Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

11. Übungsblatt

Aufgaben

Aufgabe 47
Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Wir betrachten auf ℓ^2 den Multiplikationsoperator M_a mit Definitionsbereich

$$D_{M_a} := \{x \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_k x_k|^2 < \infty\}$$

und

$$M_a \colon \ell^2 \supseteq D_{M_a} \to \ell^2, \quad M_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Wir werden weiter unten sehen, dass M_a ein abgeschlossener Operator ist.

(a) Zeigen Sie, dass jedes a_n ein Eigenwert von M_a ist und dass $\sigma(M_a) = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

(b) Zeigen Sie, dass M_a stetig ist, falls $\sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

(c) Zeigen Sie, dass die Graphennorm $\|\cdot\|_{M_a}$ auf D_{M_a} äquivalent ist zu der durch

$$\|x\|_{M_a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|^2)|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegebenen und schließen Sie, dass M_a ein abgeschlossener Operator ist.

Hinweis: Für einen Operator $T \colon X \supseteq D \to Y$ ist die Abbildung $(D, \|\cdot\|_T) \to \Gamma T$, $x \mapsto (x, Tx)$ eine surjektive Isometrie. Also ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(D, \|\cdot\|_T)$ vollständig ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Einbettung $(D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a}) \to \ell^2$ kompakt ist falls $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 48
Sei K eine kompakte nichtleere Teilmenge von K. Zeigen Sie, dass es einen Operator $T \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ mit $\sigma(T) = K$ gibt.
Hinweis: Aufgabe 47.

Aufgabe 49
Seien X und Y normierte Räume. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T \mapsto T'$ einen linearen Operator $\mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y', X')$ definiert und dass dieser Operator eine Isometrie ist, d.h. zeigen Sie, dass $\|T'\| = \|T\|$.

Definition: Sei $T\colon X \to Y$ ein stetiger linearer Operator zwischen den Banachräumen X und Y. Falls $\ker(T)$ und $Y/\operatorname{im}(T)$ endlich-dimensional sind, so heißt T *Fredholmoperator*. Die Zahl

$$\operatorname{ind}(T) := \dim(\ker(T)) - \dim(Y/\operatorname{im}(T)) \in \mathbb{Z}$$

heißt *Index* von T.

Aufgabe 50

Seien X ein Banachraum und $F \in L(X)$ ein Operator mit endlich-dimensionalem Bild.

(a) Konstruieren Sie eine topologische Zerlegung $X \cong X_F \oplus N_F$ mit $\dim X_F < \infty, F(X_F) \subset X_F$ und $F(N_F) = \{0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id} - F$ ein Fredholmoperator mit Index 0 ist.

Aufgabe 51

Sei X ein Banachraum.

(a) Sei $T \in L(X)$ ein Fredholmoperator. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ind}(UT) = \operatorname{ind} T$ für alle $U \in GL(X)$ gilt.

(b) Sei S der Limes einer Folge von stetigen linearen Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id} - S$ ein Fredholmoperator mit Index 0 ist.