Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

12. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe

Aufgabe 52

Nach Aufgabe 47 (d) ist die Einbettung $i\colon (D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a}) \to \ell^2$ kompakt und die Norm $\|\cdot\|_{M_a}$ äquivalent zur Graphennorm. Andererseits ist $M_a\colon (D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a}) \to \ell^2$ stetig vgl. Lemma III.4.3. Die Aussage folgt dann mit Satz V.4.8. Explizit: Sei $\lambda \in \rho(M_a) \neq \emptyset$ – hier ist zu beachten, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ nicht dicht in $\mathbb{K}$ liegen kann. Da $\lambda - M_a\colon (D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a}) \to \ell^2$ ebenfalls stetig ist, folgt mit dem Satz über die offene Abbildung für stetige Operatoren bzw. dessen Korollar III.3.5, dass $(\lambda - M_A)^{-1}\colon \ell^2 \to (D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a})$ stetig ist. Nach Bsp. V.1.2 b) ist die Komposition mit der Einbettung i, also $R_\lambda(M_a)$, kompakt.

Aufgabe 53

(1) Es gilt $\|Tx\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2$ (Pythagoras) und mit der Bessel'schen Ungleichung (Satz IV.4.5) folgt $\|Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n|\|x\|$, also ist T stetig. Mit Lemma V.2.2 b) sieht man sofort, dass der adjungierte Operator durch

$$T^*y := \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n$$

für $y \in H$ definiert ist. Wie in Satz V.5.2 sieht man, dass T normal ist.

(2) Eine Richtung wurde bereits in Satz V.5.4 bewiesen. Um zu sehen, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, falls T kompakt ist, benutzen wir Satz den Spektralsatz V.4.5 für kompakte Operatoren. Zunächst gilt wie im Beweis von Satz V.5.2 $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma(T)$ – die λ_n sind Eigenwerte mit Eigenvektor e_n. Satz V.4.5 zeigt dann, dass die Folge eine Nullfolge sein muss (außerhalb jeder ϵ-Nullumgebung können nur endlich viele Folgenglieder liegen).

(3) Wie im Beweis von Satz V.5.2 gilt $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma(T)$ und $\ker(\lambda_n - T) = \operatorname{span}\{e_m \mid m \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_m = \lambda_n\}$ für $\lambda_n \neq 0$. Null ist genau dann ein Eigenwert, wenn $\lambda_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp \neq 0$, d.h. falls $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine Orthonormalbasis ist. Die Eigenvektoren zu Null sind entsprechend $\ker T = \operatorname{span}\{e_m \mid m \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_m = 0\} \cup \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp$. Ist μ Eigenwert von T und x ein zugehöriger Eigenvektor, so muss offensichtlich $\mu \in \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ gelten. Aus $0 = \|(\mu - T)x\|^2 = \sum_{n=0}^\infty |\mu - \lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2$ (vgl. Satz IV.4.10) folgt dann $\mu = \lambda_n$ für alle n mit $\langle x, e_n\rangle \neq 0$. Ist $x \in \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp$, folgt $\mu = 0$.'

Aufgabe 54

(2) Zunächst einmal bemerken wir, dass der Operator T_h stetig ist. Es gilt nämlich nach der Schwarz'schen Ungleichung und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\|T_h f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^1 f(t)h(s-t)dt\right|^2 ds \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)||h(s-t)|dt\right)^2 ds \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |h(s-t)|^2 dt\right)\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right) ds = \|f\|_{L^2}^2 \int_0^1\int_0^1 |h(s-t)|^2 dsdt,\end{aligned}$$

also $\|T_h\| < \infty$. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$. Wegen

$$(T_h e_k)(s) = \int_0^1 e^{2\pi ikt} h(s-t)dt = e^{2\pi iks}\int_0^1 h(r)e^{-2\pi ikr}dr = e_k(s)\int_0^1 h(r)e^{-2\pi ikr}dr$$

gilt dann $T_h e_k = \hat{h}(k)e_k$, wobei $\hat{h}(k)$ den entsprechenden Fourierkoeffizient bezeichnet. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist also $\hat{h}(k)$ ein Eigenwert des Faltungsoperators T_h mit zugehöriger Eigenfunktion e_k. Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue gilt außerdem $\hat{h}(k) \to 0$ für $|k| \to \infty$.

(3),(1) Nach vorheriger Überlegung ist die Spektralzerlegung von T_h gegeben durch die Summe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(k)\langle\cdot, e_k\rangle e_k$, d.h. es gilt

$$T_h(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(k)\langle f, e_k\rangle e_k$$

für alle $f \in L^2[0,1]$. Aus der Spektralzerlegung folgt nun unmittelbar, dass T_h ein normaler und kompakter Operator ist (Satz V.5.2). Das Spektrum von T_h ist gegeben durch

$$\sigma(T_h) = \overline{\{\hat{h}(k) | k \in \mathbb{Z}\}} = \{0\} \cup \{\hat{h}(k) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 55

(1) Wir bemerken zunächst, dass $\|T\| = 1$, da $\|Tx\| \le \|x\|$ und z.B. $\|Te_2\| = 1$. Deshalb gilt $\sigma(T) \subseteq \{z : |z| \le 1\}$ vgl. Th. V.3.7 c). Außerdem ist jedes z mit $|z| < 1$ ein Eigenwert von T – z.B. ist $(1, z, z^2, \ldots) \in \ell^1$ ein Eigenvektor (geometrische Reihe). Da das Spektrum abgeschlossen ist (vgl. Th. V.3.7 a)), gilt $\{z : |z| \le 1\} \subseteq \sigma(T)$, zusammen also $\sigma(T) = \{z : |z| \le 1\}$.

