

# Mannigfaltigkeiten

Brüning Cords

25. Januar 2012

# 1 Mannigfaltigkeiten

**Definition 1.1:** 1. Sei  $M$  ein topologischer Hausdorff-Raum und  $X$  ein lokalkonvexer Raum. Eine  $X$ -Karte auf  $M$  ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset X$$

Für eine offene Teilmenge  $U \subset M$

2. Zwei  $X$ -Karten

$$\begin{aligned}\varphi : U &\rightarrow \varphi(U) \\ \psi : V &\rightarrow \psi(V)\end{aligned}$$

heißen kompatibel wenn die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : \varphi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) \\ x &\mapsto \psi(\varphi^{-1}(x))\end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist.

3. Ein  $X$ -Atlas auf  $M$  ist eine Familie

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)\}$$

von paarweisen kompatiblen Karten mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$  gilt.

4. Zwei Atlanten heißen kompatibel wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist.

5. Ein maximaler Atlas heißt auch glatte- $X$ -Struktur auf  $M$  und das Paar  $(M, \mathcal{A})$  dann glatte Mannigfaltigkeit.

## Beispiel 1.2:

Die einfachsten Mannigfaltigkeiten sind offene Teilmengen von lokalkonvexen Räumen. Zum Beispiel,  $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  oder  $A^\times$  für eine Banachalgebra  $A$ . Als Karte wählt man einfach die Identität. Um dies zu zeigen benötigen wir noch ein Lemma.

## Lemma 1.3:

Für eine Algebra  $\mathcal{A}$  mit stetiger Multiplikation (topologische Algebra) mit 1 gilt: Wenn es eine Umgebung  $U$  gibt die die 1 enthält, dann ist  $\mathcal{A}^\times$  offen in  $\mathcal{A}$

*Beweis.* Die Linksmultiplikation  $\lambda_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \lambda_x(y) = xy$  ist stetig da die Algebra-Multiplikation stetig ist. Für  $x \in \mathcal{A}^\times$  ist  $\lambda_x$  invertierbar mit  $\lambda_x^{-1} = \lambda_{x^{-1}}$ . Also ist  $\lambda_x$  eingeschränkt auf die Einheiten ein Homöomorphismus. Dann gilt aber

$$x = \lambda_x(1) \in \lambda_x(\text{int}(\mathcal{A}^\times))$$

welches offen ist. Also ist jeder Punkt in einer offenen Umgebung. □

Weiterhin gilt für eine Banachalgebra das sie eine topologische Algebra ist mit einer 1 Umgebung.

1. Die Multiplikation  $\lambda$  ist stetig da für zwei Folgen  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  gilt,

$$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n y_n - x_n y + x_n y - xy\| \leq \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \rightarrow 0$$

2. Es gibt eine Umgebung  $U$  um die 1 die eine Teilmenge von den Einheiten ist. Sei also nun  $\|x\| < 1$ . Dann gilt für die Neumannreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Das sie absolut konvergiert, da

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|} < \infty$$

Also gilt

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1$$

Also sind Elemente um die 1 wieder invertierbar.

Also ist  $\mathcal{A}^\times$  offen in  $\mathcal{A}$  welcher ein Lokalkonvexer Raum ist.

**Beispiel 1.4:**

Sind  $M$  eine  $X$ -Mannigfaltigkeit und  $N$  eine  $Y$ -Mannigfaltigkeit, So ist  $M \times N$  eine  $X \times Y$ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas  $\mathcal{A}$  erhält man durch

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$$

, für die Atlanten  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  von  $M$  und  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  von  $N$ .

**Beispiel 1.5 (Spähren):**

Sei  $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$

Dann ist

$$U_N := \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \dots, 0, -1)\}$$

$$U_S := \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \dots, 0, +1)\}$$

eine offene Überdeckung von von  $\mathbb{S}^n$ .

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_{n+1} + 1)^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_{n+1} - 1)^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

definieren Kompaktible Karten.

**Beispiel 1.6** (Torus):

Wir betrachten den Torus  $T$  als Quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Sei  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ . Dann wählen wir dazu die offenen quadrate  $(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}) \times (y_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2})$ . Betrachten wir dazu die Bilder in  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  so erhalten wir eine offene Überdeckung. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}\varphi_i : U_i &\rightarrow \varphi_i(U_i) \\ (x, y) &\mapsto (x - x_i, y - y_i)\end{aligned}$$

dann erhalten wir Karten von  $T$  in den  $\mathbb{R}^2$ . Wenn wir die Punkte  $(0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  wählen, und dann die entsprechenden offenen quadrate darum so sieht man das drei Mengen schon reichen.

