = f(x) + \int_0^1 df(x+t\cdot v)(v)\, dt$$

Insbesondere ist f lokal konstant gdw $df(x) = 0 \ \forall x \in U$.

c) f ist stetig

d) Ist f C^n-Abb. für $n \geq 2$, so sind die Abb.

$$X^n \to Y \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto d^n f(x)(v_1, \dots, v_n)$$

für alle $x \in U$ stetig, symmetrisch und n-linear.

<u>Bew.:</u> Wir betrachten für $\lambda \in Y'$ und $v_1, v_2 \in X$ die Abb.

$$(t_1,t_2) \mapsto F(t_1,t_2) := \lambda\big(f(x + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2)\big),$$

die für (t_1,t_2) aus einer Nullumgebung von $0 \in \mathbb{R}^2$ definiert ist.
Die Partiellen Ableitungen von F sind gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1,t_2) := dF(t_1,t_2)(1,0) = \lambda\big(df(x + t_1 v_1 + t_2 v_2)(v_1)\big) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1,t_2) := dF(t_1,t_2)(0,1) = \text{—"—} \; (v_2). \qquad \text{(nachrechnen!)}$$

Insbesondere sind diese stetig, also ist F stetig differenzierbar und somit eine C^1 Abb. (Analysis II ?).
Ferner ist $dF(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear, und somit gilt

$$\underbrace{d(\lambda \circ f)(x)(v_1+v_2)}_{= \lambda(df(x)(v_1+v_2))} := dF(0,0)(1,1) = dF(0,0)(1,0) + dF(0,0)(0,1) = \underbrace{d(\lambda \circ f)(x,v_1) + d(\lambda \circ f)(x,v_2)}_{\overset{\text{(Lemma 1.6)}}{=} \lambda(df(x)(v_1) + df(x,v_2)) = \lambda(df(x)(v_1)) + \lambda(df(x)(v_2))}$$

$$\Rightarrow \lambda\big(df(x)(v_1+v_2)\big) = \lambda\big(df(x)(v_1) + df(x)(v_2)\big) \quad \forall \lambda \in X',\ v_1, v_2 \in X$$

$$\Rightarrow df(x)(v_1+v_2) = df(x)(v_1) + df(x)(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad \text{(Hahn-Banach)}$$

Genauso folgt auch $df(x)(t \cdot v) = t \cdot df(x)(v) \quad \forall t \in \mathbb{R}, v \in X$.
Da df nach Definition stetig ist und die Inklusion $U \hookrightarrow U \times X$ stetig ist, ist $df(x)$ stetig.

b) Folgt direkt aus Lemma 1.6, wenn man $\gamma(t) := f(x + t \cdot v)$ setzt.

c) Sei die Topologie auf X durch die Fam. $(p_j)_{j \in J}$ von punktetrennenden Halbnormen def. Dann ist zu zeigen, dass

$$\forall j \in J: \quad U \ni x \mapsto p_j(f(x)) \quad \text{ist stetig}$$

Aus der Definition von Halbnormen durch lineare Funktionale und dem Satz von Hahn-Banach folgt

$$p_j\left(\int_a^b \gamma(t)\,dt\right) \leq \int_a^b p_j(\gamma(t))\,dt$$

für jede C^1-Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$ (Übung).

Sei nun $j \in J$ fix. Da df stetig ist ist $p_j \circ df$ stetig und es ex. eine Nullumg. $U_1 \subseteq X$ mit $x + U_1 \subseteq U$ und $p_j(df(x+t\cdot v)(v)) < \varepsilon$ für $t \in [0,1]$ und $v \in U_1$ (Kompaktheitsargument!)

$$\Rightarrow p_j(f(x+v) - f(x)) \leq \int_0^1 p_j(df(x+t\cdot v)(v))\,dt \leq \varepsilon,$$

wobei die letzte Abschätzung aus der für gewöhnliche stetige Fktn. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgt. Also ist $p_j \circ f$ stetig und da j beliebig war ist somit f stetig.

d) Dies folgt wie in a) unter Betrachtung der Abb.

$$(t_1, \dots, t_n) \longmapsto f(x + t_1 \cdot v_1 + \dots + t_n v_n)$$

für $v_1, \dots, v_n$ aus einer entsprechenden Nullumgebung in X^n. ∎

Als nächstes wollen wir die Kettenregel beweisen. Dazu benötigen wir zunächst:

__Satz 1.8:__ Seien X, Y lokalkonvex, $U \subseteq X$, $f : U \to Y$. Dann ist

$$U^{[1]} := \{(x, v, t) \in U \times X \times \mathbb{R} : x + t \cdot h \in U\}$$

offen in $U \times X \times \mathbb{R}$ und f ist C^1 gdw eine stetige Fktn

$f^{[1]}: U^{[1]} \to Y$ ex., so dass $f^{[1]}(x,v,t) = \frac{1}{t}\cdot\left(f(x+t\cdot v) - f(x)\right)$ für $t \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $df(x,v) = f^{[1]}(x,v,t)$.

Beweis:

Dass $U^{[1]}$ offen ist folgt aus $U^{[1]} = g^{-1}(U)$ für $g(x,v,t) = x + t\cdot v$.

"$\Leftarrow$": Falls $f^{[1]}$ ex. ist $df(x,v) = f^{[1]}(x,v,0)$ für $x \in U, v \in X$ und somit f C^1.

"$\Rightarrow$" Sei f C^1. Für $x \in U$ ex. dann eine offene konvexe Nullumg. $W_x \subseteq X$ mit $W_x = -W_x$ und $x + 2\cdot W_x \subseteq U$, da U offen ist. Für $y \in x + W_x$, $t\cdot v \in W_x$ dann $y + [0,1]\cdot t\cdot v \in U$ und somit

Bild

$$\frac{1}{t}\cdot\left(f(y+t\cdot v) - f(y)\right) = \int_0^1 df(y + s\cdot t\cdot v)(v)\, ds$$

(Satz 1.7 b)). Da $p\left(\int_a^b \gamma(t)\, dt\right) \leq \int_a^b p(\gamma(t))\, dt \leq \sup_{t\in[a,b]}\{p(\gamma(t))\}\cdot|b-a|$ definiert die rechte Seite eine stetige Funktion auf $x + W_x, W_x, [-1,1]$

Also ist

$$f^{[1]}(x,v,t) := \begin{cases} \frac{1}{t}\cdot\left(f(x+t\cdot v) - f(x)\right) & \text{falls } t \neq 0 \\ \int_0^1 df(y + t\cdot s\cdot v)\, ds & \text{falls } x + [0,1]t\cdot v \subseteq U \end{cases}$$

eine stetige Funktion definiert, die offensichtlich die Bed. erf. ∎

Satz 1.9: (Kettenregel): Seien X, Y, Z lokalkonvex, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen $f: U \to V$ und $g: V \to Z$ C^1. Dann ist auch $g \circ f: U \to Z$ C^1 und es gilt

$$d(g\circ f)(x) = d(g)(f(x)) \circ df(x).$$

Bew.: Mit der Charakterisierung aus dem vorigen Satz folgt dies ganz leicht. Für $(x,v,t) \in U^{[1]}$ ist

$$\frac{1}{t} \cdot \big((g \circ f)(x + t \cdot v) - (g \circ f)(x) \big) =$$

$$\frac{1}{t} \cdot \big(g(f(x) + t \cdot f^{[1]}(x,v,t)) - g(f(x)) \big) =$$

$$g^{[1]}\big(f(x), f^{[1]}(x,v,t), t \big)$$

Da die rechte Seite eine stetige Funktion auf $U^{[1]}$ def. folgt die erste Aussage aus vorigem Satz. Für $t=0$ folgt damit dann auch

$$d(g \circ f)(x)(v) = (g \circ f)^{[1]}(x,v,0) = g^{[1]}\big(f(x), f^{[1]}(x,v,0), 0\big)$$

$$= dg(f(x))(df(x)(v)). \quad \blacksquare$$

Zum Schluss noch zwei technische Sätze.

Satz 1.10 (Taylor-Formel): X, Y lokalkonvex $f: U \subseteq X \to Y$ C^n. Falls $x + [0,1] \cdot v \subseteq U$, so gilt

$$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(x)(v, \ldots, v)$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} d^n f(x)(v, \ldots, v)\, dt$$

Bew.: Für $\lambda \in X'$ setze $F: [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda(f(x + t \cdot v))$. Dann folgt die Formel direkt durch $F^{(n)}(t) = \lambda(d^n f(x+t \cdot v)(v, \ldots, v))$, die gewöhnliche Taylorformel und die definierende Eigenschaft des Integrals.

