Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

8. Übungsblatt

Aufgabe

Aufgabe 31

(a) Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum mit der Eigenschaft, dass jede offene Nullumgebung U eine offene konvexe Nullumgebung W enthält, für die zusätzlich $\lambda \cdot W \subset W$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, dann stetig ist.

(b) Sei (X, d) ein reeller metrischer Vektorraum und zusätzlich lokalkonvex d.h. jede offene Nullumgebung enthält eine offene konvexe Nullumgebung. Zeigen Sie, dass die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, dann stetig ist.

Aufgabe 32

Sei $(c_i)_{i \in I}$ eine Familie von komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass beide Aussagen äquivalent sind.

(a) Das Supremum $\sup\{\sum_{j \in J} |c_j|^2 : J \subset I, |J| < \infty\}$ ist endlich.

(b) Es gilt $c_i \neq 0$ für höchstens abzählbar viele i und $\sum_{i \in I} |c_i|^2 < \infty$.

In (b) ist es Teil der Aufgabenstellung eine Definition von $\sum_{i \in I} |c_i|^2$ zu geben so dass sie für abzählbares I mit der bekannten Definition übereinstimmt und die Wohldefiniertheit dieser Definition ist zu zeigen.

Aufgabe 33

(a) Zeigen Sie, dass eine orthonormale Basis eines Hilbertraums H keine Basis (im algebraischen Sinn) des Vektorraums H ist, wenn H unendlich dimensional ist.

(b) Sei H ein Hilbertraum mit orthonormaler Basis S und H' ein Hilbertraum mit orthonormaler Basis T. Zeigen Sie, dass genau dann eine surjektive Isometrie zwischen H und H' existiert wenn $|S| = |T|$.

Aufgabe 34

Es seinen $(e_i)_{i \in I}$ und $(f_j)_{j \in J}$ Orthonormalbasen der Hilberträume H und H'. Außerdem sei T der Vektorraum der formalen Linearkombinationen $v = \sum \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j$, wobei $e_i \otimes f_j$ ausschliesslich als abstraktes Symbol gemeint ist. Wir definieren ein Skalarprodukt auf T durch

$$\langle v, w \rangle := \sum \alpha_{i,j} \overline{\beta_{i,j}}$$

für $w = \sum \beta_{i,j} e_i \otimes f_j$ und schreiben $H \widehat{\otimes} H'$ für die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums T.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $(e_i \otimes f_j)_{i\in I, j\in J}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $H \widehat{\otimes} H'$ ist.

Für $p, q \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Hilberträume $L^2(\mathbb{R}^p)$ und $L^2(\mathbb{R}^q)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikationsabbildung gegeben durch

$$m_{p,q} : L^2(\mathbb{R}^p) \widehat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^q) \to L^2(\mathbb{R}^{p+q}), \quad m_{p,q}(e_i \otimes f_j)(x, y) := e_i(x) f_j(y)$$

für $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$ ein Isomorphismus von Hilberträumen ist.

Aufgabe 35

Zeigen Sie, dass die Funktionen $c_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi n x)$, $s_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2}\sin(2\pi n x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und die konstante Funktion 1 eine Orthonormalbasis von $L^2(\mu)$ bilden, wobei μ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass sowohl die stetigen Funktionen $C([0,1], \mathbb{R})$, als auch die periodischen stetigen Funktionen $\{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ dicht in $L^2(\mu)$ liegen.