**Beispiel 1.7** (Kleinsche Flasche):

Betrachten wir die Die kleinsche Flasche  $K$  als Qutient vom Torus nach der Involution  $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$  ist ebenfals eine Mannigfaltigkeit. Als Karte kann man jedes offene Rechteck nehmen, das in  $x$ -Richtung maximal die länge  $\frac{1}{2}$  hat und in  $y$ -Richtung höchstens länge 1.

**Beispiel 1.8** ( $\mathbb{R}P^n$ ):

Wir betrachten  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Darauf betrachten wir die Äquivalenzrelation  $x \sim y :\Leftrightarrow x = \lambda y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dieser Raum wird dann  $\mathbb{R}P^n$  genannt.

Als offene Überdeckung wählen wir  $U_i := \mathbb{R}P^n \setminus \{x_i \neq 0\}$ . Für die ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)\end{aligned}$$

Die Kartenwechsel sind dann gegeben durch

$$\psi_{i,j}(z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

Die ist beliebig oft differenzierbar. Dadurch wird  $\mathbb{R}P^n$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 1.9** (Drehgruppe  $SO(3)$ ):

Wir Betrachtzunächst die Abbildung

$$CAY : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) \quad A \mapsto (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - A)^{-1}$$

Wobei wir hier  $A \in \mathbb{R}^3$  auffassen als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

. Die Cayley Abbildung ist injektiv, ihre Umkehrabbildung kann dann als Karte von  $SO(3)$  dienen und wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}CAY(A) = B &\Leftrightarrow B(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1} + A \\ &\Leftrightarrow (B + \mathbb{1})A = B - \mathbb{1} \\ &\Leftrightarrow A = (B + \mathbb{1})^{-1}(B - \mathbb{1})\end{aligned}$$

Der Ausdruck  $(B + \mathbb{1})^{-1}$  ist genau dann definiert wenn  $-1$  kein Eigenwert ist. Das sind aber genau die Matrizen die eine Drehung um  $\pi$  darstellen. Also brauch man für jede Drehung um  $\pi$  eine Abbildung  $CAY_{e_i}^{-1}$

**Satz 1.10:**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit dann ist  $M$  auch eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A}$  ein Atlas im Sinne einer Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit  $\varphi_i(U_i) = V_i \cap \mathbb{R}_0^d$  für alle  $i \in I$  und  $\bigcup_{i \in I} U_i$ . Dann ist  $\pi \circ \varphi_i(U_i) = \tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^d$  ein Diffeomorphismus. Also ist

$\bigcup_{i \in I} \{\pi \circ \varphi\}$  ein Atlas im Sinne einer Mannigfaltigkeit. □

**Satz 1.11:**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$   $M \neq \emptyset$ . Dann ist äquivalent:

1.  $M$  ist  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.
2. Für alle  $a \in M$  gibt es  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $n - d$   $C^1$ - Abbildungen  $f_1, \dots, f_{n-d} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass
  - a)  $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}$
  - b)  $df_1(a), \dots, df_{n-d}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sind linear Unabhängig.

*Beweis.*  $1 \Rightarrow 2$

Per Definition gibt es  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $\varphi : U \rightarrow V$ , Diffeomorphismus, so dass  $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}_0^d \cap V$ . Wähle

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \varphi_{d+1} \\ \vdots \\ f_{n-d} = \varphi_n \end{array} \right\} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Da  $d\varphi(a) = (d\varphi_1(a), \dots, d\varphi_n(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  invertierbar ist folgt 2.