Satz 1.11: X_1, X_2, Y lokalkonvex, $X := X_1 \times X_2$, $U \subseteq X$, $f: U \to Y$ stetig, $(x,y) \in U$. Dann existieren die part. Abl.

$$d_1 f(x,y)(v) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h\cdot v, y) - f(x,y)\right)$$

$$d_2 f(x,y)(w) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x, y+h\cdot w) - f(x,y)\right)$$

und def. stetige Abb. gdw f C^1-Abb. ist. In diesem Fall gilt

$$df(x,y)(v,w) = d_1 f(x,y)(v) + d_2 f(x,y)(w) .$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Falls f C^1-Abb. ist, so sind die part. Abl. durch Einschränkung des Differenzials gegeben und somit stetig.

"$\Leftarrow$" Falls $d_1 f$ und $d_2 f$ existieren und stetige Abb. definieren sind sie insbesondere stetige lin. Abb im letzen Argument.

Für $(x,y) + [0,1]\cdot(v,w) \subseteq U$ haben wir dann

$$f(x+h\cdot v, y+h\cdot w) - f(x,y) =$$

$$f(x+h\cdot v, y+h\cdot w) - f(x+h v, y) + f(x+hv, y) - f(x,y)$$

$$= \int_0^1 d_2 f(x+h\cdot v, y+t\cdot h\cdot w)(h\cdot w)\, dt$$

$$+ \int_0^1 d_1 f(x+thv, y)(h\cdot v)\, dt$$

$$= h\cdot\left(\int_0^1 -\shortparallel- (w)\,dt + \int_0^1 -\shortparallel- (v)\, dt\right)$$

Da Integrale stetige Funktionen definieren (Übung) folgt die Behauptung aus Satz 1.8. ∎

Glatte Mannigfaltigkeiten

<u>Motivation:</u> Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n) := \mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum der $n\times n$-Matrizen. Dafür existiert eine Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{gl}(n) \to GL(n) \qquad X \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

(mit $\exp(X)\cdot\exp(-X) = \exp(X-X) = \exp(0) = \mathbb{1}_n$ ist klar, dass $\exp(\mathfrak{gl}(n)) \subseteq GL(n)$). Ferner rechnet man für das Differenzial von $\exp$

$$d\exp(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

und aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgt, dass eine Nullumg. $V \subseteq \mathfrak{gl}(n)$ existiert, so dass

$$\exp|_V : V \to \exp(V)$$

ein Diffeomorphismus ist. Da die Abbildung

$$\lambda_g : \exp(V) \to g\cdot\exp(V) \qquad x \mapsto g\cdot x$$

für jedes $g \in GL(V)$ ein Diffeomorphismus ist (als Polynom in den Einträgen mit inversem $\lambda_{g^{-1}}$) folgt, dass jeder Punkt $g \in GL(n)$ eine Umgebung besitzt, die diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathfrak{gl}(n)$ ist. Die folgende Def. soll dies für beliebige offene Teilmengen von lokalkonvexen Vektorräumen verallgemeinern.

Def. 1.12: Sei M ein topologischer Hausdorff-Raum und X ein lokalkonvexer Raum. Eine X-Karte auf M ist ein Homöomorphismus

$$\varphi: U \to \varphi(U) \subseteq X$$

für offene Teilmengen $U \subseteq M$, $\varphi(U) \subseteq X$. Zwei X-Karten $\varphi: U \to \varphi(U)$ und $\psi: V \to \psi(V)$ heißen kompatibel wenn die Abbildung

$$\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \qquad x \mapsto \psi(\varphi^{-1}(x))$$

als Abb. zwischen offenen Teilmengen von X ein Diffeomorphismus im Sinne von Def. 1.1 ist (also glatt mit glatten Inversen).

