# Übung zur Funktionalanalysis
# SoSe 2015

### 10. Übungsblatt

---

### Aufgabe

**Aufgabe 41**
Zeigen Sie den **Satz über die offene Abbildung** für abgeschlossene Operatoren: Seien $X, Y$ Banachäume Satz und $T \colon X \supseteq D \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Dann gilt

$$T \text{ surjektiv} \Leftrightarrow T \text{ offen (bzgl. } \|\cdot\|_X \text{ auf } D).$$

**Aufgabe 42**
Es sei $X$ ein normierter Raum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator.

(a) Zeigen Sie, dass $T$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $T$ genau dann invertierbar ist, wenn $X$ endlich-dimensional ist.

**Aufgabe 43**
Betrachten Sie die Zuordnung $T_0 : e_n \mapsto \frac{1}{1+n} e_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonische Basis von $\ell^2(\mathbb{N})$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $T_0$ einen Operator $T \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ mit $\|T\| = 1$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $T$ ein kompakter Operator ist. Bestimmen Sie außerdem $T^*$.

**Aufgabe 44**
Sei $X$ ein Banachraum, und seien $S \colon X \supseteq D \to X$ und $T \colon X \supseteq D \to X$ abgeschlossene Operatoren ($S$ und $T$ haben also den selben Definitionsbereich). Zeigen Sie, dass die beiden *Resolventengleichungen*

(a) $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(T)$,

(b) $R_\lambda(S) - R_\lambda(T) = R_\lambda(S)(S - T) R_\lambda(T) \quad \forall \lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ gelten.

(c) Zeigen Sie dann, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind (falls $T \in L(X)$ diese Bedingungen erfüllt, sagt man auch $T$ habe *kompakte Resolvente*):

   (i) Die Resolvente $R_\lambda(T)$ ist für ein $\lambda \in \rho(T)$ kompakt.

   (ii) Die Resolvente $R_\lambda(T)$ ist für alle $\lambda \in \rho(T)$ kompakt.

(d) Zeigen Sie außerdem, dass in unendlich-dimensionalen Räumen lediglich unstetige Operatoren kompakte Resolventen haben können.

**Hinweis**: Sie können bemerken, dass $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{\mu, \lambda\}$ die Gleichheit $\frac{1}{\lambda-x} - \frac{1}{\mu-x} = \frac{\mu-\lambda}{(\lambda-x)(\mu-x)}$ gilt.

**Aufgabe 45**

Sei $J$ eine Menge und $X := \ell^\infty(J, \mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in X$ der Multiplikationsoperator $T_f(x) := f \cdot x$ (punktweises Produkt) Spektrum $\overline{f(J)}$ hat.

**Aufgabe 46**

Sei $M$ ein kompakter metrischer Raum und sei $f \in C(M)$. Berechnen Sie das Spektrum des Multiplikationsoperators $T_f \colon x \mapsto f \cdot x$ auf $C(M)$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Element des Spektrums ein Eigenwert ist.