Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

3. Übungsblatt – Lösungsskizze

Präsenzübungen

Aufgabe P10

(1) Wir zeigen zunächst $\|[x]\| \leq \limsup |x_n|$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\|[x]\| = d(x, c_0) = \inf_{y \in c_0} \|x - y\|_\infty \leq \sup_{n \geq N} |x_n| \,,$$

da $\sup_{n \geq N} |x_n| = \|x - y\|_\infty$ wenn wir die Folge $y \in c_0$ nehmen, für die $y_n = x_n$ für $n < N$ und $y_n = 0$. sonst. Also ist

$$\|[x]\| \leq \inf_N \sup_{n \geq N} |x_n| = \limsup |x_n| \,.$$

(2) Für die andere Richtung sei $\epsilon > 0$ und sei $y \in c_0$. Dann existiert ein N mit $|y_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Nach der Definition des Limes superior existiert ein $k > N$ derart, dass $|x_k| \geq \limsup |x_n| - \epsilon$. Dann gilt:

$$\|x - y\|_\infty \geq |x_k - y_k| \geq |x_k| - |y_k| \geq \limsup |x_n| - \epsilon - \epsilon \,.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $y \in c_0$, deswegen gilt sie mit dem Infimum:

$$\inf_{y \in c_0} \|x - y\|_\infty \geq \limsup |x_n| - 2\epsilon.$$

Zusammen folgt, dass $\|[x]\| = \limsup |x_n|$.

Aufgabe P11

Wir zeigen, dass die Menge $M = \{f^1, e^1, f^2, e^2, \ldots\}$ eine dichte Teilmenge aufspannt, wobei $f^i_k = 1$ für alle $k \geq i$ und 0 sonst und $e^i_k = \delta_{ik}$. Offensichtlich ist M eine abzählbare Teilmenge von c.
Sei $x \in c$ und $\epsilon > 0$. Wir suchen eine Folge $y \in \operatorname{span} M$ mit der Eigenschaft, dass $\|x - y\|_\infty < \epsilon$. Sei $\ell = \lim x$. Es existiert $N > 0$, so dass $|x_n - \ell| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Wir definieren

$$y = \ell f^N + \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^n \in M \,.$$

Dann gilt $|x_n - y_n| < \epsilon$ für alle n, d.h. $\|x - y\|_\infty < \epsilon$.
Offensichtlich spannt die abzählbare Menge $\{e^1, e^2, \ldots\}$ eine dichte Teilmenge in dem Raum c_0 der Nullfolgen auf.

Aufgabe P12

Da $C([0,1], \mathbb{K})$ normiert ist genügt es eine abzählbare Menge A mit $C([0,1], \mathbb{K}) = \overline{\operatorname{span} A}$ anzugeben.

Da die Polynome eine Unteralgebra von $C([0,1],\mathbb{K})$ bilden, die Punkte separiert, alle Konstanten enthält, und die bezüglich komplexer Konjugation abgeschlossen ist, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß, daß die Polynome dicht in $C([0,1],\mathbb{K})$ liegen, ihr Abschluss also $C([0,1],\mathbb{K})$ ist. Nun ist die Menge der Monome eine abzählbare Menge und eine Basis der Polynome, woraus die Behauptung direkt folgt.

Hausübungen

Aufgabe H7

Sei (f_k) eine Cauchyfolge in $C^\alpha([0,1])$. Da $\|\cdot\|_{C^\alpha} \geq \|\cdot\|_\infty$, ist (f_k) auch eine Cauchyfolge in $C([0,1])$, der ein Banachraum ist. Deshalb existiert eine stetige Funktion $f \in C([0,1])$ mit $\|f - f_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Nun gilt für alle $s, t \in [0,1], s \neq t$, und $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|(f_l - f_k)(s) - (f_l - f_k)(t)|}{|s-t|^\alpha} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|(f - f_k)(s) - (f - f_k)(t)|}{|s-t|^\alpha}.$$

Das linke Glied ist kleiner als $[f_l - f_k]_\alpha$. Also ist $[f - f_k]_\alpha \leq \underline{\lim}_{l\to\infty} [f_l - f_k]_\alpha \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Somit ist f in $C^\alpha([0,1])$ und f_k konvergiert gegen f für die Norm $\|\cdot\|_{C^\alpha}$.

Aufgabe H8

Der Satz von Hahn–Banch garantiert zunächst eine Fülle an nichttrivialen beschränkten linearen Funktionalen auf X. Für $u \in X$ können wir zum Beispiel die "Koordinatenabbildung" auf dem von u erzeugten eindimensionalen Unterraum $U := \{cu : c \in \mathbb{K}\}$ betrachten, d. h. das Funktional

$$f_u : U \to \mathbb{K}, \quad f_u(cu) := c\|u\|.$$

Mit der Hilfe von Hahn–Banach setzen wir das Funktional f_u dann zu einem Funktional $F_u : X \to \mathbb{K}$ mit gleicher Norm auf den ganzen Raum X fort. Andererseit definiert jedes beliebige von Null verschiedene Element $v \in Y$ eine beschränkte lineare Abbildung durch

$$g_v : \mathbb{K} \to Y, \quad g_v(c) := cv.$$

Die Komposition $g_v \circ F_u : X \to Y$ ist somit eine nichttriviale beschränkte lineare Abbildung von X nach Y.

Aufgabe H9

Wir definieren

$$\alpha := \sup\{|\lambda(x)| \,:\, \lambda \in X' \text{ und } \|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1\}.$$

Wegen $|\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}}\|x\| \leq \|x\|$ für beliebiges $\lambda \in X'$ mit $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1$, folgt zunächst $\alpha \leq \|x\|$. Sei andererseits $U := \{cx : c \in \mathbb{K}\}$ und

$$f : U \to \mathbb{K}, \quad f(cx) := c\|x\|.$$

Dann gilt $f \in U'$ und $\|f\|_{\text{op}} = 1$. Der Satz von Hahn–Banach liefert nun eine beschränkte lineare Fortsetzung $F : X \to \mathbb{K}$ mit $\|F\|_{\text{op}} = 1$. Wegen $F(x) = f(x) = \|x\|$ folgt somit die Behauptung, d. h.

$$\|x\| = \sup\{|\lambda(x)| \,:\, \lambda \in X' \text{ und } \|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1\}.$$

Aufgabe H10

Wir behaupten, dass der Raum $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}([0,1])$ der $\mathbb{K}$-wertigen Polynome auf $[0,1]$ dicht in $C^\infty([0,1],\mathbb{K})$ liegt. Sei hierzu $f \in C^\infty([0,1],\mathbb{K})$. Wir müssen zeigen, dass jede f-Umgebung einen nichttrivialen Schnitt mit $\mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}([0,1])$ hat. Nach Aufgabe H2 genügt es sogar zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $P \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}([0,1])$ existiert mit

$$p_n(f-P) = \|f^{(n)} - P^{(n)}\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f^{(n)}(t) - P^{(n)}(t)| < \epsilon.$$

Der klassische Satz von Weierstrass liefert zunächst ein Polynom $Q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}([0,1])$ mit

$$\|f^{(n)} - Q\|_\infty < \epsilon.$$

Somit liefert n-fache Integration von Q ein Polynom P mit der gewünschten Eigenschaft, d. h.

$$p_n(f-P) = \|f^{(n)} - P^{(n)}\|_\infty = \|f^{(n)} - Q\|_\infty < \epsilon.$$