Ein <u>X-Atlas</u> auf M ist eine Familie $\overbrace{(\varphi_i: U_i \to \varphi(U_i))_{i \in I}}^{\mathcal{A}}$ von <u>paarweise kompatiblen</u> Karten mit

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M$$

(also jeder Punkt von M liegt in einer Kartenumgebung U_i). Zwei Atlanten heißen kompatibel wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist. Ein <u>maximaler Atlas</u> $\mathcal{A}$ heißt auch <u>glatte X-Struktur</u> auf M und dass Paar $(M, \mathcal{A})$ dann <u>glatte Mannigfaltigkeit</u>.

Bem. 1.13: •) Aus der Kettenregel (Satz 1.13) folgt, dass Kompatibilität von Karten eine Äquivalenzrelation ist. Daraus wiederum folgt, dass ein maximaler Atlas bereits durch die Wahl eines kompatiblen Atlas eindeutig bestimmt ist. In der Praxis

wird deshalb einfach nur ein Atlas angegeben.
·) In die obige Def ging nur der Differenzierbarkeitsbegriff ein. Sie kann also beliebig auf andere Def. von Differenzierbarkeit (mit Kettenregel) angewendet werden.
·) Ist $X = \mathbb{R}^n$, so heißt $n = \dim(M)$ die <u>Dimension</u> von M.

<u>Beispiele:</u>

Zunächst endlichdimensionale Bsp.:

<u>Bsp. 1.14:</u> (Sphären) Sei $\mathbb{S}^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1 \}$.
Dann ist
$$U_N := \{ x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \ldots, 0, -1) \}$$
$$U_S := \{ x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \ldots, 0, 1) \}$$
(Bild!)

eine offene Überd. von $\mathbb{S}^n$ und
$$\varphi_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_{n+1}+1)^{-1} \cdot (x_1, \ldots, x_n)$$
$$\varphi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_{n+1}-1)^{-1} \cdot (x_1, \ldots, x_n)$$
definieren kompatible Karten, also einen Atlas.

<u>Bsp. 1.15</u> (Niveauflächen) Aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgt leicht der s.g. Rangsatz, der im Wesentlichen besagt, dass folgende Mengen Mannigfaltigkeiten sind:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Ist p ein regulärer Wert, also $\operatorname{Rang}(df(x)) = r$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in f^{-1}(p)$, so ist $f^{-1}(p)$ eine ($(n-r)$-dim.) Mfk.

Also ist $S^n = \|\cdot\|_2^{-1}(1)$ eine Mfk. Ebenso zeigt man mit $f: GL_n \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \mapsto XX^T$, und

$$\mathrm{Rang}(df) = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

dass $SO(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$ eine $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$-dim. Mfk ist.

Bsp. 1.16: Die einfachsten Mfk'en sind offene Teilmengen von lokalkonvexen Räumen wie z.B. $\mathbb{C}^\times$, $GL_n(\mathbb{R})$ oder $GL(A)$ für eine Banach-Algebra A (Übung).

Def. 1.17: Sei $(M, \mathcal{A})$ eine X-Mfk und $(N, \mathcal{B})$ eine Y-Mfk. Dann heißt eine Abbildung

$$f: M \to N$$

C^1-Abb., falls für alle Karten $(\varphi: U \to \varphi(U)) \in \mathcal{A}$ und $(\psi: V \to \psi(V)) \in \mathcal{B}$ die Abbildung

$$X \supseteq \varphi^{-1}(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longmapsto \psi(f(\varphi(x))) \in V \subseteq Y \qquad (*)$$

eine C^1-Abb. im Sinne von Def 1.1 ist. Analog werden C^n-Abbildungen und glatte Abbildungen definiert. $(*)$ heißt auch Koordinatendarstellung von f (bzgl. φ und ψ).

Bem 1.18: Ist $(*)$ für alle Karten aus kompatiblen Atlanten erfüllt, so auch für alle Karten aus maximalen Atlanten (Kettenregel).

Bem 1.19: Sind M und N X- und Y-Mfk'en, so ist $M \times N$ in natürlicher Weise eine $X\times Y$-Mfk. Ein Atlas erhält man durch $(\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \varphi(U_i) \times \psi(V_j))_{(i,j)\in I\times J}$ für Atl. $(\ldots)_I, (\ldots)_J$ von M und N.