Der duale Operator berechnet sich zu $T'(s_1, s_2, ...) = (0, s_1, s_2, ...)$ (vgl. Aufg. P16). Zur Bestimmung des Spektrums von T':

- Entweder direkt mit dem Satz V.3.3 aus der Vorlesung: $\sigma(T') = \sigma(T) = \{z : |z| \le 1\}$.
- Oder mit dem folgenden Argument: Wieder gilt $\|T'\| \le 1$ und also $\sigma(T') \subseteq \{z : |z| \le 1\}$. Wir betrachten $(\lambda - T')(s_1, s_2, ...) = (\lambda s_1, \lambda s_2 - s_1, \lambda s_3 - s_2, ...)$. Für $\lambda = 0$ ist $\lambda - T'$ trivialerweise nicht surjektiv, d.h. $0 \in \sigma$. Für $0 \ne |\lambda| < 1$ ist $\lambda - T'$ nicht surjektiv: Sei $t = (t_n)$ eine Folge in ℓ^∞. Dann würde s mit $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{\lambda^{n-k+1}}$ das Urbild von t sein, aber für $t = (e^{-i\arg(\lambda)}, e^{-2i\arg(\lambda)}, ...)$ ist s offensichtlich unbeschränkt. Zusammen mit der Abgeschlossenheit folgt wieder, dass $\sigma(T') = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$.

Da $\lambda - T'$ immer injektiv ist, hat T' keinen Eigenwert!

(2) Der Fall ℓ^2 wird ähnlich behandelt: Wieder gilt $\sigma(T) = \{z : |z| \leq 1\}$ und $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{z : |z| \leq 1\}$ (vgl. Satz V.3.3).

Aufgabe 56

Es sei $V := C_c^\infty(0,1)$ der Raum der Testfunktionen auf $(0,1)$, d.h. der Unterraum der glatten Funktionen auf $(0,1)$ mit kompakten Träger. Für beliebiges $v \in V$ multiplizieren wir zunächst Gleichung (1) mit $\overline{v}$. Integration liefert dann

$$-\int_0^1 (p(x)u'(x))'\overline{v}(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{v}(x)dx$$

und partielle Integration der linken Seite ergibt

$$-[p(x)u'(x)\overline{v}(x)]_0^1 + \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v}'(x)dx.$$

Folglich gilt

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{v}(x)dx.$$

Wir wählen nun den Hilbertraum $H := \overline{V}$, wobei wir den Abschluss bezüglich der Sobolev-Norm

$$\|v\|_{H^1}^2 = \int_0^1 |v(x)|^2 dx + \int_0^1 |v'(x)|^2 dx$$

bilden. Man kann man beweisen, dass diese Menge genau die Sobolev-Funktionen mit Nullrandbedingungen sind. Es gilt also $v \in H$ genau dann, wenn $v(0) = v(1) = 0$ im Sinne von Spuren gilt. Die schwache Form der Gleichung (1) lautet also

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{v}(x)dx$$

für beliebiges $v \in H$. Wir betrachten nun die Sesquilinearform

$$a : H \times H \to \mathbb{C}, \quad b(u,v) := \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v}'(x)dx$$

und das antilineare, stetige Funktional

$$F : H \to \mathbb{C}, \quad F(v) := \int_0^1 f(x)\overline{v}(x)dx.$$

Die Cauchy–Schwarz Ungleichung liefert dann die Stetigkeit von a, denn für $C := \|p\|_\infty$ gilt

$$|a(u,v)| \leq \|p\|_\infty \left| \int_0^1 u'(x)\overline{v}'(x)dx \right| \leq C\|u'\|_2\|v'\|_2 \leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

für alle $u, v \in H$. Außerdem ist a koerziv, denn für $\gamma := \frac{1}{2}\min_{x\in[0,1]} p(x) > 0$ folgt aus der Poincaré-Ungleichung

$$|a(v,v)| \geq 2\gamma\|v'\|_2^2 = \gamma(\|v'\|_2^2 + \|v'\|_2^2) \geq \gamma\|v\|_{H^1}^2$$

für alle $v \in H$. Somit sind alle Voraussetzungen von Lax-Milgram erfüllt, d.h. es existiert ein stetiger, invertierbarer Operator $A \in L(H)$ mit $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ für alle $u, v \in H$. Der Darstellungssatz von Riesz liefert schliesslich noch ein Element $q \in H$ mit $F(v) = \langle q, v\rangle$. Die schwache Form der Gleichung (1) lässt sich also schreiben in der Form $\langle Au, v\rangle = \langle q, v\rangle$, $v \in H$, und hat folglich genau eine Lösung $u \in H$.