$2 \Leftarrow 1$

Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  so dass  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d, df_1(a), \dots, df_{n-d}(a)\}$  Basis von  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  ist (möglich nach b). Betrachte

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \lambda_1(x), \dots, \lambda_d(x), f_1(x), \dots, f_{n-d}(x)$$

Dann ist  $dF(a) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d, df_1(a), \dots, df_{n-d}(a))$  ist invertierbar. Nach den Satz über die Umkehrfunktion:

Es gibt  $U_0 \subset U$  offen  $a \in U_0$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $V = F(U_0)$  so dass  $F : U_0 \rightarrow V$  ist Diffeomorphismus. Sei  $x \in U_0$ ,

$$x \in M \Leftrightarrow_a f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) \in \mathbb{R}_0^d \cap V$$

Also  $F(M \cap U_0) = \mathbb{R}_0^d \cap V$

□

**Definition 1.12:**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar. Dann ist  $x$  ein regulärer Punkt falls  $d[f(x)]$  surjektiv ist.

Wenn  $y = f(x) \Rightarrow x$  regulärer Punkt gilt, dann heißt  $y$  regulärer Wert.

**Satz 1.13:**

$U \subset \mathbb{R}^n$  offen.  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$   $C^1$ -Abbildung und  $c \in \mathbb{R}^k$  ein regulärer Wert.

Falls  $M := f^{-1}(\{c\})$  nicht leer ist, dann ist  $M$  eine  $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit vom  $\mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei  $a \in M$ . Setze

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^k \\ x \mapsto f(x) - c$$

Dann erfüllen  $F_1, \dots, F_k$  die Bedingung aus Teil 2

1.  $F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \Leftrightarrow x \in M$
2.  $df(a) = (df_1(a), \dots, df_k(a))$  ist surjektiv  $\Rightarrow dF_1(a), \dots, dF_k(a)$  ist linear unabhängig.

□

**Beispiel 1.14:**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Dann gilt  $f^{-1}(\{d\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = d\}$  und  $df(x, y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2x \quad -2y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ist surjektiv genau dann, wenn  $(x, y) \neq 0$

$$0 \in f^{-1}(\{d\}) \Leftrightarrow 0 \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = d\} \Leftrightarrow 0 = d$$

## 2 Lie-gruppen

**Definition 2.1 (Lie-Gruppen):**

Sei  $G$  eine Gruppe. Falls  $G$  zusätzlich eine glatte  $X$ -Struktur besitzt und die Gruppenoperationen

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad L : G \rightarrow G \\ (g, h) \mapsto gh \quad g \mapsto g^{-1}$$

glatte Abbildungen sind, so heißt  $G$  auf  $X$  modellerte Lie-gruppe

**Beispiel 2.2** ( $GL_n(\mathbb{K})$ ):

Wir wollen zeigen das die Menge der invertierbaren Matrizen eine Liegruppe sind.

Seien  $M, N \in GL_n(\mathbb{K})$  mit  $\|M\|_{op}, \|N\|_{op} \leq \varepsilon$ . Dann gilt

$$\|MN\|_{op} = \sup_{\|v\| \leq 1} \|MNv\| \leq \sup_{\|w\| \leq \|N\|_{op}} \|Mw\| = \|N\|_{op} \sup_{\|w\| \leq 1} \|Mw\| = \|N\|_{op} \|M\|_{op} \leq \varepsilon^2$$

Also ist  $MN$  stetig.

Um die stetigkeit von  $A \mapsto A^{-1}$  zu zeigen, verwenden wir die crammersche Regel die besagt:

Für ein Gleichungssystem  $Ax = b$  gilt  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$  mit

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun  $AB = \mathbb{1}$  so erhält man n Gleichungssysteme der Form  $AB_i = e_i$  die alle von der Determinanten abhängen, welche stetig ist.

Somit ist  $GL_n(\mathbb{K})$  eine topologische Gruppe. Da  $GL_n(\mathbb{K})$  eine Mannigfaltigkeit ist, ist es somit auch eine Liegruppe.

**Beispiel 2.3** ( $S^3$ ):

Wir betrachten den 4-dimensionalen Einheitskreis

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \quad : \|x\| = 1\}$$

Dies ist eine Mannigfaltigkeit nach den ersten Teil. Bleibt zu zeigen das es auch eine topologische Gruppe ist.