Def. 1.19: Sei G eine Gruppe. Falls G zusätzlich eine glatte X-Struktur besitzt (also glatte X-Mfk ist) und die Gruppenoperationen

$$\mu: G\times G \to G \quad (g,h)\mapsto g\cdot h$$
$$\iota: G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$$

glatte Abbildungen sind, so heißt G auf X modellierte Lie-Gruppe. Ist X ein Hilbert-, Banach- oder Fréchet-Raum, so heißt G Hilbert-, Banach- oder Fréchet-Lie-Gruppe.

Bem. 1.20: Jede Gruppe ist eine Lie-Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie und modelliert auf dem $\mathbb{R}^0 \cong \{0\}$. Diese Struktur ist jedoch nicht interessant.

Bsp. 1.21: a) $G = SO_n(\mathbb{R})$ ist Lie-Gruppe, modelliert auf $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cong \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : M^T = -M\}$

Ähnlich wie in Bsp. 1.15 erhält man so auch (nicht-diskrete) Lie-Gruppenstrukturen auf $SL_n(\mathbb{R})$, $SU_n(\mathbb{C})$, $Sp_n(\mathbb{C})$ und weiterhin sogar auf allen abgeschlossenen Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$.

b) Ist A eine Banach-Algebra, so ist $A^\times$ eine auf A modellierte Lie-Gruppe (Übung).

Die lokale Beschreibung von Lie-Gruppen

Theorem 1.22: Sei G eine Gruppe, $U \subseteq G$ mit $1 \in U$, so dass U eine glatte Mannigfaltigkeit. Ferner, sei $V \subseteq U$ offen mit $1 \in V$, $V = V^{-1}$, $V\cdot V \subseteq U$, es seien die Abbildungen

i) $\mu: V \times V \to U \qquad x,y \mapsto \mu(x,y) := x \cdot y$

ii) $\iota: V \to V \qquad x \mapsto x^{-1}$

glatt und für jedes $x \in G$ existiere $W_x \subseteq U$ offen mit $1 \in W_x$ so dass $x W_x x^{-1} \subseteq U$ und dass die Abbildung

iii) $C_x: W_x \to U \qquad y \mapsto x \cdot y \cdot x^{-1}$

glatt ist.

Dann existiert eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf G so dass G eine Lie-Gruppe und V eine offen Untermannigfaltigkeit von G wird.

<u>Bew</u>: Sei $\varphi: P \to \varphi(P) =: Q \subseteq X$ eine X-Karte von U mit $P \subseteq V$, $P = P^{-1}$, $PP \subseteq V$ und $\varphi(1) = 0$.

Für jedes $x \in G$ definiert

$$\varphi_x: x \cdot P \to Q \qquad \varphi_x(y) = \varphi(x^{-1} \cdot y)$$

eine Bijektion mit Inversen $\varphi_x^{-1}: Q \to x \cdot P \quad y \mapsto x \cdot \varphi^{-1}(y)$. Wir versehen G mit der finalen Topologie bzg. der Familie von Abbildungen $(\varphi_x^{-1}: Q \to G)_{x \in G}$, also definieren $O \subseteq G$ als offen gdw $\varphi_x(O \cap xP) \subseteq Q$ offen ist für alle $x \in G$.

<u>1. Schritt</u>: xP ist offen und φ_x ist ein Homöomorph.

- $x \cdot P$ ist offen: Sei $y \in G$ und z.z.: $\varphi_y(xP \cap yP) \subseteq Q$ ist offen

$$\varphi_y(xP \cap yP) = \varphi(P \cap x^{-1}yP) \text{ offen} \Leftrightarrow P \cap x^{-1}yP \subseteq P$$

ist offen, da φ Homöomorph. ist. Da die Linksmultiplikationen $\lambda_{x^{-1}y}: P \to U \quad z \mapsto x^{-1}yz$ stetig* sind und $P \cap x^{-1}yP = \lambda_{x^{-1}y}^{-1}(P)$ ist also $x \cdot P$ offen für alle $x \in G$.

(* falls $P \cap x^{-1}yP \neq \emptyset$, so ist $x^{-1}y \in P \cdot P \subseteq V$ und $\lambda_{x^{-1}y}$ stetig)

- $\varphi_x : xP \to Q$ ist Homöomorphismus.