Als erstes werden wir  $S^3$  eine Gruppenstruktur geben. Dazu werden wir  $S^3$  einbetten in  $\mathbb{H}$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\ e_1 &\mapsto 1 \\ e_2 &\mapsto i \\ e_3 &\mapsto j \\ e_4 &\mapsto k \end{aligned}$$

Für  $x, y \in \mathbb{H}$  gilt  $\|xy\| = \|x\| \|y\|$  somit ist  $S^3$  abgeschlossen unter multiplikation. Weiterhin gilt da  $\mathbb{H}$  ein Schiefkörper ist das für alle  $x \in \mathbb{H}^\times$  existiert ein  $x^{-1}$ . Dies ist auch ein Element in  $S^3$  da  $1 = \|xx^{-1}\| = \|x\| \|x^{-1}\| = \|x^{-1}\|$ . Dadurch erhalten wir somit eine Gruppenstruktur auf  $S^3$ .

Die Abbildung  $x \mapsto x^{-1}$  ist die selbe wie  $x \mapsto \bar{x}$  somit kann man  $\delta = \varepsilon$  wählen. Somit ist die abbildung stetig da  $\|x\| = \|\bar{x}\|$  gilt.

Seien  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  zwei folgen in  $S^3$ . Dann gilt,

$$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n y_n - x_n y + x_n y - xy\| \leq \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \rightarrow 0$$

Die Stetigkeit folgt aus

**Beispiel 2.4** (Einheitengruppe einer Banachalgebra):

Sei  $\mathcal{A}$  eine beliebige Banachalgebra und  $\mathcal{A}^\times$  die Einheiten. Dann wissen wir das  $\mathcal{A}^\times$  eine Mannigfaltigkeit ist und das die Multiplikation stetig ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} d\lambda(x, y)(v, w) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\lambda(x + vt, y + wt) - \lambda(x, y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\lambda(x, y) + \lambda(x, wt) + \lambda(vt, y) - \lambda(x, y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\lambda(x, wt) + \lambda(vty, y)) \\ &= \lambda(x, w) + \lambda(v, t) \end{aligned}$$

Somit ist es Auch eine  $C^1$  Abbildung. Das die Multiplikation eine glatte abbildung folgt dann Induktiv.

Für die stetigkeit der Inversabbildung benötigen wir wieder ein Lemma.

**Lemma 2.5:**

Für eine topologische Algebra mit eins gilt wenn die Abbildung

$$\iota : \mathcal{A}^\times \rightarrow \mathcal{A}^\times \quad x \mapsto x^{-1}$$

in der 1 stetig ist dann ist sie stetig.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\mathcal{A}^\times$  die Einheiten,  $\lambda_x(a) = xa$  und  $\rho_x(a) = ax$ . Seien  $x, y \in \mathcal{A}^\times$  dann gilt:

$$\iota(\lambda_x(y)) = (\lambda_x(y))^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = \rho_{x^{-1}}(y^{-1}) = \rho_{x^{-1}}\iota(y)$$

Wenn man nun  $y = 1$  setzt dann folgt die Behauptung. □

Wir betrachten wieder die Neumannreihe für  $\|x\| < 1$  und denn Ball um die 1. Für die gilt

$$\|\iota(1-x) - 1\| = \|(1-x)^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n - 1 = \frac{1}{1 - \|x\|} - 1 = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} \rightarrow 0$$

für kleine  $x$ . Also ist  $\iota$  in 1 stetig und somit stetig.

$\iota$  ist  $n$ -mal differenzierbar.

Dies zeigen wir per Induktion. Für  $n = 1$  betrachten wir  $(x, y, t) \in (\mathcal{A}^\times)^{[\infty]}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (\iota(x + ty) - \iota(x)) &= \frac{1}{t} ((x + ty)^{-1} - x^{-1}) \\ &= \frac{1}{t} (x + ty)^{-1} (x - (x + ty)) x^{-1} \\ &= -(x + ty)^{-1} y x^{-1} \\ &= -\iota(x + ty) y \iota(x) \end{aligned}$$

und da  $\iota$  stetig ist, ist auch der Ausdruck in der 0 stetig. Somit existiert  $d\iota(x)(v)$ .  
Angenommen die Aussage gilt für  $k-1$  und  $k > 1$ . Dann ist  $\iota$   $C^1$  nachdem was wir gerade gezeigt haben mit  $\iota^{[1]}(x, y, t) = -\iota(x + yt)y\iota(x)$ . Dies ist aber die Zusammensetzung von der glatten Abbildung  $(x, y, t) \mapsto x + ty$  und einer nach Induktionsvoraussetzung einer  $C^{k-1}$   $\iota$ . Also ist es eine  $C^k$ .