Nach Def. der finalen Top. ist jedes φ_x^{-1} stetig, also bleibt die Stetigkeit von φ_x zu zeigen, also

$$\varphi_x^{-1}(O) \text{ offen für alle } O \subseteq Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_y(\varphi_x^{-1}(O) \cap y \cdot P) \text{ offen } \forall\, O \subseteq Q,\ y \in G$$

$$\varphi(\lambda_{y^{-1}x}(\varphi^{-1}(O \cap \varphi(P \cap x^{-1}yP))))$$

(* falls $P \cap x^{-1}yP \neq \emptyset$ ist $x^{-1}y \in P \cdot P \subseteq V$ und $\lambda_{y^{-1}x} : P \to U$ ist stetig)

Da φ und $\lambda_{y^{-1}x}$ Homöomorphismen sind* folgt somit die Stetigkeit von φ_x.

<u>Schritt 2</u>: Die oben beschriebene Topologie ist Hausdorffsch.

Seien $x \neq y \in G$ und $xP \cap yP \neq \emptyset$ (sonst klar).

$\Rightarrow$ $y^{-1} \cdot x \in P \cdot P$ und es ex. $O_1 \subseteq P$, $W_1 \subseteq P$ mit $O_1 \cap W_1 = \emptyset$, $y^{-1}x \in O_1$, $e \in W_1$, da P Hausdorffsch

$\rightsquigarrow$ $O_2 := P \cap x^{-1} \cdot y \cdot W_1 = \lambda_{x^{-1}y}^{-1}(W_1)$ offene Einschränkung. und $y \cdot O_1$, $x \cdot O_2$ sind offene Umg. mit

$$\emptyset = O_1 \cap W_1 \supseteq O_1 \cap y^{-1} \cdot x \cdot O_2 \Rightarrow y \cdot O_1 \cap x \cdot O_2 = \emptyset$$

<u>Schritt 3</u>: Glatte Koordinatenwechsel:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_x : x \cdot P \to Q \\ \varphi_y : y \cdot P \to Q \end{array}\right\} \text{ Karten von } G \qquad \text{z.z.}$$

$$\varphi_x(x \cdot P \cap y \cdot P) \ni z \longmapsto \varphi_y(\varphi_x^{-1}(z)) \in \varphi_y(x \cdot P \cap y \cdot P) \text{ ist Diffeom.}$$

also $x^{-1}yP \cap P \ni z \longmapsto \varphi(y^{-1}x \cdot \varphi(z)) \in y^{-1}xP \cap P$ ist Diffeom.

Dies ist gerade die Koordinatendarstellung der Abbildung $\lambda_{y^{-1}x}$, die nach Voraussetzung glatt ist*. Genauso sieht man auch die Glattheit der Umkehrabbildung. (*auch hier: falls $y^{-1}xP \cap P \neq \emptyset \Rightarrow y^{-1}x \in V$ und $\lambda_{y^{-1}x}: P \to U$ glatt)

Schritt 4: Die von G auf U und V induzierte Mannigfaltigkeitsstruktur stimmt mit der ursprünglichen überein:

- V ist offen in G: für $x \in V$ ist

$$\varphi_x(V \cap xP) = \varphi(P \cap x^{-1}V) \text{ offen in } Q$$

(da $\lambda_{x^{-1}}: V \to x^{-1}V$ Homöom.)

$$\Rightarrow V \cap xP \text{ offen in } G \ \forall x \in V$$

$$\Rightarrow V \text{ offen in } G$$

- der ursprüngliche auf V gewählte Atlas ist mit dem von G induzierten Atlas

$$\left(\tilde{\varphi}_x : V \cap xP \to \varphi(x^{-1}V \cap P) \atop y \to \varphi_x(y) = \varphi(x^{-1} \cdot y) \right)_{x \in G}$$

kompatibel: da μ als glatt vorausgesetzt ist, ist

$$\ell_{x^{-1}} : xP \cap V \to P \cap x^{-1}V \quad y \mapsto x^{-1}y \quad \text{glatt}$$

Also sind die Karten $\tilde{\varphi}_x$ mit der Karte φ kompatibel und die Differenzierbaren Strukturen stimmen überein.

Einschränkung V glatt ist (Übung) mit Inversem $\mathrm{id}: G' \to G$. Also sind G und G' diffeomorph. ■

Häufig ist die Bed. iii) aus dem vorigen Theorem automatisch erfüllt:

<u>Lemma 1.23:</u> Seien G, U und V wie in Theorem 1.22. Falls G von V erzeugt wird (also

$$G = \langle V \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{V \circ \_ \circ V}_{n\text{-fach}},$$

so folgt iii) aus i) und ii) in Theorem 1.22.

<u>Bew.:</u> Sei $H \subseteq G$ die Menge aller $x \in G$, so dass W_x wie in Th. 1.22. iii) existiert. Dann ist $V \subseteq H$ und H ist eine Untergruppe:

•) $V \subseteq H$: Für $x \in V$ betrachte $\lambda_x : V \to U$ und setze $W_x := \lambda_x^{-1}(V) = x^{-1}V \cap V$.

$\Rightarrow W_x$ offen und $x W_x x^{-1} \subseteq V x^{-1} \subseteq V \cdot V \subseteq U$.

$\Rightarrow C_x : W_x \to U \quad y \mapsto x \cdot y \cdot x^{-1}$ glatt, da μ glatt (Kettenregel)

•) H ist Untergruppe:

- $1 \in H$: klar
- $x, y \in H \Rightarrow$ setze $W_{x \cdot y} = C_y^{-1}(W_x)$

$\Rightarrow C_{x \cdot y} = C_x \circ C_y : W_{x \cdot y} \to U$ glatt (Kettenregel)

$\Rightarrow H \supseteq \langle V \rangle = G$, da $\langle V \rangle$ die kleinste Untergruppe von G ist, die V enthält.

■

Schritt 5: Glattheit der Multiplikation $\mu: G\times G \to G$:

Karten von $G\times G$: $(\varphi_x \times \varphi_y): xP \times yP \to Q\times Q$

$$(z,z') \mapsto (\varphi_x(z), \varphi_y(z')) .$$

$$\Rightarrow \mu \circ (\varphi_x^{-1} \times \varphi_y^{-1})(z,z') = xy\cdot(y^{-1}\cdot\varphi^{-1}(z)\cdot y)\varphi^{-1}(z')$$

für $(z,z')\in Q\times Q$.

$\leadsto$ $(y^{-1}\cdot\varphi^{-1}(z)\cdot y)\cdot\varphi^{-1}(z') \overset{?}{\in} P$?

Da $\mu|_{P\times P}$ stetig ist ex. $S\subseteq P$ mit $1\in S$, $SS\subseteq P$ und nach Voraussetzung iii) eine offene Umgebung W mit $C_{y^{-1}}(W)\subseteq S\subseteq U$, so dass $C_{y^{-1}}|_W$ glatt ist.

$$\Rightarrow \varphi_{xy}(\mu(\varphi_x^{-1}\times\varphi_y^{-1}(z,z'))) = \varphi(C_{y^{-1}}(\varphi^{-1}(z))\cdot\varphi^{-1}(z'))$$

für $(z,z')\in\varphi(W)\times\varphi(S)$ und somit ist die Koordinatendarstellung von μ bzgl. jeder Karte $\varphi_x\times\varphi_y$ glatt.

Schritt 6: Glattheit der Inversion $\iota: G\to G$:

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda_x: G\to G & y\mapsto x\cdot y & \text{glatt } \forall x\in G \\ \rho_x: G\to G & y\mapsto y\cdot x & \text{glatt } \forall x\in G \end{array}\right\} \text{Schritt 5}$$

Für $y\in V$ ist $\iota(\lambda_x(y)) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = \rho_{x^{-1}}(\iota(y))$ und somit ist ι glatt auf $\lambda_x(V)$. Da x beliebig ist ist also ι auf ganz G glatt.

Schritt 7: Eindeutigkeit der glatten Struktur:

Sei G' eine andere Mannigfaltigkeitsstruktur auf G, so dass V offene Untermfk. von G' ist. Dann ist $id: G\to G'$ glatter Homomorphismus, da er auf der

Satz 1.24: Sei G Lie-Gruppe, auf X modelliert, H eine topologische Gruppe und $q: H \to G$ ein stetiger Homomorphismus mit diskretem Kern. Dann ex. auf H eine eindeutige Lie-Gruppen-Struktur, modelliert auf X, so dass q auf einen Diffeomorph. auf eine Umgebung von H einschränkt.

Bem. 1.25: - Topologische Gruppe: H top. Raum und

$\mu: H \times H \to H$ $(x,y) \mapsto x \cdot y$, $\iota: H \to H$ $x \mapsto x^{-1}$ stetig

- Quotientenmorph.: q surjekt., $q^{-1}(O) \subseteq H$ offen $\Leftrightarrow$ $O \subseteq G$ offen

- $\ker(q) \subseteq H$ diskret $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \ker(q)$ ex. $U \subseteq H$ offen mit $U \cap \ker(q) = \{x\}$

Bew.: Sei $\tilde{U} \subseteq H$ mit $\tilde{U} \cap \ker(q) = \{1\}$ und $U \subseteq H$ offen mit

$1 \in U$, $U \cdot U \subseteq \tilde{U}$ $\Rightarrow$ $q|_U$ injektiv:

$x, y \in U$ mit $q(x) = q(y) \Rightarrow q(xy^{-1}) = 1 \Rightarrow xy^{-1} \in \ker(q) \cap \tilde{U} = \{1\}$

q offen, da Quotientenabb. $\Rightarrow Q := q|_U : U \to q(U)$ Homöomorph.

$\rightsquigarrow$ Q induziert Mannigfaltigkeitsstruktur auf U (also Q Diffeom.)

Sei $V \subseteq U$ mit $V \cdot V \subseteq U$, $V' := Q(V)$, $U' = Q(U)$

$\Rightarrow$ $(x,y) \ni V' \times V' \mapsto Q(Q^{-1}(x) \cdot Q^{-1}(y)) = x \cdot y$ glatt

$x \ni V' \mapsto Q(Q^{-1}(x)^{-1}) = x^{-1}$ glatt

(Koordinatendarstellung der Multiplikation/Invers.)

$\Rightarrow$ Th. 1.22 i) und ii) erfüllt

Prüfe Th. 1.22 iii): Sei $x \in H$. Da H top. Gp. ex.

$W_x \subseteq U$ mit $c_x(W_x) \subseteq U$

$\Rightarrow Q(W_x) \ni y \mapsto Q(c_x(Q^{-1}(y))) = c_{Q(x)}(y)$ glatt. ▨

Def. 1.26: Seien G und H top. Gp., $q: G \to H$ surjektiver, offener und stetiger Gruppenhom. mit diskretem Kern. Dann heißt q Überlagerung und G eine Lie-Gruppe

Bem. 1.27: Ist $q: G \to H$ eine Überlagerung, so zeigt man analog zu Satz 1.24, dass H eine eindeutige Lie-Gruppen-Struktur besitzt, die q zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Die Lie-Gruppen-Str. von Überlagerungen bestimmen sich also wechselseitig.

Bsp. 1.28:
- $\mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times \quad t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist Überlagerung mit Kern $\mathbb{Z}$.
- $S^1 \to S^1, \; z \mapsto z^n$ ist Überlagerung mit Kern $\mathbb{Z}_2$.
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^n$ ist Überlagerung mit Kern $\mathbb{Z}^n$
- In den Übungen werden wir eine Überlagerung
$$Spin(n) \to SO(n)$$
mit Kern $\mathbb{Z}_2$ erarbeiten.

Bsp. 1.29: Sei A eine Banach-Alg. mit 1. Dann ist $A^\times$ (die Menge der invertierbaren Elemente) offen, da die geometrische Reihe zeigt, dass alle Elemente aus der offenen Einskug. $B = \{x \in A : \|1 - x\| < 1\}$ invertierbar sind und somit $x \cdot B$ offene Umg. von x in $A^\times$ ist.

$\Rightarrow A^\times$ hat kanonische Mfk-Struktur und ist diesbezgl. Lie-Gp.
- Multiplikation ist (stetig u.) bilinear, also glatt auf $A \times A$
  $\Rightarrow$ schränkt zu glatter Abbildung auf $A^\times \times A^\times$ ein
- Inversion: $L(a+th) - L(a) = a^{-1}(-th) \cdot (a+th)^{-1} = -t a^{-1} h (a+th)^{-1}$
  $\Rightarrow dL(x)(v) = -x^{-1} \cdot v \cdot x^{-1} \Rightarrow L\ C^1$-Abb. $\overset{\text{(Kettenregel)}}{\Longrightarrow} L\ C^n$-Abb. $\forall n \in \mathbb{N}$